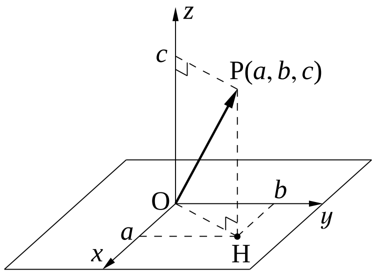
第 8 章　空間ベクトル

§8.1　空間ベクトルの基礎

空間ベクトルを表す記号は平面ベクトルと同じです．実際，両者は基本的にはよく似た性質をもちます．

8.1.1　空間座標



我々は空間の中に住んでいます．空間上の位置を指定する方法を考えましょう．空間上に 1 つの平面を考え，その平面上に原点 O および互いに直交する x 軸，y 軸をとります．この x 軸，y 軸を含む平面を ***xy* 平面** といいます．xy 平面上の各点でその平面に垂直な直線があり，その中で原点 O を通るものを z 軸とします．x，y，z 座標の尺度はもちろん共通とします．y 軸，z 軸を含む平面を ***yz* 平面**，z 軸，x 軸を含む平面を ***zx* 平面**といいます．

図の x，y，z 軸の正の向きは，それぞれ，右手の親指，人差し指，中指を広げたときにそれらの指の指す向きになっているので，「右手系」と呼ばれます．もし，図の z 軸を下向きに正にとるならば「左手系」です．

空間上の点 P の座標を定めるには，まず P から xy 平面に下ろした垂線の足を H として，点 H の x，y 座標が a，b のとき H の空間座標を $(a,\ b,\ 0)$ とします．次に，P から z 軸に下ろした垂線の足の z 座標が c のとき，点 P の空間座標を $(a,\ b,\ c)$ とします．このように x，y，z 軸を定めたとき，点の座標はただ 1 通りに定まります．

点 P と原点 O の距離 OP は，△OPH が直角三角形なので，

$$\begin{aligned} \mathrm{OP} &= \sqrt{\mathrm{OH}^2 + \mathrm{HP}^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

と，平面の場合に似た式で表されます.

8.1.2　空間ベクトルと演算法則

ベクトルの演算法則は平面ベクトル・空間ベクトルに共通であり，このことから，ベクトルは次元に関係せずに定義できることがわかります.

8.1.2.1　空間ベクトルの定義

空間上においても，平面の場合と同様に，向きと長さをもつ量が定義できるので，それを **空間ベクトル** といいましょう．空間ベクトルも矢線で表すことができ，その矢線の長さをベクトルの長さ（大きさ）というのは平面ベクトルの場合と同じです．例えば，前の §§ の点 P(a, b, c) について，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の長さは

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

と定められます.

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示は，原点 O から点 P(a, b, c) への変位と考えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

のように列ベクトルで表すことができます[1].

空間ベクトルの相等や・和・差・実数倍の定義は，関係する 2 つのベクトルを表す矢線の始点を一致させれば適当な平面上で議論できるので，平面ベクトルの場合と同様です．ベクトルの成分表示で表すと，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

[1] $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a, b, c)$ のように，行ベクトルで表しても構いません.

のとき

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a=d,\ b=e,\ c=f\,,$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a+d\\b+e\\c+f\end{pmatrix},\qquad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a-d\\b-e\\c-f\end{pmatrix},$$

$$k\vec{a}=\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}\qquad (k\text{ は実数})$$

などが成り立ちますね[2].

8.1.2.2　ベクトルの演算法則

空間ベクトルについても，容易に確かめられるように，平面ベクトルの場合と同じ演算法則が成り立ちます：

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\,. \qquad \text{（結合法則）}$$

実数 $k,\ l$ に対して

$$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}\,,$$

$$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}\,,$$

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}\,.$$

これらの演算法則が成り立つことは，平面ベクトルも空間ベクトルも似たような性質をもっていることを意味します．実際，ほとんどの場合に両者は同じように扱うことができます．

このように‘ベクトルの基本性質は空間の次元によらない’ことが示唆されたので，もう少し議論しましょう．‘1 次元ベクトル’を考えます．これは直線上の，例えば，x 軸上のベクトルです．そんなベクトルが上の演算法則を満たすことは容易に確かめられます．1 次元ベクトルとは何でしょう．1 次元では

[2] 空間ベクトルについても，成分表示をベクトルの定義とする立場をとり，上述のベクトルの相等や，和，差，実数倍の成分表示についても定義と見なしましょう．

向きは同じ向きか反対向きかのどちらかなので，大きさと合わせて考えると，1 次元ベクトルは実数そのものと見なされます．実際，上の演算法則で，記号に惑わされないように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を a，b，c と書き直してみましょう：

$$a + b = b + a, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad \text{（結合法則）}$$

$$k(la) = (kl)a, \qquad \text{（積の結合法則）}$$

$$(k + l)a = ka + la, \qquad k(a + b) = ka + kb. \qquad \text{（分配法則）}$$

これらはまさに実数の計算法則そのものですね．これで，実数は 1 次元ベクトルである（つまり，実数は 1 次元ベクトルと区別がつかない）ことが納得されるでしょう．

実数の計算法則は，実数を複素数にすると，複素数の計算法則になりますね．複素数 $x + iy$（x，y は実数）は 2 つの実数で表されるので，複素数は 2 次元ベクトル，つまり平面ベクトルと同じように扱うことができます．君たちは，複素数の章で，このことを実感するでしょう．ベクトル計算の発展が複素数計算の発展と一緒になされた理由は，複素数の計算法則とベクトルの演算法則が実質的に同じであるためです（ベクトルの演算法則で $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を複素数だと思ってみましょう）．

8.1.2.3　ベクトルの公理的定義

ベクトルの演算法則の重要性に気がついた数学者は，‘ ベクトルをその演算法則によって定義する ’ ことを企てました．きちっといいますと，先に述べた演算法則

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \qquad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \qquad k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a},$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}, \qquad k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \qquad \text{（k，l は実数）}$$

が成立すること，および，‘ これらの演算の結果はまたベクトルになる ’ ことを要請し，また，零ベクトル $\vec{0}$，および，ベクトル $\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ が存在すること，つまり

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \qquad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

を満たすベクトル $\vec{0}$ および $-\vec{a}$ の存在を仮定します．これらの仮定や要請は‘ しごくもっとも ’ですね．

　これらをベクトルの公理系であるとする，つまり，‘ この公理系の要請を満たす量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$（なら何であっても，それら）をベクトルと定義する ’ わけです．これらの性質をもつ量をベクトルであると考えたとき，上の公理系はベクトルの基本的計算に必要な演算法則をそろえており，それから得られる全ての結果はまさにベクトルに対する結果になります．したがって，これもまた確かにベクトルの定義といえるでしょう．

　非常に荒っぽいたとえをすると，ベクトルの姿形を見ているのが矢線によるベクトルの定義であり，ベクトルのレントゲン写真を見ているのがベクトルの成分表示（数ベクトル表示）による定義，ベクトルの振る舞いを見ているのが上の公理系によるベクトルの定義といえるでしょうか．どの見方（定義）もベクトルの本質を捉えています．君たちが大学で教わるベクトルはこの公理系によって定義されたベクトルです．ここで学んでおけばビックリしないで済むでしょう．

　ちょっと補足しますと，上の公理系は，ベクトルの本質部分のみを述べているのであって，矢線や数ベクトル・直交座標系などと直接に関係しているわけではありません．よって，ベクトルの長さや内積を議論するには直交座標系を導入する必要があります．高校の授業では，矢線やベクトルの成分表示を考えたときには，直交座標系は当然のこととされますね．

　最後に，公理的に定義されたベクトルとその次元について補足しましょう．上の公理系はベクトルの詳細とベクトルの次元については何もいっていません．ということは，その公理系を満たすものなら何でもベクトルにしてしまって，そのベクトルの次元については問わないわけです．よって，ベクトルの公理的定義は，ベクトルの概念を一般化しその応用範囲を広げます．例えば，君たちは n 元連立 1 次方程式の n 個の未知数をまとめて並べたら，それが数ベクトルになることを行列の章で学ぶでしょう．また，大学の「線形代数」という講義では関数を無数に並べたものが無限次元ベクトルになることを学ぶでしょう．線形代数は電気回路や「量子力学」（原子や分子のような極微の世界を扱う学問）などには必須です．

8.1.3　空間ベクトルの 1 次結合と 1 次独立

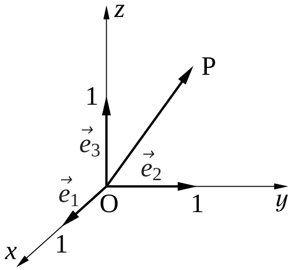
平面ベクトルで学んだベクトルの 1 次独立の概念が本領を発揮するのは空間ベクトルにおいてです.

8.1.3.1　1 次結合の意味と 1 次独立の条件

§7.4 で平面ベクトルの 1 次結合と 1 次独立を議論しました．空間ベクトルでも同様の議論ができます.

空間の基本ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



を用いると，任意の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

と基本ベクトルの 1 次結合で表すことができます．この 1 次結合による表示はもちろん‘ただ 1 通り’である，つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の長さと向きを定めるとベクトルの係数 x，y，z がただ 1 通りに定まります.

さて，任意の空間ベクトル $\vec{p}$ を 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合でただ 1 通りに表すことができるための条件を調べましょう．まず必要条件を求めます．$\vec{p}$ を任意に定めたとき

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \quad (s,\ t,\ u \text{ は実数})$$

と表されたとしましょう．ただ 1 通りに表されるということは，仮に

$$\vec{p} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c} \quad (s',\ t',\ u' \text{は実数})$$

と表されたとしても，$s = s'$，$t = t'$，$u = u'$ が成立することを意味します．この条件は

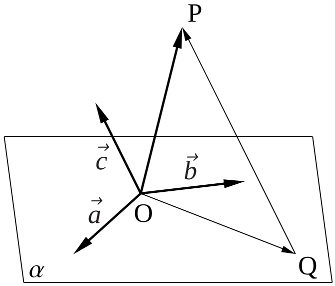
$$(s - s')\vec{a} + (t - t')\vec{b} + (u - u')\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow s = s',\ t = t',\ u = u'$$

あるいは，より簡潔に s, t, u を変数として

$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow s = t = u = 0 \qquad (1\text{ 次独立 } V^3)$$

と表されます．この条件は，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のどれも $\vec{0}$ でなく，かつ，どの 1 つも他の 2 つの 1 次結合で表すことができないことを意味します（例えば，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ の場合を調べてみましょう）．これを一言でいうと，‘ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は同一平面上に描けない ’ ということです．これが ‘ ただ 1 通りに表される ’ ための必要条件です．

上の条件は十分条件でもあります．それを示すには，同一平面上に描けない $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の 1 次結合が任意のベクトル $\vec{p}$ を表すことができることを示せばよいわけです．$\vec{p}$ を任意の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ として



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

と表示できるかどうか調べましょう．$\vec{a}$, $\vec{b}$ を位置ベクトルとすると，両ベクトルがその上にある平面 α が定まります．このときベクトル $\vec{c}$ は平面 α 上に描けないので，点 P を通り方向ベクトルが $\vec{c}$ の直線は平面 α と交わります．その交点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

と表すことができます．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，平面 α 上にあるので，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の 1 次結合で表せます．$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は，$\vec{c}$ に平行なので，$\vec{c}$ の定数倍です．よって，任意のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の 1 次結合で表すことができます．これで証明は完成です．

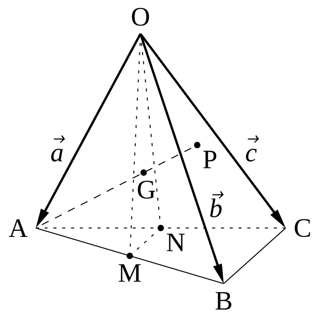
1 次独立 V^3 の条件を満たすこれら 3 つのベクトルは **1 次独立** である，または **線形独立** であるといいます．

8.1.3.2　ベクトルの 1 次独立とその応用

3 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立，つまり「$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow s=t=u=0$」が成立するとき，直ちに，定理

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \Rightarrow s=s',\ t=t',\ u=u'$$

が得られます（示しましょう）.



これを応用して問題を解いてみましょう．四面体 OABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とする．△OMN の重心を G として，直線 AG と平面 OBC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の 1 次結合で表せ.

一見して難しそうですが，P は直線と平面の交点であるから，P は直線上にあり，かつ，平面上にあります．そのことを 2 つの式で表して ‘ 連立すればよい ’ わけです.

まず，△OMN の重心 G は平面 OMN 上にあるので，平面ベクトルで導いた重心の公式が使えます：

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}).$$

同様に，辺 AB，AC の中点 M，N はそれぞれ平面 OAB，OAC 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}).$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{6}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

点 P は直線 AG 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}&=\vec{a}+t\left(\frac{1}{6}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\right)\\&=\left(1-\frac{2}{3}t\right)\vec{a}+\frac{t}{6}(\vec{b}+\vec{c}).\end{aligned}$$

一方，点 P は平面 OBC 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合で表されます：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{b}+l\vec{c}.$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は 1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ によって 2 通りに表されたので，それらの表式を比較して

$$1-\frac{2}{3}t=0, \quad \frac{t}{6}=k=l.$$

よって，$t=\frac{3}{2}$ が得られるので，答は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}).$$

8.1.4　空間ベクトルの内積

空間ベクトルの内積は，その成分表示を除いて，平面ベクトルの内積に一致します：ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，それらの内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

と表されます．

空間ベクトルの内積は平面ベクトルの場合と同じ基本性質

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{a}=\vec{0} \quad \text{または} \quad \vec{b}=\vec{0},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2, \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}, \qquad (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}, \qquad \text{（分配法則）}$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad \text{（k は実数）}$$

をもちます．それらの示し方は平面ベクトルの場合と同様です[3]．

---

[3] 分配法則以外のものは $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を用いると容易に示されます．

分配法則については，内積の性質から $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ としても一般性を失わないので，ベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ のベクトル $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルを $\vec{b'}=\begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{c'}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix}$ とすると，平面ベクトルの内積の場合と同様にして

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b'}=ab, \qquad \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c'}=ac$$

が成り立ちますね．これを示すこと，およびこの続きは君たちに任せましょう．

内積の成分表示を求めるには，基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

と表して内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に代入するか，もしくは，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として，$\triangle$OAB に余弦定理を適用します．結果は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

となり，平面ベクトルの場合と同様に，各成分の積の和で表されます[4)].

よって，空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ は

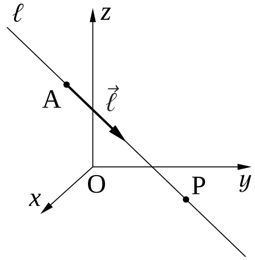
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

を用いて求めることができます.

§8.2　空間図形の方程式

8.2.1　直線の方程式

空間上の直線 ℓ も，平面の場合と同様，通る 1 点 A と ℓ の方向ベクトル $\vec{\ell}$ で特徴づけられます．ℓ 上の点を P(x, y, z) とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{\ell}$ として



$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{\ell}$$

と表されます．これが直線 ℓ のベクトル方程式です.

4) 平面ベクトルの内積のところで注意したように，ベクトルを成分表示で定義すると空間ベクトルの内積も各成分の積の和で定義されます．その定義から内積の基本性質や内積の角表示が導かれます.

$\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$，$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ とすると，ℓ のベクトル方程式から直線 ℓ のパラメータ表示

$$\ell : \begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases}$$

が得られます．これからパラメータ t を消去すると，直線 ℓ の方程式

$$\ell : \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \ (= t)$$

が得られます．もし，方向ベクトル $\vec{\ell}$ の成分 $l,\ m,\ n$ のどれかが 0，例えば $l = 0$ ならば $x = a + lt = a$ だから

$$\ell : x = a,\ \ \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

などと変更します．通常は，（直線の方程式では）分母が 0 ならば分子も 0 と約束して，その煩わしさを避けます．

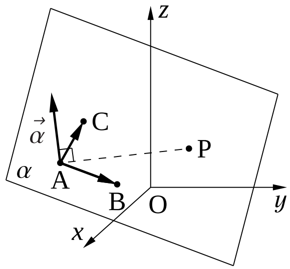
直線 ℓ の方程式には，等号＝が 2 個現れましたね．これは，空間上の直線の方程式は，3 変数 $x,\ y,\ z$ に対して，2 つの方程式が付加されたことを意味します．よりわかりやすい例として z 軸を考えましょう．点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が z 軸上にあるための条件は $x = 0,\ y = 0$（z は任意）です．したがって，z 軸を表す方程式は

$$z \text{ 軸} : x = y = 0$$

となりますね．このことは，空間上の点 P に 3 つの方程式を付加すると P は固定されるけれども，3 つの方程式のうち 1 つを外すと P は‘線上を動く自由が得られる’と解釈できます．それは直線のパラメータ表示のパラメータが 1 個であることに起因しています．

空間図形においては，このように，その方程式の等号＝の個数やパラメータの個数が図形の基本的性質を決定します．平面や球面の方程式を次の §§ で議論します．それらの方程式の等号の個数はいくつでしょうか．ちょっと考えればわかりますね．

8.2.2　平面の方程式



空間上に異なる 3 点 A，B，C を定めるとそれらを通る平面 α はただ 1 つ定まりますね．この平面上の任意の点を P(x，y，z) として平面 α の方程式を求めましょう．

位置ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

において，点 P が平面 α 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の 1 次結合で表されます：

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad (s,\ t \text{ は実数}).$$

したがって，平面 α のベクトル方程式は

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができます．

上の平面 α のベクトル方程式は，2 つのパラメータ s, t を含み，平面のパラメータ表示と実質的に同じものです．パラメータ s, t を消去して平面の方程式を導くには，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分で表して s と t の連立方程式を立てれば可能ですが，誤らずに行うにはかなりの計算力を要します．

平面の方程式を求めるもう 1 つの方法は，2 つのベクトルが直交するときそれらの内積は 0 になることを利用するものです．平面にはそれに垂直なベクトルがありますね．それを平面の **法線ベクトル** といいます．法線ベクトルは平面上のベクトルに直交するので，平面 α の法線ベクトルを $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0, \quad \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

が成立します．したがって，平面 α のベクトル方程式の両辺に $\vec{\alpha}$ を内積すると，方程式

$$\alpha : \ \vec{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

が得られます．これは平面 α の「内積表示」と呼ばれます．法線ベクトルの求め方は後で学ぶことにしましょう．

平面の内積表示の意味を考えましょう．参考のために通常の解説とは逆の道をたどります．$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ ですから，上式より $\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，よって

$$\vec{\alpha} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

が得られます．これは $\vec{\alpha} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を意味し，点 P が平面 α 上にあるための条件です．この条件 $\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ は，平面 α を定めるには，その法線ベクトル $\vec{\alpha}$ と α 上の 1 点 A を定めれば十分であることを表しています．

平面 α の内積表示は，法線ベクトルを $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ として，$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -d$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -d \quad \text{つまり} \quad ax + by + cz + d = 0$$

が得られます．これが「平面の方程式」の一般形です．

この一般形から平面の方程式を決定するには，平面上の 3 点の座標を方程式に代入して，a，b，c，d についての連立方程式を解き，それらの比を求めます．練習問題として，3 点が $(p,\ 0,\ 0)$，$(0,\ q,\ 0)$，$(0,\ 0,\ r)$ $(p,\ q,\ r \fallingdotseq 0)$ のとき，平面の方程式が

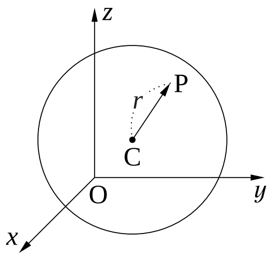
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

となることを確かめましょう．

平面の方程式 $ax + by + cz + d = 0$ は 3 変数 x，y，z に対して，1 つの方程式を付加していますね．これは空間上の直線の方程式より弱い条件なので，平面の方程式は平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が前後・左右に動き回る自由を与えています．このことは平面のベクトル方程式のパラメータが 2 個であることからもわかります．

変数の個数（次元の数）から図形上の点に付加された方程式の個数を引いた数を **自由度** といいます．自由度は，平面上では $3 - 1 = 2$，直線上では $3 - 2 = 1$，定点では $3 - 3 = 0$ ですね．

8.2.3　球面の方程式



球面は球の表面のことです．中心が C(a, b, c), 半径が r の球面 S の方程式を求めましょう．点 P(x, y, z) が S 上にあるための条件は CP $= r$ または $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$ です．これより直ちに球面 S の方程式

$$S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

が得られます．この方程式も等号が 1 個ですから自由度 2 を与えます．球面上では前後・左右に動けると考えるとよいでしょう．

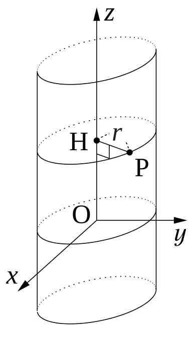
なお，この球面 S にその内部を加えたものは球 S_0 になりますが，それはそのための条件 CP $\leqq r$ より，不等式

$$S_0 : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqq r^2$$

で表されます．球の内部では前後・左右に加えて上下にも動けるので，不等式は自由度に影響しないと見なされ，自由度は $3 - 0 = 3$ です．

8.2.4　円柱面と円の方程式

8.2.4.1　円柱面の方程式



平面（2 次元空間）上では，原点を中心とする半径 r の円の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$ でした．空間上で，この方程式はどんな図形を表すのでしょうか．考えてみましょう．等号が 1 個なので，何らかの面を表すことは確かで，円を表すことはありませんね．球面だとすると，変数 z を巻き込むはずなので，それも違いますね．方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ を変形して，その意味を考えてみましょう．

その図形上の点を P(x, y, z) として，P についての方程式に直せばよいですね．$x^2 + y^2 = r^2$ は z を含まないので，

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = r^2$$

と変形して，点 H(0, 0, z) を導入しましょう．すると，条件 $x^2 + y^2 = r^2$ は，点 P の座標が (x, y, z) だから

$$x^2 + y^2 + (z - z)^2 = r^2 \Leftrightarrow \mathrm{HP}^2 = r^2 \Leftrightarrow \mathrm{HP} = r$$

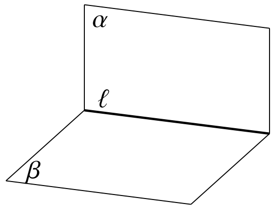
と解釈されます．H(0, 0, z) は点 P(x, y, z) から z 軸に下ろした垂線の足なので，HP = r はその垂線の長さ HP が一定値 r であることを意味します．このとき，z には何の制約もないので，この条件は点 P の z 座標には無関係に成り立ちます．よって，HP = r を満たす点 P は z 軸を対称軸とし半径 r の（無限に長い）円柱の面上にあるので，$x^2 + y^2 = r^2$ は「円柱面」の方程式であることがわかります．

8.2.4.2　**空間上の円の方程式**

それでは，空間上の xy 平面で，中心が原点で半径 r の円 C の方程式はどのように表せばよいでしょうか．答を聞けば，ああそうかで済んでしまいますが，理解を深めるために，先に空間上の直線の方程式で議論しておきましょう．

点 (a, b, c) を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ である直線 ℓ の方程式は

$$\ell : \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$



でしたね．これを明白な連立方程式として，

$$\ell : \begin{cases} \alpha : \dfrac{x-a}{l} = \dfrac{y-b}{m} \\ \beta : \dfrac{y-b}{m} = \dfrac{z-c}{n} \end{cases}$$

などと表しましょう．α, β は方程式が表す図形です．$\alpha : mx - ly - ma + lb = 0$ などと書き直すと明らかなように，この 2 つの方程式が表す図形 α と β は平面です．このことは，直線 ℓ が平面 α と β の両方程式を共に満たす点の集合，つまり，直線 ℓ は 2 平面 α と β の交わり（共通部分）として表されたことを意味します．平面を平面で ‘ 切る ’ とその切り口は確かに直線ですね．この直線の例は，空間図形における連立方程式の意味を理解するための雛型になっています．‘ 線を求めるときは，2 つの面の方程式を連立させればよい ’ わけです．

これで，中心が原点で半径 r の xy 平面上にある円 C の方程式の求め方が理解できたと思います．まず，円柱面 $C_z : x^2+y^2=r^2$ を求め，それを xy 平面 $z=0$ と連立させる，つまり，円柱面 C_z を xy 平面で切ればよいですね．したがって，求める円 C は

$$C : \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z=0 \end{cases}$$

と表されます．

なお，円 C は球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ と xy 平面 $z=0$ の交わりとしても表すこともできます．

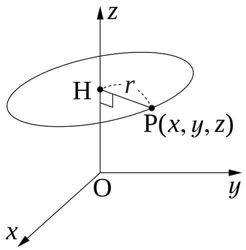
では，ここで練習問題．原点 O を 3 平面の交わりとして表せ．難しく考える必要はありません．例えば，$x=0$, $y=0$, $z=0$ です．

8.2.5　回転面の方程式

8.2.5.1　回転面

曲面の中には，平面上の曲線を同じ平面上にある直線の周りに回転させて作られるものがあり，それを「回転面」といいます．例えば，前の §§ で議論した円柱面 $x^2+y^2=r^2$ は yz 平面上の直線 $y=r$, $x=0$ を z 軸の周りに回転して得られますね．また，球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ も xy 平面上の円 $x^2+y^2=r^2$, $z=0$ を x 軸または y 軸の周りに回転して得られた回転面と見なすこともできます．

回転の中心となる直線を「回転軸」といいます．以下，回転軸を z 軸として議論しましょう．回転面上の任意の点を P(x, y, z) として，P から z 軸に下ろした垂線の足を H(0, 0, z) とします．このとき

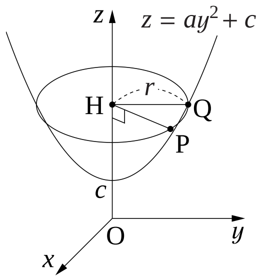


$$r = \mathrm{PH} = \sqrt{x^2+y^2}$$

とすると，r は点 P の z 座標のみに依存し，一般に，その z 座標と共に変化しますね．この r と z の関係の仕方によって種々の回転面があります．最も簡単なものが $r=$ 一定の円柱面ですね．

8.2.5.2　回転放物面・回転楕円面・回転双曲面

yz 平面上の放物線 $z = ay^2 + c,\ x = 0$ を z 軸の周りに回転して得られる回転面は「回転放物面」と呼ばれます．放物線上の点 $\mathrm{Q}(0,\ y_0,\ z_0)$ $(z_0 = ay_0^2 + c)$ を z 軸の周りに回転して得られる円上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ があるとすると，$z = z_0$ で，$r = \mathrm{PH}$ とすると，



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{QH} = |y_0| = r$$

が成り立ちます．よって，r と z の関係は $z = ar^2 + c$ で与えられ，その回転放物面の方程式は，$r^2 = x^2 + y^2$ より

$$z = a\left(x^2 + y^2\right) + c$$

で表されます．

yz 平面上の楕円 $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1,\ x = 0$ を z 軸の周りに回転して得られる図形が「回転楕円面」です．そのとき r と z の関係は，回転放物面の場合と同様にして，$\dfrac{r^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ となるので，その方程式は

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

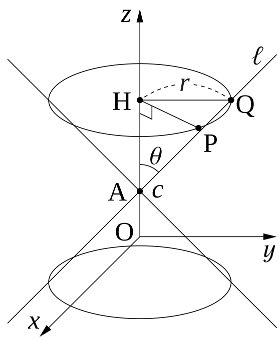
となります（確かめましょう）．

同様に，yz 平面上の双曲線 $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1,\ x = 0$ を z 軸の周りに回転したものが「回転双曲面」です．r と z の関係は $\dfrac{r^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ で，方程式は

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

8.2.5.3　円錐面

交わる 2 直線の一方を回転軸とし，その周りに「母線」と呼ばれる他方の直線を，2 直線がなす角を一定に保ったまま，回転します．そのとき得られる回転面を「円錐面」といいます．



z 軸を回転軸とし，それと点 A$(0, 0,\ c)$ で交わる yz 平面上の直線 ℓ を母線としましょう．母線 ℓ を z 軸の周りに回転して円錐面を作ります．母線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{\ell}$ として

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{\ell}$$

と表し，z 軸と母線 ℓ のなす角を θ とすると，$\vec{e}_3 \cdot \vec{\ell} = \left|\vec{\ell}\right| \cos\theta$ なので，$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ のようにとると好都合でしょう（何故かな？）．このとき

$$\ell : \begin{cases} x = 0 \\ y = t\sin\theta \\ z = c + t\cos\theta \end{cases}$$

となります.

よって，母線 ℓ 上に点 Q$(0,\ t\sin\theta,\ z_\theta)$ $(z_\theta = c + t\cos\theta)$ をとると，Q を z 軸の周りに回転して得られる円上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$，P から z 軸に下ろした垂線の足を H$(0, 0,\ z)$ とすると，$z = z_\theta$ で，$r = \mathrm{PH}$ とすると

$$r^2 = \mathrm{PH}^2 = x^2 + y^2, \qquad \mathrm{QH} = r = |\,t\sin\theta\,| = |\,(z - c)\tan\theta\,|$$

となるので，円錐面の方程式

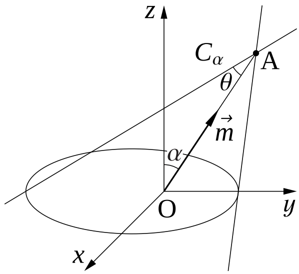
$$x^2 + y^2 = (z - c)^2 \tan^2\theta$$

が得られます.

なお，母線 ℓ を直接用いず，ℓ と z 軸のなす角が θ であることだけを用いて

$$\vec{e}_3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \mathrm{AP}\cos\theta$$

から導く方法もあります（厳密には両辺の絶対値をとります）．これが先に求めた円錐面の方程式を導くことを確かめるのは簡単な練習問題です.



この方法は回転軸が任意の方向であっても適用できます．新しい回転軸 m の方向ベクトルを $\vec{m}$，回転軸と母線のなす角を θ，A を回転軸と母線の交点とすると，円錐面の方程式は

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left|\vec{m}\right|\mathrm{AP}\cos\theta$$

から導かれます（厳密には両辺の絶対値をとる）．

新しい回転軸 m と元の回転軸 z 軸のなす角を α とすると，新たに得られる円錐面 C_α は元の円錐面を角 α だけ傾けたものになりますね．このとき円錐面 C_α と xy 平面との交わりは，C_α の回転軸から角 α だけ傾けた法線をもつ平面で C_α を切った切り口の曲線を表します．アレクサンドリア時代の優れた幾何学者アポロニウス（Apollonius，前 262〜190 頃，ギリシャ）は，定規とコンパスだけを用いて，この切り口が円や楕円，放物線，双曲線であることを示しました．図は切り口が楕円の場合です．

かなりの発展問題になりますが，興味をもった人はこのことを確かめることによって，偉大な先人を偲（しの）びましょう．それを行うには，

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}(0,\ c\sin\alpha,\ c\cos\alpha) \quad (c>0)$$

として，回転軸を $m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{m}$ とするのがわかりやすいでしょう．円錐面 C_α の方程式を $\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left|\vec{m}\right|\mathrm{AP}\cos\theta$ から求め，$z=0$ とおくと xy 平面による切り口の方程式になります．$0<\theta<90^\circ$ とすると，円錐面 C_α を yz 平面で切った切り口の 2 直線が y 軸に平行になるのは $\alpha = 90^\circ-\theta,\ 90^\circ+\theta$ のときなので，$\alpha=0$ のとき円，$0<\alpha<90^\circ-\theta$ のとき楕円，$\alpha=90^\circ-\theta$ のとき放物線，$90^\circ-\theta<\alpha<90^\circ+\theta$ のとき双曲線であることが確かめられるでしょう．

§8.3　空間ベクトルの技術

空間図形が関係する問題は一般に難しく，初等的解法をするのが嫌になることもあります．応用が広い技術をいくつか紹介しましょう．

8.3.1　図形と直線との交点

ある図形 A（直線，平面，球面など）と直線 ℓ の交点を求めるときは，A と ℓ の方程式を連立しますね．このとき直線 ℓ の方程式として

$$\ell : \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

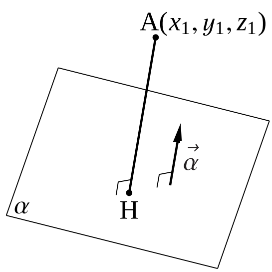
の形のものを直接使うのは多くの場合手間がかかります．このような場合には，直線のパラメータ表示

$$\ell : \begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases}$$

に直してから代入し，‘ 時間 ’ t の方程式にするとよいでしょう．すると，ℓ 上の動点 $(x,\ y,\ z)$ が A に衝突する時間 $t = t_1$ が求まります．この t_1 を ℓ のパラメータ表示の t に代入すると，衝突した場所（交点）の $(x,\ y,\ z)$ が求まります．このとき，交点が存在しない場合があることに注意しましょう．そのときは t の実数解はありません．

では，練習問題です．点 A(2, 3, 4) から平面 $\alpha : x + y + z = 6$ に下ろした垂線の足 H を求めよ．ヒント：垂線の方向ベクトルは平面 α の法線ベクトルにできますね．答は H(1, 2, 3) です．

8.3.2　点と平面の距離



空間上の 1 点 A から平面 α に下ろした垂線の足を H とします．垂線の長さ AH を求める問題で H の座標に無関係に求める解法があります．それは，§§7.7.4 で，平面上における点と直線の距離の公式を求めた方法と実質的に同じです．導き方も同じです．

1 点を $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，平面を

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0,$$

垂線の足を H$(p,\ q,\ r)$ とすると，§§7.7.4 の導き方がほとんどそのまま使えます．

$$\mathrm{AH} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることを確かめるのは練習問題にしましょう．

なお，平面 α の法線ベクトルを $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ として，

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} = |\vec{\alpha}|\,|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|\,(\pm 1) = |\vec{\alpha}|\,h$$

とおくと，

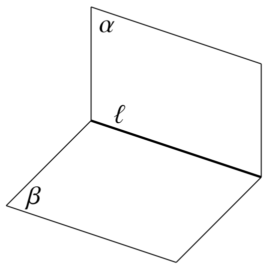
$$h = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (|h| = \mathrm{AH})$$

と表されます．このとき，点 A が平面 α から $\vec{\alpha}$ が向く側にあるときは $h > 0$，反対側にあるときは $h < 0$ となります．h は「平面 α から見た点 A の高さ」と呼ばれ，垂線の足 H の座標や点 A の平面 α に関する対称点などを求めるときに役立ちます．

8.3.3　直線を含む平面

平面を決定する問題で，平面が直線を含む場合があります．直線上の適当な 2 点を求めて，それらが平面上にあるとするのがこの問題の正攻法ですが，それではかなり手間がかかります．今の場合，直線の方程式が連立方程式であることを利用すると，巧妙な方法を見いだします．

一般の直線 $\ell : \dfrac{x-a}{l} = \dfrac{y-b}{m} = \dfrac{z-c}{n}$ で議論しましょう．直線 ℓ がどのような平面に含まれるかは，それを連立方程式の形



$$\ell : \begin{cases} \alpha : \dfrac{x-a}{l} - \dfrac{y-b}{m} = 0 \\ \beta : \dfrac{y-b}{m} - \dfrac{z-c}{n} = 0 \end{cases}$$

に表せばわかります．

こんなふうに表すと，直線 ℓ は α と β の方程式を同時に満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の集合として表されたことになります．このとき，直線 ℓ 上の全ての点 $(x,\ y,\ z)$ は，ℓ の方程式を満たすので，α と β の方程式も満たしますね．α と β は明らかに平面です．よって，‘ 直線 ℓ 上の全ての点は平面 α 上にも β 上にもある ’，つまり，‘ 直線 ℓ は平面 α にも β にも含まれる ’ ことになります．逆の言い方をすると，‘ α と β は直線 ℓ を含む 2 平面であり，それらの交わり（共通部分）として直線 ℓ を定めている ’ ということです．2 つの曲面の交わりを **交線** というので，直線を表す連立方程式は直線を 2 つの平面の交線として表したことになります．

上の連立方程式にはそれと同値な連立方程式が無数に存在します．そのことはちょっとした細工をすればわかります：

$$\ell : \begin{cases} \alpha : \dfrac{x-a}{l} - \dfrac{y-b}{m} = 0 \\ B : p\left(\dfrac{x-a}{l} - \dfrac{y-b}{m}\right) + q\left(\dfrac{y-b}{m} - \dfrac{z-c}{n}\right) = 0 \end{cases} \qquad (p,\ q\,(\fallingdotseq 0)\ \text{は実数})$$

平面 B の方程式の p の項は，α の方程式より $\dfrac{x-a}{l} - \dfrac{y-b}{m} = 0$ だから，無いのと同じです．よって，B の方程式は，α の方程式と連立する場合には，β の方程式に同値です．したがって，平面 α と平面 B の交線は直線 ℓ であり，平面 B は直線 ℓ を含むことになります．このように直線を連立方程式を用いて表す方法は 1 通りではありません．

この 1 通りでないことを逆手にとります．平面 B は（共には 0 でない）実数 $p,\ q$ の ‘ 任意の値に対して ’ 直線 ℓ を含みます．実際，直線 ℓ 上の全ての点は，任意の実数 $p,\ q$ に対して，B の方程式を満たします．その意味で，B は直線 ℓ を含む ‘ 平面の集団 ’ を表しています．そして，その集団は直線 ℓ を回転軸として平面 α や β を回転すると得られます．実数 $p,\ q$（の比）を定めて直線 ℓ を含む平面を決定するには，例えば，（ℓ 上にない）任意の 1 点を通るという条件をつけ加えればよいでしょう．

最後に練習問題をやりましょう．直線 $x = y = z$ を含み点 $(1,\ 0,\ 0)$ を通る平面を求めよ．ヒント：B の方程式を利用します．答は $y - z = 0$ ですね．

8.3.4　外積

ベクトルとベクトルの積が，内積の場合と異なり，再びベクトルになるような積の定義があり，それを「外積」といいます．

8.3.4.1　平面の法線ベクトル

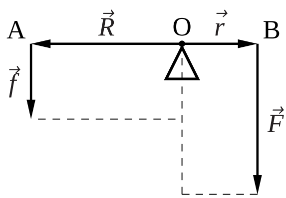
3 点 A，B，C を通る平面 α の法線ベクトル $\vec{\alpha}$ を求めるには，（ア）平面の方程式の一般形 $ax+by+cz+d=0$ に 3 点の座標を代入して a，b，c，d の比を決定し，$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とするか，（イ）$\vec{\alpha}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に直交するので，$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ などと未知のベクトルにしておいて，$\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から x，y，z の比を求めるかのどちらかでしょう．

どちらの方法も未知数が 3 個以上なので計算には手こずります．そこで，君たちの多くは（イ）の方法をより洗練した方法で実行するために,「外積」という‘ 2 つの空間ベクトルの両方に直交するベクトル ’の求め方を習うことでしょう．また，外積は，ベクトルの長さの定義と組み合わせると，空間上の三角形の面積や四面体の体積の計算などを容易にするのに役立ち，それはまさに受験対策のためにあると思われるような方法です．

外積は，しかしながら，そんな程度の低俗なレベルのもののために考え出されたのではなく，それは科学・技術の発展の中から生まれてきたことを知る必要があります．

8.3.4.2　シーソー

我々は，§§ 7.5.3 で，物体の各部に働く重力の合力は全てその重心に働くかのように扱ってよいことを見ました．その力は物体を回転させるものではありませんね．今度は‘ 物体を回転させる力 ’を調べてみましょう．



右図のシーソーの例で考えてみましょう．シーソーの端 A に子供が座りました．子供には重力 $\vec{f}$ が働くので，シーソーには中心 O の周りに左回り（反時計回り）に回転させる力が働きます．A と反対側の位置 B に大人が座りました．大人は重力 $\vec{F}$ を受け，シーソーに

は右回りに回転させる力が働きます．両者の回転させる力が釣り合うのはどんな場合でしょうか．君たちは，日常の経験から，「てこの原理」と呼ばれるその答を知っていますね．位置ベクトル $\vec{R}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いると，釣り合うのは

$$\left|\vec{R}\right|\left|\vec{f}\right|=\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|$$

が成り立つ場合ですね．これを図形的にいうと，$\vec{R}$ と $\vec{f}$ が作る長方形の面積が $\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る長方形の面積に等しい場合です．ただし，この条件は回転の向きについては触れていないので，真の釣り合いの条件ではないことに注意しましょう．

今の場合，（大人の例でいうと）位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ は直交しており，それらの長さの積 $\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|$ は「力のモーメント」と呼ばれます．力のモーメントは ‘ 回転を引き起こす力に直接関係する量 ’ として定義されました．残念ながら，この定義では，回転の向きを表すことができず，またそれらのベクトルが直交しない場合には適用できません．これらの事柄を考慮して，力のモーメントを一般化しましょう．

8.3.4.3　**回転の向きを表す力のモーメント**

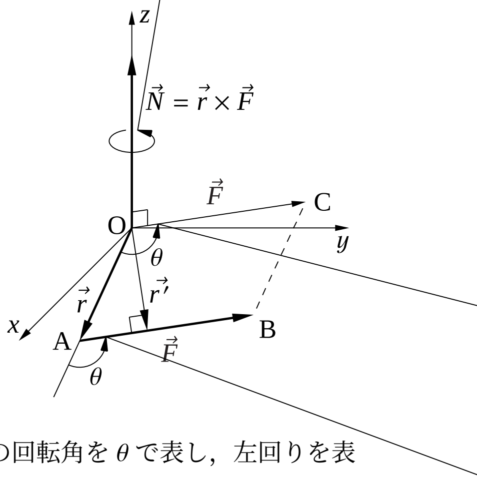
回転の向きを考慮し，また，位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ が直交しない場合も想定して，力のモーメントを一般化することを考えましょう．それは $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の ‘ ある種の積 ’ を力のモーメントと考えれば可能です．簡単な場合から始めましょう．

力が働いて物体が回転するとき，回転の中心となるのは，（ア）（シーソーのように固定された）回転軸か，（イ）物体の重心です．回転中心を原点 O として，xy 平面上の点 A を作用点とする xy 平面上の力 $\vec{F}$ が働いて回転を引き起こす場合を考えましょう（回転と関係のないことは無視します）．

一般には位置ベクトル $\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と力 $\vec{F}$ は直交しません．その場合，$\vec{r}$ の $\vec{F}$ に直交する成分を $\vec{r'}$ とすると，力のモーメントの大きさは，てこの原理より，$\left|\vec{r'}\right|\left|\vec{F}\right|$ で与えられます．この大きさは ‘ $\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る平行四辺形（次ページの図の▱OABC）の面積 ’ に等しくなりますね．

さて，力 $\vec{F}$ による回転の向きを考えましょう．回転中心は原点 O で，$\vec{r}$ と $\vec{F}$

は共に xy 平面上にあるとしているので，物体の回転軸は z 軸です．よって，‘ 回転軸は $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の両方に直交 ’ しています．このとき，回転の向きは（z 軸の正の方向から見て）右回りか左回りの 2 通りあります．どちらであるかは位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ の相対的な向きの関係で決まります．$\vec{r}$ を（180° 以内で）回転してその向きが $\vec{F}$ の向きと同じになるようにしましょう．その回転の向きは回転軸周りの回転の向きと同じですね．図の例は，その回転角を θ で表し，左回りを表すために回転角を表す弧に矢印をつけています．



この回転軸と回転の向きの情報を力のモーメントにとり入れましょう．それを行うにはネジの回転を考えるとよいでしょう．ネジを板に刺して ‘ 右回りに回す ’ とネジは進みますね．ネジを回転軸上においてみましょう．ただし，ネジの先は，$\vec{r}$ を $\vec{F}$ と同じ向きになるように回転したときに，ネジが進む向きにとります．このようにおかれたネジはベクトルの向きの性質をもちます．そこで，力のモーメントを一般化してベクトルに昇格させ，そのベクトルの向きを回転軸におかれたネジの向きにとりましょう．こうすることによって，力 $\vec{F}$ が引き起こす回転の向きを ‘ ベクトルとしての力のモーメント $\vec{N}$ ’ の向きに対応させることができるわけです．

$\vec{N}$ は，その大きさが $\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る平行四辺形の面積なので，今の向きの議論とあわせると，ベクトルとして完全に定義されたことになります．そこで，一般の位置ベクトル $\vec{r}$ と力のベクトル $\vec{F}$ に対して力のモーメント $\vec{N}$ を定義することができます．$\vec{N}$ は $\vec{r}$ と $\vec{F}$ から作られたので

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

と表し，$\vec{r} \times \vec{F}$ を $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の **外積** と呼ぶことにしましょう．外積 $\vec{r} \times \vec{F}$ は，その大きさが $\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る平行四辺形の面積に等しく，その向きは $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の両方に直交し，かつ $\vec{r}$ を回転して $\vec{F}$ に重なるようにネジを回転させたときにネジが進む方向と定めます．

先にシーソーのところで，子供と大人に働く重力による回転の働きの釣り合いを議論しました．力のモーメントの外積表現を用いると，外積 $\vec{R}\times\vec{f}$ と $\vec{r}\times\vec{F}$ は大きさが等しく，向きは反対のベクトルになるので，シーソーの釣り合いは

$$\vec{R}\times\vec{f}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}$$

のように表現できます．左辺の外積の和は全体の力のモーメントが各モーメントの和として表されることを意味します．

なお，力のモーメント $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ の議論において，力 $\vec{F}$ が k 倍になったとすると力のモーメントも k 倍になりますね．このことは，外積が実数倍について

$$\vec{r}\times(k\vec{F})=k(\vec{r}\times\vec{F})$$

の性質をもつことを意味します．これは k が負のときも成立します．

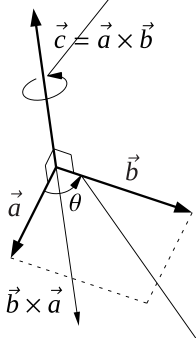
また，力 $\vec{F}$ に加えて力 $\vec{F}'$ が同じ点に働いた場合の全体の力のモーメントは，$\vec{r}\times\vec{F}+\vec{r}\times\vec{F}'$，または $\vec{F}$ と $\vec{F}'$ の合力を先に求めて，$\vec{r}\times(\vec{F}+\vec{F}')$ によって求められます．このことは，外積に対して，分配法則

$$\vec{r}\times(\vec{F}+\vec{F}')=\vec{r}\times\vec{F}+\vec{r}\times\vec{F}'$$

が成り立つことを要請しています．

8.3.4.4　**外積の演算法則**

力のモーメント $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ の話はひとまず終えて，一般のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ の演算法則を確認しましょう．それがわかると外積の表現，つまり成分表示ができるようになります．



外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は，その大きさが $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しく，その向きは $\vec{a}$ を $\vec{b}$ と同じ向きになるように回転したときにネジが進む方向であると定めましょう．この定義は外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交することを含みます．

外積は，力のモーメントのところで触れたように，実数倍について

$$\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$$

の性質をもち，また，分配法則

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

を満たします．これらの性質は外積の定義から直接導くこともできます．

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は同じものでしょうか．両ベクトルは，同じ長さで，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交します．しかしながら，$\vec{a}$ を $\vec{b}$ と同じ向きにする回転角を $+\theta$ とすると，$\vec{b}$ を $\vec{a}$ と同じ向きにする回転角は $-\theta$ です．よって，両者は向きが反対になり，外積は

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

という奇妙な性質をもつことがわかります．この性質は，君たちが初めて体験する‘ 交換法則が成り立たない例 ’です．

この性質を上述の外積の基本性質に適用すると，（ベクトルの記号を適当に変えて）

$$(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b}),\quad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が得られ，外積が関係する演算法則が完成します．

8.3.4.5　外積の成分表示

準備が整ったので，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の成分表示からそれらの外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の成分表示を求めましょう．

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

とすると，それらは，基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を用いて

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3,\quad \vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$$

と表されます．よって，$\vec{a}\times\vec{b}$ の計算は，外積の演算法則を用いて展開すると，基本ベクトルの外積計算に還元されますね．

例えば，基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ は，それぞれ，x 軸，y 軸の正の方向を向く長さ 1 のベクトルなので，外積 $\vec{e}_1\times\vec{e}_2$ は z 軸の正の方向を向く長さ 1 のベクトル，つまり $\vec{e}_3$ になりますね：$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3$．他の基本ベクトルの外積も同様に

考えて，

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$$

が得られます．

これらの結果を用いると，多少の単純な計算の後

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3\end{aligned}$$

が得られ，したがって，外積の成分表示

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

が得られます（確かめましょう）．

この成分表示を用いて外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に直交することを確かめることは内積を用いると簡単にできます．外積の大きさ $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しいことを確かめるには，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の作る三角形の面積 S が公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2}$$

で与えられることを用います．こちらのほうは結構大変ですが，確かめることを勧めます．

8.3.4.6　外積の応用

外積の成分表示は覚えにくいので，まず，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の外積を簡単に計算する方法から始めましょう．次ページの表にあるように，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の成分を縦に並べます．ただし，y，z，x，y 成分の順で y 成分は二度書きます．次に y，z

成分の積を表の実線や破線の組合せで計算します．実線の積 a_2b_3 から破線の積 a_3b_2 を引いた数が $\vec{a}\times\vec{b}$ の x 成分 $a_2b_3-a_3b_2$ になります．このように一見奇妙な計算になったことは $\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1$，$\vec{e}_3\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1$ に起因します．他の成分についても同様にして外積の成分表示が得られます．

$$\begin{array}{cccc} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{a}\times\vec{b} \\ y: & a_2 & b_2 & \\ & & & a_2b_3-a_3b_2 \\ z: & a_3 & b_3 & \\ & & & a_3b_1-a_1b_3 \\ x: & a_1 & b_1 & \\ & & & a_1b_2-a_2b_1 \\ y: & a_2 & b_2 & \end{array}$$

では，練習です．$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ を求めよ．答は $\begin{pmatrix}-5\\10\\-5\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ですね．

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさが $\vec{a}$，$\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しいことから，空間の三角形の面積の公式が得られます．$\triangle$ABC の面積は

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|.$$

君たちが外積を利用するのは，ほとんどの場合，平面の法線ベクトルを求めるときか三角形の面積を求めるときでしょう．

最後に挑戦問題です．四面体 ABCD の体積 V は，外積と内積を用いて

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$$

と表されることを示せ．ノーヒントです．本気でやってみよう．