第 13 章　微分－発展編

§13.1　ロピタルの定理

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が $f(a) = 0$，$g(a) = 0$ となるとき，それらの関数の商の極限について非常に有用な定理

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

があります．以下，かなり厳密な議論に基づいてそれを導きましょう．

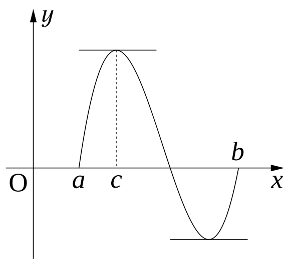
13.1.1　平均値の定理

13.1.1.1　ロルの定理

まずは，16 世紀のフランスの数学者ロル（Michel Rolle，1652～1719）が証明したごく当たり前の定理，**ロルの定理** から始めましょう：

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能なとき，
$f(a) = f(b) = 0$ ならば $f'(c) = 0$ を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．

（ロルの定理）



この定理は，両端で 0 になる関数のグラフについて，接線の傾きが 0 になる点が開区間 $(a,\ b)$ 上に少なくとも 1 個は必ずあることを述べています．右図を見れば，証明の必要があるのかと思われるほどに明らかですね．ただし，図を利用するなどの素朴な議論は，§§1.5.1 で議論したように，首尾一貫しているという保証がありません．教育的配慮もかねて，公理に基づいた厳密な議論をしてみましょう．以下の証

明は，グラフにまったく頼ることなく，完全に論理的に進められます．なお，'開区間 $(a,\ b)$ で微分可能' としたのは，区間の境界 $x = a,\ b$ で微分できない（右微分または左微分のみ可能）ためです．

まず，$f(x)$ が恒等的に 0，つまり $f(x) = 0\ (a \leqq x \leqq b)$ ならば，$f'(x)$ は恒等的に 0 ですから，全ての $c\ (a < c < b)$ で $f'(c) = 0$ です．

$f(x)$ が恒等的に 0 でないときは，$f(x)$ の値が正または負になるところがあります．そこで，$f(x) > 0$ となるところがある場合を考えましょう．その場合，$f(x)$ が最大となる $c\ (a < c < b)$ があります．$f(c)$ が最大値であること，および $f(x)$ が c で微分可能 $(f'(c) = f'(c+0) = f'(c-0))$ であることを利用して，$f'(c) = 0$ を示します．c で最大ですから，$\varDelta x > 0$ のとき，区間 $[c,\ c+\varDelta x]$ における $f(x)$ の平均変化率は非正です（※ 平らな場合も考える）：

$$\frac{f(c+\varDelta x) - f(c)}{\varDelta x} \leqq 0.$$

よって，右微分係数 $f'(c+0)$ は

$$f'(c+0) = \lim_{\varDelta x \to +0} \frac{f(c+\varDelta x) - f(c)}{\varDelta x} \leqq 0$$

となります．一方，$\varDelta x < 0$ のとき，区間 $[c+\varDelta x,\ c]$ における $f(x)$ の平均変化率は非負：

$$\frac{f(c+\varDelta x) - f(c)}{\varDelta x} \geqq 0.$$

よって，

$$f'(c-0) = \lim_{\varDelta x \to -0} \frac{f(c+\varDelta x) - f(c)}{\varDelta x} \geqq 0$$

が得られます．以上の議論から，

$$0 \leqq f'(c-0) = f'(c) = f'(c+0) \leqq 0, \quad \text{よって} \quad f'(c) = 0$$

が成り立ちます．（どうです．こんな議論なら文句のつけようがないでしょう）．$f(x) < 0$ となる区間がある場合は，$f(x)$ が最小となる $c\ (a < c < b)$ が存在し，上の場合と同様に，

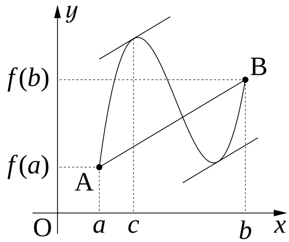
$$0 \geqq f'(c-0) = f'(c) = f'(c+0) \geqq 0, \quad \text{よって} \quad f'(c) = 0$$

が成り立ちます（練習問題として，やってみましょう）．

13.1.1.2　平均値の定理

ロルの定理から，**平均値の定理** が導かれます：

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能なとき，
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ を満たす $c\ (a<c<b)$ が存在する．（平均値の定理）



この定理を証明するために，2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る直線の方程式

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

を利用しましょう．関数 $f(x)$ とこの直線の式との差を

$$F(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

とおくと，$F(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能な関数で，

$$F(a)=F(b)=0$$

が成り立ち，$F(x)$ はロルの定理が成立するための条件を満たします．したがって，ロルの定理より $F'(c)=0$ を満たす $c\ (a<c<b)$ が存在します．よって，

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\ \Leftrightarrow\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たす $c\ (a<c<b)$ が存在し，平均値の定理が示されました．

平均値の定理の意味は，関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，開区間 $(a,\ b)$ にある曲線上のある点で，その点における接線の傾きが区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と一致するような点があることですね．

では，ここで練習問題です．関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で恒等的に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は定数になることを示せ．ヒント：閉区間 $[a,\ b]$ 上の任意の x に対して，閉区間 $[a,\ x]$ で平均値の定理を適用します．$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$ を満たす $c\ (a<c<x)$ が存在しますね．平均値の定理の式に $f(x)$ を巻き込むのがミソです．

13.1.1.3　コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理を直接導くのに用いられるのは，フランスの数学者コーシー（Augustin Louis Cauchy，1789〜1857）による，**コーシーの平均値の定理** といわれるものです：

関数 $f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ を満たす } c\ (a < c < b) \text{ が存在する．}$$

（コーシーの平均値の定理）

この定理は $g(x) = x$ の特別な場合として平均値の定理を含みます．

この定理を証明するには，ロルの定理が利用できるように，平均値の定理の場合と同様

$$F(x) = \{g(b) - g(a)\}\{f(x) - f(a)\} - \{f(b) - f(a)\}\{g(x) - g(a)\}$$

とおきます．こうすると，$F(a) = F(b) = 0$ が成り立ちますね．よって，

$$F'(c) = \{g(b) - g(a)\}f'(c) - \{f(b) - f(a)\}g'(c) = 0$$

を満たす $c\ (a < c < b)$ が存在しますね．注意すべき点は $g(b) - g(a) \neq 0$ を示さないといけないことです．$g'(x) \neq 0$ の条件は開区間 $(a,\ b)$ の全ての x に対して成り立ちます．よって，平均値の定理より $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c')$ を満たす $c'\ (a < c' < b)$ が存在して，$g'(c') \neq 0$ ですから，$g(b) - g(a) \neq 0$ ですね．

13.1.2　ロピタルの定理

13.1.2.1　ロピタルの定理の基本形

さて，いよいよロピタル（Guillaume F.A.M. de L'Hôpital，1661〜1704，フランス）の名を冠する **ロピタルの定理** です：

関数 $f(x)$, $g(x)$ は a を含む区間で連続で, 高々 a を除いて微分可能で, $g'(x) \neq 0$ であり，$f(a) = g(a) = 0$ のとき， 有限な極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \text{（ロピタルの定理Ⓐ）}$$

こんな定理が成立しても特に不思議ではないことは，$f'(a)$，$g'(a)$ が存在して $g'(a) \fallingdotseq 0$ のとき，$x = a + \varDelta x$ とおくと $x \to a \Leftrightarrow \varDelta x \to 0$ で，$f(a) = g(a) = 0$ だから，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{g(a+\varDelta x)-g(a)} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\dfrac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}}{\dfrac{g(a+\varDelta x)-g(a)}{\varDelta x}}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

が成り立つことから納得がいくと思います．ロピタルの定理の重要な点は‘$f'(a)$，$g'(a)$ が存在しない場合でも成立する’ことです．

$a < x$ と $x < a$ の場合に分けて考えましょう．閉区間 $[a, x]$ でコーシーの平均値の定理を適用すると，$f(a) = g(a) = 0$ に注意して，

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x')}{g'(x')}$$

を満たす x' $(a < x' < x)$ があります．ここで，$x \to a+0$ のとき $x' \to a+0$ で，このとき

$$\lim_{x'\to a+0}\frac{f'(x')}{g'(x')} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

なので

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立ちます．同様に，閉区間 $[x, a]$ でコーシーの平均値の定理を適用して，

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が得られます（確かめましょう）．

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する場合を考えているので，

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{よって} \quad \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

が成り立ち，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が得られます．

この定理が受験生に重宝がられる理由を練習問題で見てみましょう．既に学んだ公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ をロピタルの定理を用いて確かめよ．ヒント：ロピタルの定理は繰り返し用いても構いません．

13.1.2.2　ロピタルの定理の発展形 1

ロピタルの定理Ⓐで，a を無限大にした場合も成立します：
関数 $f(x)$，$g(x)$ は十分大きな全ての x について微分可能で，
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ のとき，有限な極限値 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\qquad\text{（ロピタルの定理Ⓑ）}$$

証明は，上式で $x=\dfrac{1}{t}$ とおいて，合成関数の微分法を用いればよいのですが，微妙な点があるので丁寧に導きましょう．t の関数 $F(t)$，$G(t)$ が閉区間 $[0,\ b]$ で連続で, 開区間 $(0,\ b)$ で微分可能で, $G'(t)\neq 0$ のとき, $F(0)=G(0)=0$ ならば，ロピタルの定理Ⓐを導いたときと同様にして，

$$\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{dF(t)}{dt}}{\dfrac{dG(t)}{dt}}$$

を得ます．ここで，$F(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$，$G(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ とおいて，$x=\dfrac{1}{t}$ とすると

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{df(x)}{dt}}{\dfrac{dg(x)}{dt}}=\lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{df(x)}{dx}\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{dg(x)}{dx}\dfrac{dx}{dt}}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\text{よって}\quad\lim_{t\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が得られます．ここで，$t\to+0$ のとき $x\to+\infty$ だから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立ちます.

同様に，ロピタルの定理Ⓐで a を負の無限大にした場合も成立します．ロピタルの定理Ⓑの導き方と同じなので挑戦してみましょう.

では，練習問題です.

$$\lim_{x\to\infty} x^n \sin^n \frac{1}{x}$$

を求めよ.

$$与式 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^n \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^n = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^n$$

だから，ロピタルの定理Ⓑより

$$与式 = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\sin\frac{1}{x}\right\}'}{\left\{\frac{1}{x}\right\}'}\right)^n = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\,(-x^{-2})}{-x^{-2}}\right)^n = \left(\frac{\cos 0}{1}\right)^n = 1^n = 1.$$

13.1.2.3　**ロピタルの定理の発展形** 2

ロピタルの定理Ⓐで $f(a)$，$g(a)$ が正または負の無限大のときも成立します：関数 $f(x)$，$g(x)$ は a を含む区間で，a を除いて微分可能で，$g'(x) \neq 0$ であり，$|f(x)| \to \infty$，$|g(x)| \to \infty \quad (x \to a)$ のとき，有限な極限値 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \text{（ロピタルの定理Ⓒ）}$$

証明は少々巧妙です．閉区間 $[x, y]$ $(a < x < y)$，または，$[y, x]$ $(y < x < a)$ でコーシーの平均値の定理を適用し，$x \to a$ の極限，続いて $y \to a$ の極限を考えます.

まず,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$
$$= \left\{1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right\}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

と変形しておきます．コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(x')}{g'(x')}$$

を満たす x' ($a < x < x' < y$，または，$y < x' < x < a$) が存在します．よって，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right\}\frac{f'(x')}{g'(x')} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < x' < y,\ \text{または，}\ y < x' < x < a)$$

が成り立ちます．ここで，$x \to a$ のとき $|g(x)| \to \infty$ なので，

$$\frac{g(y)}{g(x)} \to 0, \qquad \frac{f(y)}{g(x)} \to 0 \qquad (x \to a)$$

となり，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x')}{g'(x')} \qquad (a < x < x' < y,\ \text{または，}\ y < x' < x < a)$$

が得られます．次に，上式で $y \to a$ の極限を考えますが，左辺は y に依存しないので，右辺のみに関係します．$y \to a$ のとき，$a < x' < y$ より $x' \to a$ なので

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to a}\lim_{x\to a}\frac{f'(x')}{g'(x')} = \lim_{x'\to a}\frac{f'(x')}{g'(x')} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が得られ，$|f(x)| \to \infty$，$|g(x)| \to \infty \quad (x \to a)$ のときも

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立します．（より厳密な議論をするには，先ほどの等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right\}\frac{f'(x')}{g'(x')} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < x' < y,\ \text{または，}\ y < x' < x < a)$$

において，$\dfrac{g(y)}{g(x)} \to 0$，$\dfrac{f(y)}{g(x)} \to 0$ を満たすような同時極限操作 $x \to a$ かつ $y \to a$ を行います．これは，x が a に近づく速さを y が a に近づく速さよりも十分に速くすれば可能です．このとき，$x' \to a$ です.）

このロピタルの定理Ⓒは a が正または負の無限大になるときも成立します．ロピタルの定理Ⓑ,Ⓒの導出方法を参考にしてその証明に挑戦するとよいでしょう．

なお，ロピタルの定理は $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が正または負の無限大のときも成立することが示されます．これは $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ と同じですから，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ についてのロピタルの定理を考えると納得がいくでしょう．

では，練習問題です．$\lim_{x\to 0} x\log|x|$ を求めよ．ヒント：分数形に直しましょう．答は 0 です．なお，この問題では $f'(a)$，$g'(a)$ に当たるものが存在しない場合であることに注意しましょう．同様にして，重要な定理

$$\lim_{x\to +0} x^{\alpha}\log x = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

を示しましょう．α は任意に小さい正数で構いません．$x \to +0$ のとき $\log x$ は非常にゆっくりと負の無限大に発散することがわかります．

§13.2　テイラーの定理と関数の近似式

関数電卓で $\sin 10^\circ$ と打つと，あっという間に 0.173648177 などと出てきますね．有効数字が 32 桁の答 0.17364817766693034885171662676931 もパソコンの電卓を使うと訳(わけ)はありません．関数を実用する際には近似計算が欠かせません．近似計算の原理を学びましょう．

13.2.1　高次導関数

関数 $f(x)$ の微分係数の定義

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \qquad (x = a+\Delta x)$$

より，a の近傍で

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \fallingdotseq f'(a) \iff f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)$$

が成り立ち，$f(x)$ が関数値 $f(a)$ と微分係数 $f'(a)$ を用いて近似されます．実際, 平均値の定理 $f(x)-f(a) = f'(c)(x-a)$（c は a と x の間）から，$f'(c) \fallingdotseq f'(a)$ のときはよい近似であることがわかります．

さらに，近似を望む精度に高める方法があります．その原理は平均値の定理を一般化した「テイラーの定理」にあり，$f(x)$ を何度も微分した **高次導関数**（高階導関数）の知識が必要になります．まずは，高次導関数を学びましょう．

関数 $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x) = \{f'(x)\}'$ については既に学びました．$f''(x)$ がさらに微分可能なときは 3 次・4 次・$\cdots$・n 次導関数が存在します．関数

$y = f(x)$ が n 回まで微分可能なとき，$f(x)$ は ***n* 回微分可能** であるといい，$f(x)$ の n 次導関数を記号

$$y^{(n)}, \qquad f^{(n)}(x), \qquad \{f(x)\}^{(n)}, \qquad \frac{d^n y}{dx^n}, \qquad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \qquad \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

などで表します．記号 $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ は, y' を $\dfrac{dy}{dx}$ と書いたのと同様に, $\dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{d}{dx}\cdots\dfrac{dy}{dx}$ の意味で書いたものと思われます．なお，統一的な記述のために，$f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$ なども用いましょう．

例として x^α（α は実数）の n 次導関数を求めてみましょう．$\{x^\alpha\}' = \alpha x^{\alpha-1}$, よって 2 次導関数は $\{x^\alpha\}^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \cdots$，ですから

$$\{x^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

ですね.

13.2.2　テイラーの定理

13.2.2.1　テイラーの定理

一般の n 次の多項式は，常に

$$f(x) = a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + a_1(x-a) + a_0$$

の形に書くことができます．実際，$f(x)$ を $(x-a)^n$ で割り，次に，その余りを $(x-a)^{n-1}$ で割り，$\cdots$ と続けていくと，上の形が得られます．このとき，係数 a_0，$a_1, \cdots$，a_n を高次の微分係数 $f^{(k)}(a)$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ を用いて表すことができます.

まず，$f(a) = a_0$．次に，

$f'(x) = na_n(x-a)^{n-1} + (n-1)a_{n-1}(x-a)^{n-2} + \cdots + 2a_2(x-a) + a_1$

より，$f'(a) = a_1$.

$f''(x) = n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}(x-a)^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2a_3(x-a) + 2a_2$

より，$f''(a) = 2a_2$.

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) =& n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}(x-a)^{n-4} + \cdots \\ &+ 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-a) + 3\cdot 2a_3 \end{aligned}$$

より，$f^{(3)}(a) = 3!a_3$．これを続けていって，

$$f^{(k)}(a) = k!\,a_k \iff a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n)$$

であることがわかります $(0! = 1)$．よって，n 次の多項式については

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots + f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

のように表示できます．ただし，$(x-a)^0 = 1$ です．

練習しておきましょう．$f(x) = x^3$ を上の形に直せ．ヒント：$f'(x) = 3x^2$，$f''(x) = 6x$，$f^{(3)}(x) = 6$ ですね．よって，答は

$$f(x) = (x-a)^3 + 3a(x-a)^2 + 3a^2(x-a) + a^3$$

ですね．右辺を展開して x^3 に戻ることを確認しましょう．

テイラーの定理 は，平均値の定理を一般化し，一般の関数についても上の表示と類似のものが成り立つことを示します：

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で n 次導関数が連続で，
開区間 $(a,\ b)$ で $n+1$ 回微分可能ならば，

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．　　　　（テイラーの定理）

$n = 0$ のとき，この定理は平均値の定理に戻りますね．

テイラーの定理の証明は，

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{p}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (*)$$

と仮定してみたとき，

$$p = f^{(n+1)}(c) \qquad (a < c < b)$$

であることを示せば済みます．

そのために，平均値の定理の場合と同様，ロルの定理を用いましょう．今度は

$$F(x) = f(b) - \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{p}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \right\}$$

とおくと，$(*)$ より

$$F(a) = F(b) = 0$$

が成り立ちます（$(b-x)^0 = 1$ に注意）．よって，ロルの定理より

$$F'(c) = 0 \qquad (a < c < b)$$

を満たす c が存在します．

さて，$F'(x)$ を計算して上の条件 $F'(c) = 0$ を役立てましょう．以下の計算で，$k = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$ のとき $l = k-1$ とおくと，$l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ です．

$$\begin{aligned} -F'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{p}{n!}(b-x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(x)}{l!}(b-x)^l - \frac{p}{n!}(b-x)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{p}{n!}(b-x)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x) - p}{n!}(b-x)^n. \end{aligned}$$

よって，$F'(c) = 0$ より $p = f^{(n+1)}(c)$ が得られ，定理は証明されました．

テイラーの定理は，$a > b$ のときでも，$a > c > b$ とすれば成り立ちます．証明の過程を見直して確かめましょう．

（テイラーの定理）の表現では，$b = x$ とか $b = a + h$ とおいた形もよく用いられます．また，$c = a + \theta(b-a)$ $(0 < \theta < 1)$ が成り立つので，c の代わりに θ を用いることもあります．

特に $a = 0$ の場合は **マクローリン[1]の定理** とも呼ばれます：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1). \tag{M}$$

この表示では，$b = x$ とおいて，$a = 0$ より $c = \theta b = \theta x$ を用いました．

[1] Colin Maclaurin, 1698〜1746，イギリス．

テイラーの定理やマクローリンの定理に現れる最後の項は **剰余項** といわれ，関数の近似の誤差を評価する際に重要になります．

13.2.2.2　剰余項の別表現

テイラーの定理：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}, \qquad R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

（c は a と x の間）の剰余項

$$R_{n+1} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{$**$}$$

は重要なので，その別表現を調べておきましょう．上式より R_{n+1} は，x を固定したとき a の関数と見なすことができるので，$F(a) = R_{n+1}$ とおきましょう．

関数 $F(a)$，$G(a) = x - a$ にコーシーの平均値の定理を適用します．$F(x) = 0$，$G(x) = 0$ に注意すると

$$\frac{F(a) - F(x)}{G(a) - G(x)} = \frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F'(c')}{G'(c')} \qquad \text{（c' は a と x の間）}$$

より，

$$F(a) = -F'(c')(x-a) \qquad \text{（c' は a と x の間）}$$

となるので，($**$) を用いて $F'(c')$ を求めましょう．テイラーの定理の証明のときと同様にして，

$$F'(a) = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が得られます（確かめましょう）．よって，$c' = a + \theta'(x-a)$ $(0 < \theta' < 1)$ とおくと，$x - c' = (1-\theta')(x-a)$ だから，

$$F'(c') = -\frac{f^{(n+1)}(c')}{n!}\{(1-\theta')(x-a)\}^n.$$

よって，「コーシーの剰余項」と呼ばれる，剰余項の別表現

$$R_{n+1} = F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c')}{n!}(1-\theta')^n(x-a)^{n+1} \tag{Rc}$$

($c' = a + \theta'(x-a)$，$0 < \theta' < 1$) が得られます．この表現は対数関数の近似を考えるときに用いられます．

13.2.3　関数の n 次式近似と関数電卓の原理

13.2.3.1　近似と誤差

簡単のために，マクローリンの定理 (M)：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

を用いて，それから剰余項をとり除いて得られる，関数 $f(x)$ の‘ n 次の近似式 ’

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

を議論しましょう．重要な点は，上の近似式は整式であり，‘ 整式はいくらでも精度よく計算できる ’ ことです．マクローリンの定理 (M) の剰余項は整式ではなく，その絶対値

$$\varepsilon_{n+1}(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

は近似の **誤差** といわれます．

誤差 $\varepsilon_{n+1}(x)$ の大きさを評価しましょう．分母 $(n+1)!$ は n が大きくなると急速に増大します．$|x| < m$（m は自然数）とすると，

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{|x|}{m} \cdot \frac{|x|}{m+1} \cdot \cdots \cdot \frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{|x|}{m} \right)^{n-m+2}$$

が成り立つので，十分に大きな n をとれば $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ は十分に小さくなります．よって，$|f^{(n+1)}(\theta x)|$ が n の増加と共に急速に増大することがない場合には，十分に大きな n に対して，誤差 ε_{n+1} は十分に小さくなることが期待されます．

誤差 ε_{n+1} は未知の θ を含むのでその大きさを精確に評価することはできず，実用上は，ε_{n+1} より大きな **誤差の限界** と呼ばれる計算可能な量 δ_{n+1} を考え，それを誤差の代用とします．

誤差の限界 δ_{n+1} が十分に小さいと評価できる場合には，関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

は十分に意味があります．実用上，上の表式に誤差の限界 δ_{n+1} をつけて

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\pm\delta_{n+1}$$

のように書くこともあります．

13.2.3.2　指数関数の近似

指数関数 $f(x)=e^x$ の近似を考えましょう．マクローリンの定理 (M) で，$f^{(k)}(x)=e^x$ だから

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

が得られます．誤差の限界 δ_{n+1} は $e^{\theta x}<e^{|x|}$ より，例えば

$$\delta_{n+1}=\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|\,x\,|^{n+1}$$

のようにとると評価できます．$n>>|\,x\,|$ のとき，δ_{n+1} は十分に小さくなりますね．

$x=1$ として，対数の底 e の近似

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\pm\delta_{n+1}$$

を評価してみましょう．この場合，$\delta_{n+1}=\dfrac{e}{(n+1)!}$ ですが，$e=2.718\cdots<3$ なので，誤差の限界を

$$\delta_{n+1}=\frac{3}{(n+1)!}$$

と評価しましょう．ちなみに $n=10$ のとき，つまり始めの 11 項を計算すると，$\delta_{n+1}\fallingdotseq 7.5\times10^{-8}$ なので，上の近似式は $n=10$ のとき有効数字が少なくとも 7 桁の精度で e の近似値を与えます．実際，$e\fallingdotseq\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{k!}$ で計算すると $e\fallingdotseq 2.718281801\cdots$ が得られ，知られている値 $e=2.7182818284590\cdots$ と比べると有効数字 8 桁の精度で一致しますね．δ_{n+1} は n の増加と共に急速に 0 に近づいていくことに注意しましょう．

13.2.3.3　三角関数の近似

$f(x) = \sin x$ のとき，マクローリンの定理 (M)：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

を用いて，近似式を求めましょう．

$\{\sin x\}' = \cos x$，$\{\cos x\}' = -\sin x$ より，$f^{(0)}(x) = \sin x$，$f^{(1)}(x) = \cos x$，$f^{(2)}(x) = -\sin x$，$f^{(3)}(x) = -\cos x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$，$\cdots$ となるので

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^l \sin x & (k = 2l) \\ (-1)^l \cos x & (k = 2l+1) \end{cases} \qquad (l = 0,\ 1,\ 2, \cdots).$$

よって，

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k = 2l) \\ (-1)^l & (k = 2l+1) \end{cases} \qquad (l = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

が得られます．

k が偶数のとき $f^{(k)}(0) = 0$ なので，マクローリンの定理 (M) で n を $2n-1$ に置き換えると，

$$\sin x = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} + \frac{(-1)^n \sin \theta x}{(2n)!} x^{2n} \qquad (0 < \theta < 1)$$

が得られます．よって，誤差 ε_{2n} は

$$\varepsilon_{2n} = \frac{|\sin \theta x|}{(2n)!} |x|^{2n}$$

となります．誤差の限界 δ_{2n} については，$|\sin \theta x| \leqq 1$，および，$\sin x$ の周期が 2π なので $-\pi \leqq x \leqq \pi$ と制限でき，x に依存しない形で

$$\varepsilon_{2n} \leqq \frac{1}{(2n)!} \pi^{2n} = \delta_{2n}$$

とすることができます．

$n = 10$ のとき，

$$\delta_{20} \fallingdotseq 3.6 \times 10^{-9}$$

となるので，この近似は有効数字が少なくとも 8 桁の精度になります．

$\cos x$ についても，同様に

$$\cos x = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} + \frac{(-1)^{n+1} \sin \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

となることが示されます．それは君の仕事にしましょう．符号に注意．最後の項から誤差の限界は，$\sin x$ の場合と同様にして，

$$\delta_{2n+1} = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

とできます．

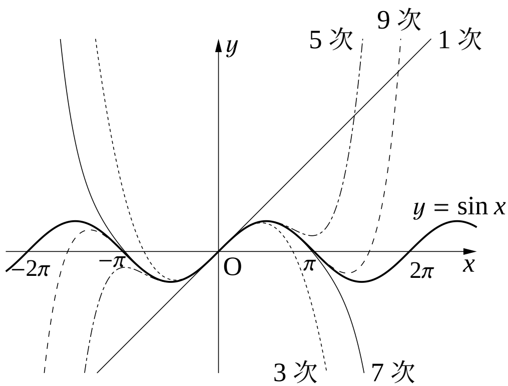
$n = 25$ のとき，つまり 26 項を計算すると，誤差の限界は $\delta_{51} \fallingdotseq 1.46 \times 10^{-41}$ ほどの微々たるものになります．

ここで，関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

を直接用いて，$f(x)$ が n と共に近似されていく様子を見てみましょう．例として，三角関数をとりましょう：

$$\sin x \fallingdotseq \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} = f_{2n-1}(x), \qquad \varepsilon_{2n} = \frac{|\sin \theta x|}{(2n)!} |x|^{2n}.$$



まず，$f_1(x) = x$ ですが，図からわかるように，これは 1 次式によって $\sin x$ を原点付近で近似しようというわけですから，$x = 0$ での接線にならざるを得ませんね．次に，$f_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ は 3 次式ですから，$x \fallingdotseq 0$ 付近での近似がよくなり，また近似の範囲も広がります．7 次の近似 $f_7(x)$ になると，区間 $[-\pi, \pi]$ においては肉眼ではもう $\sin x$ と区別がつきませんね．これらの様子は誤差の式 $\varepsilon_{2n} = \frac{|\sin \theta x|}{(2n)!} |x|^{2n}$ からもわかるように，x を定めればそこでの近似は近似式の次数と共によくなっていき，また近似できる範囲もその次数と共に広がっていきますね．

13.2.3.4　対数関数の近似

対数関数の近似は注意が要ります．議論がしやすいように

$$f(x) = \log(1+x) \qquad (-1 < x)$$

としましょう．$f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$, $\cdots$ だから，$f^{(0)}(0) = 0$ および

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \qquad (k \geqq 1)$$

が得られます．

よって，マクローリンの定理 (M) より，

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)\end{aligned}$$

が得られます．

今の場合，上式の剰余項の絶対値，つまり誤差 ε_{n+1} については，$r = \dfrac{x}{1+\theta x}$ とおくと，$|r| > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|r|^{n+1}}{n+1} = \infty$$

だから，n が大きくなるとき，全ての $x(> -1)$ について誤差が小さくなるとは限りません．よって，$n \to \infty$ のとき $\varepsilon_{n+1} \to 0$ となるための条件は $|r| \leqq 1$ です．その x の範囲は，$x > -1$，$0 < \theta < 1$ より $1 + \theta x > 0$ に注意すると，

$$-1 \leqq \frac{x}{1+\theta x} \leqq 1 \iff -1 - \theta x \leqq x,\ x \leqq 1 + \theta x \iff \frac{-1}{1+\theta} \leqq x \leqq \frac{1}{1-\theta}$$

となります．

θ は x に依存するので上の不等式を正確には解けませんが，$0 < \theta < 1$ を利用すると，n が大きいとき誤差 ε_{n+1} が小さくなるための‘ 安全な x ’の範囲が得られます．$0 < \theta < 1$ より

$$1 < 1 + \theta < 2 \iff 1 > \frac{1}{1+\theta} > \frac{1}{2} \iff -1 < \frac{-1}{1+\theta} < -\frac{1}{2}.$$

同様にして,

$$1 < \frac{1}{1-\theta} < +\infty$$

が得られるので（確かめましょう）,

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$$

ならば確実に ε_{n+1} が小さくなることがわかります.

先に議論したコーシーの剰余項 (Rc) を用いるとこの範囲を $-1 < x \leqq 1$ まで広げることができます．マクローリンの定理 (M) と (Rc) より，一般に

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta' x)}{n!} (1-\theta')^n x^{n+1} \qquad (0 < \theta' < 1)$$

のように表されます．$f(x) = \log(1+x)$ については，コーシーの剰余項は

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+\theta' x)^{n+1}} (1-\theta')^n x^{n+1}$$

となり，よって，誤差 ε_{n+1} は

$$\varepsilon_{n+1} = |R_{n+1}| = \frac{1}{1-\theta'} \left| \frac{(1-\theta')x}{1+\theta' x} \right|^{n+1}$$

となります.

$\varepsilon_{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる条件は，$-1 < x$, $0 < \theta' < 1$ より,

$$-1 < \frac{(1-\theta')x}{1+\theta' x} < 1 \iff -1-\theta' x < (1-\theta')x < 1+\theta' x$$

となります．$-1-\theta' x < (1-\theta')x$ から $-1 < x$ が得られます．$(1-\theta')x < 1+\theta' x$ については，$-1 < x \leqq 0$ のときは満たされています．$x > 0$ のときは

$$(1-\theta')x < 1+\theta' x \iff (1-2\theta')x < 1$$

より，$1-2\theta' < 0$ なら満たされているので，$1-2\theta' > 0$，つまり $\theta' < \frac{1}{2}$ なら

$$x < \frac{1}{1-2\theta'}$$

で，$0 < \theta' < \frac{1}{2}$ より $1 < \frac{1}{1-2\theta'}$ となるので，$x \leqq 1$ が得られます．よって，$-1 < x \leqq 1$ のとき $\varepsilon_{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ となります.

範囲 $-1 < x \leqq 1$ はこれ以上広げられません．実際，n 次近似

$$\log(1+x) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

において，$|x| > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

は発散し，よって近似式も n と共に発散します．$x = -1$ のときは，$\log(1+x)$ の導関数そのものが存在しないので，マクローリンの定理が成り立ちません．

点 $x = -1$ は原点から 1 の距離にあって，$|x| < 1$ のとき $\log(1+x)$ の剰余項 R_{n+1} は $n \to \infty$ で消滅し，n 次近似はいくらでも大きな n についても成立するというわけです．一般に，x を複素数としたとき，複素数の関数 $f(x)$ の原点から最も近い微分不可能な複素数点を α とすると，$|x| < |\alpha|$ のとき $R_{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ となることが知られています．それは大学の講義で習います．

§13.3　関数の無限級数表示

13.3.1　無限級数表示

指数関数や三角関数の n 次式近似において，誤差 ε_{n+1} は $n \to \infty$ の極限で 0 になることがわかりました．また，対数関数 $\log(1+x)$ については $-1 < x \leqq 1$ のときそうなりました．一般に，テイラーの定理

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間})$$

より，関数 $f(x)$ が無限回微分可能で，$|x-a| < R$ のとき，$n \to \infty$ で誤差 ε_{n+1} が消滅するならば，つまり

$$\varepsilon_{n+1} = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つならば，$f(x)$ はべきの形の無限級数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (|x-a| < R) \qquad \text{（テイラー展開）}$$

の形に表すことができますね．この表式を関数 $f(x)$ の **テイラー展開** または **テイラー級数** といいます．特に $a = 0$ の場合

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (|x| < R) \qquad \text{（マクローリン展開）}$$

を **マクローリン展開** またはマクローリン級数といいます．

無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ に対して，その導関数は「項別微分の定理」といわれる

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) \tag{P$_\infty$}$$

によって計算できます．この定理が成立するための条件は $f'_k(x)$ の存在と無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ の収束です．その証明には積分の知識が必要なので，それは積分の章で行うことにして，ここではその定理 (P$_\infty$) を前もって利用しましょう．

13.3.2　指数関数・三角関数の無限級数表示

§§13.2.3.2 指数関数の近似で議論したように，指数関数は

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

と表されました．§§13.2.3.1 の近似と誤差のところで議論したように，$|x| < m$（m は自然数）のとき，

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{|x|}{m} \cdot \frac{|x|}{m+1} \cdot \cdots \cdot \frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{|x|}{m}\right)^{n-m+2}$$

だから，剰余項 R_{n+1} については

$$|R_{n+1}| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{\theta x} |x|^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{|x|}{m}\right)^{n-m+2} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立ちます．よって，全ての実数 x について，指数関数のマクローリン展開

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (|x| < \infty)$$

が成立します．

この表式は‘指数関数を無限べき級数で定義した’とも解釈することができます．事実，この表式から項別微分の定理 (P_∞) を用いて $\{e^x\}' = e^x$ が導かれます：

$$\{e^x\}' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x.$$

また，指数関数のマクローリン展開は絶対収束する（各項をその絶対値で置き換えた級数が収束する）級数なので，§§11.7.2 の無限級数の積の定理 (X_∞)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

を用いて指数法則 $e^x e^y = e^{x+y}$ を導くこともできます：
二項定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} y^k$，${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ に注意すると

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} y^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}. \end{aligned}$$

§§13.2.3.3 の三角関数の近似の議論より，三角関数についてもマクローリン展開

$$\cos x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l}, \qquad \sin x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} \qquad (|x| < \infty)$$

が成り立ちます．この表式も三角関数の定義と見なせます．

では，ここで練習問題．上の表式から $\{\sin x\}' = \cos x$，$\{\cos x\}' = -\sin x$ を導け．ヒントは無用でしょう．項別微分の定理が使えるのは微分した級数が収束するときです．

§13.4　複素数の極形式と複素指数関数

複素数がその真価を発揮し始めるのは，変数が複素数の指数関数を考えたときです．複素指数関数と三角関数の驚くべき関係や，e と i と π の間の神秘的な関係 $e^{i\pi} = -1$ にしびれましょう．

13.4.1　極形式と指数関数

複素数の章で，複素数 z の絶対値を r，偏角を θ とすると $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表されることを学びましたね．前の §の無限級数表示の結果を用いると，驚くべき関係 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を導くことができます．この関係を導く際に，§§11.7.1 で議論したように，絶対収束する無限級数は項の順序を自由に変えても収束値が変わらないことを利用します．

三角関数のマクローリン展開より

$$\cos x + i\sin x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1}$$

と表すことができますね．ここで，$-1 = i^2$ に注意すると，

$$(-1)^l x^{2l} = (ix)^{2l}, \qquad i(-1)^l x^{2l+1} = (ix)^{2l+1}$$

であり，三角関数のマクローリン展開は絶対収束級数なので，和をとる順を変えることができ

$$\cos x + i\sin x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2l+1}}{(2l+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

のように表すことができます．

ここで，指数関数のマクローリン展開

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

で x を ix で置き換えた式

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

によって e^{ix} を定義すると，**オイラーの公式**

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

が成り立ちます．特に $x = \pi$ のときには e，i，π を結ぶ神秘的な関係

$$e^{i\pi} = -1$$

が得られます．

e^{ix} の無限級数は，$|ix| = |x|$ ですから，全ての実数 x に対して収束します．また，その導関数については

$$\{e^{ix}\}' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ik(ix)^{k-1}}{k!} = i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ix)^{k-1}}{(k-1)!} = i\,e^{ix}$$

より，指数関数として満たすべき性質

$$\{e^{ix}\}' = i\,e^{ix}$$

を満たします．

以上の議論から，複素数 z の絶対値を r，偏角を θ とすると

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

と表すことができます．

13.4.2　複素変数の指数関数・三角関数と複素微分

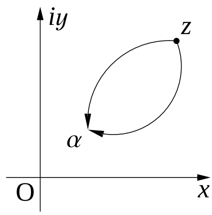
複素数 $z = x + iy$（x, y は実数）の無限べき級数によって定義される複素指数関数

$$e^{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (|z| < \infty)$$

を考えましょう．この無限級数は任意の複素数 z に対して絶対収束しますね（$|z| = r$ として確かめましょう）．以下，e^z は，微分学の立場における，指数関数の定義

$$\{e^{z}\}' = e^{z}$$

を満たすことを示しましょう．



まずは複素関数 $w = f(z)$ の微分係数の定義から．複素 z 平面上の 1 点を α とし，z の α からの ‘ 増分 ’ を $\Delta z = z - \alpha$, 対応する w の‘ 増分 ’を $\Delta w = f(\alpha + \Delta z) - f(\alpha)$ としましょう．複素 z 平面上で，点 z が点 α に任意の経路を通って限りなく近づくことを $z \to \alpha$，または増分 Δz を用いて，$\Delta z \to 0$ で表しましょう．$z \to \alpha$ のとき，有限な

$$f'(\alpha) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\alpha + \Delta z) - f(\alpha)}{\Delta z}$$

が存在する（確定する）とき，$f'(\alpha)$ を複素関数 $w = f(z)$ の α における微分係数といいます．上式は z が任意の方向から α に近づいても極限値が存在して，その極限値が近づく方向に依存しないことを要求しているので，非常に強い条件になっています．

$f'(\alpha)$ が存在するとき，

$$\lim_{z\to\alpha}(f(z)-f(\alpha))=0 \quad (\Leftrightarrow \lim_{z\to\alpha}|f(z)-f(\alpha)|=0)$$

が成り立つので，$f(z)$ は α で連続であることに注意しましょう．以下に見るように，z^n は微分可能，よって z の多項式も微分可能です．このことは，代数学の基本定理の証明の際に必要であった条件，つまり，複素数 z の多項式は連続関数であることが厳密に示されることを意味します．

マクローリン展開はべき級数なので，微分係数を求めるには z^n の導関数を調べれば済みます．公式 $w^n - z^n = (w-z)(w^{n-1}+w^{n-2}z+w^{n-3}z^2+\cdots+z^{n-1})$ を用いると

$$\begin{aligned}\{z^n\}' &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z - z)\{(z+\Delta z)^{n-1}+(z+\Delta z)^{n-2}z+\cdots+z^{n-1}\}}{\Delta z}\\ &= z^{n-1}+z^{n-2}z+\cdots+z^{n-1} = nz^{n-1},\end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad \{z^n\}' = nz^{n-1} \qquad （n\text{ は自然数}）.$$

この結果は全ての複素数 z について成り立ちますね．よって，項別微分の定理より

$$\{e^z\}' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z,\ \text{よって}\quad \{e^z\}' = e^z.$$

では，ここで問題をやりましょう．複素指数関数は絶対収束級数であることを利用して指数法則 $e^z e^w = e^{z+w}$ を満たすことを示せ．ヒント：二項定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}y^k$ は x，y が複素数のときも成り立ちます．

三角関数のマクローリン展開で実変数 x を複素変数 z で置き換えた複素三角関数

$$\cos z = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2l}, \qquad \sin z = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l+1} \qquad (|z|<\infty)$$

を考えると，容易に確かめられるように，微分関係

$$\{\cos z\}' = -\sin z, \qquad \{\sin z\}' = \cos z$$

を満たします．また，指数関数との関係 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を複素数で置き換えた関係

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

も成り立ちます（確かめましょう）．さらに, $\cos(-z) = +\cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ が成り立つので,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

のように，三角関数は指数関数を用いて表すことができます.

以上，指数関数・三角関数で例解したように，複素関数の導関数は実数の場合と同じです．実数の微分公式はそのまま複素数の公式になります．実数で微分可能な範囲は複素平面上の領域に拡張されます.