第12章　微分－基礎編

　論理を重視する古代ギリシャ人は，ユークリッドに代表されるように，厳密な幾何学を構築しました．しかし，文字記号をあまり用いないこともあって，代数のほうは幾何学と比べてギリシャ時代以降もその発展は遅々としたものでした．

　17 世紀前半，文字記号の導入と普及がなされ，デカルトによって座標と関数が導入されるに至って，変数や関数の概念が数学や物理に浸透し，猛烈な数学発展の新しい時代が始まりました．動く物体の位置を時間の関数として考えることができるようになったのです．これによって‘数学が運動を扱う’基礎ができました．

　数学で速度を扱うときは，分速や秒速などの平均速度ではあまり役に立たず，瞬間の速度を考える必要があります．瞬間速度を得るためには，単に時間間隔を 0 とするのではだめで，極限操作によって限りなく 0 に近づいていく瞬間を考えねばなりません．ここに，数学が極限を扱う必要が生じたのでした．極限を正しく扱うことは，ニュートン（Isaac Newton，1642～1727，イギリス）によって 1670～71 年頃に実行に移され，約 10 年ほど遅れて，ドイツの大数学者ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）が，接線を見いだす方法として，それに成功しました．

　ニュートンやライプニッツによって切り開かれた極限を扱う数学「解析学」は，その後大発展を遂げて自然科学や工学の発展を促しました．現在我々人類が豊かでゆとりある生活ができるのもその数学のおかげであるといっても過言ではないでしょう．

§12.1　0 に近づける極限操作

12.1.1　瞬間速度

ニュートンはリンゴが落ちるのを見て万有引力の法則を発見したとされています．その真偽のほどはともかく，彼が動く物体をどのように数式表現するかを考えたことは間違いありません．一直線上を運動する物体を考えてみましょう．その位置 x は時刻 t と共に変化するので，x は t の関数 $x(t)$ です（厳密には関数 $x(t)$ は位置 x との混用を避けるために $f(t)$ などと表すべきですが，誤解されないときは気にせずに用いましょう）．

瞬間速度を議論するために，速さ (speed) から始めましょう．平均の速さは，よく知られているように，「動いた距離÷要した時間」で表されますね．速さは正の量なので，負の値の場合も考慮した速度 (velocity) に拡張するときは，動いた距離を変位（位置の変化）に，要した時間を時刻の差に置き換えて，「平均速度＝変位÷時刻差」とすれば正しく表されます．この拡張によって，物体が直線のどちらの側に向かっているかもわかります．よって，時刻 t_1 と t_2 の間の平均速度 $v_{t_1\sim t_2}$ は，変位 $\mathit{\Delta} x$[1] が $\mathit{\Delta} x = x(t_2) - x(t_1)$，時刻差 $\mathit{\Delta} t$ が $\mathit{\Delta} t = t_2 - t_1$ と表されるので，

$$v_{t_1\sim t_2} = \frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

となります．$\mathit{\Delta} t = 1$ 分（秒）ならば，分速（秒速）です．

さて，時刻 t_1 における瞬間の速度 $v(t_1)$ を考えましょう．自然科学で大いに役立つのはこの瞬間速度のほうです．瞬間速度は，単純に $t_2 = t_1$ として時刻差 $\mathit{\Delta} t$ を 0 としたいところですが，そうすると変位 $\mathit{\Delta} x$ も $x(t_1) - x(t_1) = 0$ となるので，$v(t_1)$ は $\dfrac{0}{0}$ の形になって定まりません．

この困難を克服するために，ニュートンが考えたのは，t_1 を固定しておいて，時刻差 $\mathit{\Delta} t\,(= t_2 - t_1)$ を，0 と異なる値をとりながら，0 に限りなく近づけていく操作でした．つまり，$\mathit{\Delta} t \to 0$ の極限（$\lim\limits_{\mathit{\Delta} t\to 0}$ と表す）を考え，時刻 t_1 に

[1] $\mathit{\Delta} x$ はデルタ・エックスと読みます．$\mathit{\Delta}$ は difference（差）の頭文字 d の大文字 D に当たるギリシャ文字です．

おける瞬間速度を

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t}$$

と定義することでした．これは Δt を 0 に収束する数列 $\{\Delta t_n\}$ の一般項 Δt_n と考え，$n\to\infty$ の極限を求めることと同じです．Δt は限りなく 0 に近づいていきますが，決して 0 にはなりません．$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}$ 操作の結果として得られる瞬間速度 $v(t_1)$ は，‘ Δt が 0 に到達した暁(あかつき)にはそうなる予定の極限値 ’ としての速度です．

　このことを簡単な場合 $x(t)=t^2$ で例解しましょう：

$$\begin{aligned}
v(t_1) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_1+\Delta t)^2-t_1^2}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{t_1^2+2t_1\Delta t+(\Delta t)^2-t_1^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2t_1\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}(2t_1+\Delta t) = 2t_1
\end{aligned}$$

となりますね．分母の Δt は 0 にならないとしましたから，それは分子の Δt に打ち消されます．最後の極限操作 $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}(2t_1+\Delta t)=2t_1$ は，0 ではない Δt が 0 に向かって限りなく近づくとき，$2t_1$ ではない $2t_1+\Delta t$ が $2t_1$ に（到達はしませんがそれに）向かって限りなく近づくことを表します．記号 $\lim(\cdots)$ は $(\cdots)$ が近づく先を表すことに注意しましょう．

　天才ニュートンは，このような極限操作によって，（絶対に測定はできない）‘ 極限としての瞬間 ’ $\Delta t\to 0$ に対して得られるべき瞬間速度を計算することを可能にし，$\dfrac{0}{0}$ の不定形についての正しい対処法を与えたのでした．一般の $x(t)$ についても同様に考えると，分子・分母に現れる Δt が打ち消し合って，$v(t_1)$ は有限の定まった値になることが期待されます．

　上の計算では，分母 Δt の極限値が 0 なので，数列の極限計算の場合と同様，

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\Delta x}{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t}\ \left(=\frac{0}{0}\right)$$

などとしてはいけません．

今の例 $x(t) = t^2$ では時刻 t_1 での瞬間速度が $v(t_1) = 2t_1$ になりました．t_1 は任意なので，$v(t_1) = 2t_1$ において t_1 を t で置き換えると任意の時刻 t における瞬間速度 $v(t) = 2t$ になります．よって，この例では瞬間速度が時間に比例して増大します．落下物体はこれに相当する運動をします．

ではここで問題です．位置が $x(t) = at + b$ に従って運動するとき瞬間速度 $v(t)$ は一定値 a になることを示せ．ヒント：時刻 t と $t + \varDelta t$ の間の平均速度から始めるとよいでしょう．その際，$x(t)$ が時刻 t の 1 次式であるときは平均速度と瞬間速度は一致することを確認しましょう．ついでに，位置が一定，つまり $x(t) = c$ ならば，平均速度と瞬間速度は共に 0 であることを同様の計算で確かめましょう．

なお，現在では，単に速度といったときには，ほとんどの場合，瞬間速度を意味します．

12.1.2　接線とその傾き

瞬間速度を求める問題を一般化しましょう．時刻 t を任意の変数 x に置き換え，位置 $x = x(t)$ を関数 $y = f(x)$ に置き換えます．このとき平均速度に当たるものは，x が a から b まで変化したとき，y の **増分**（変化量）$\varDelta y = f(b) - f(a)$ と x の増分 $\varDelta x = b - a$ の比

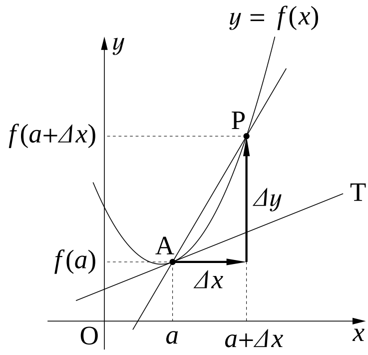
$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

です．これを x が a から b まで変化したときの関数 $y = f(x)$ の **平均変化率** といいます．

瞬間速度に当たるものは，$b = a + \varDelta x$ とおいたとき，平均変化率で $\varDelta x \to 0$ としたときの極限において得られる‘ 極限変化率 ’とでもいうべき

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(a + \varDelta x) - f(a)}{\varDelta x}$$

です．ただし，$f'(a)$ は右辺の極限値が存在する（有限な一定値になる）ときのみ意味があります．そのとき，$f(x)$ は $x = a$ で **微分可能** であるといい，一定値 $f'(a)$ は関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における **微分係数** といわれます．



さて，以上の極限操作が何をしているのか，関数 $y = f(x)$ のグラフを用いて詳しく調べましょう．グラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{P}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$ をとると，平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は‘ 直線 AP の傾き ’を表していますね．ここで，$\mathrm{P} \to \mathrm{A}$ とする，つまり点 P を**グラフの曲線に沿って**点 A に，P = A とはせずに，任意の方法で限りなく近づけましょう．A の付近で行きつ戻りつしながら近づいても構いません．このとき，$\Delta x \to 0$ となるので，直線 AP の傾きは微分係数 $f'(a)$ の値に限りなく近づきます．したがって，直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づいていきます．この直線 AT を関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における **接線**，A をその **接点** と定めましょう[2)]．よって，微分係数 $f'(a)$ はグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における‘ 接線 AT の傾き ’の意味をもちます．

では，ここで問題です．3 次関数 $y = f(x) = x^3$ の微分係数 $f'(a)$ と $x = a$ における接線を求めよ．ヒント：y の増分は

$$\begin{aligned}\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) &= (a+\Delta x)^3 - a^3 \\ &= a^3 + 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - a^3.\end{aligned}$$

また，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ を通り傾きが m の直線は $y - f(a) = m\,(x-a)$ です．答は $f'(a) = 3a^2$ です．また，微分係数が接線の傾きなので，接線の方程式は $y - a^3 = 3a^2\,(x-a)$ ですね．

ここで，n 次関数 $y = f(x) = x^n$ の微分係数 $f'(a)$ を求めておきましょう．y の増分 $\Delta y = (a+\Delta x)^n - a^n$ を求めるために因数分解の公式

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = (x-a)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}a^{k-1}$$

2) 接線をこのように $\mathrm{P} \to \mathrm{A}$ の方式で定義すると，関数として表すことができない一般の曲線（例えば円）の接線も厳密に定義されることに注意しましょう．その場合には接線の傾きが ∞ になっても構いません．

を用い，簡単のために，x の増分 $\varDelta x$ を h で表すと

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h-a)\sum_{k=1}^{n}(a+h)^{n-k}a^{k-1}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}(a+h)^{n-k}a^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}a^{n-k}a^{k-1} = n\,a^{n-1}$$

となり，分母の h が打ち消されます．したがって，重要な公式：

$$f(x) = x^n \quad \text{のとき} \quad f'(a) = n\,a^{n-1}$$

が得られました．

§12.2　関数の極限

12.2.1　関数の極限・関数の連続

ここでまず，連続変数についての極限の意味をきちんとしておきましょう．数列の場合と同様に，関数 $f(x)$ に対して，連続変数 x が，a とは異なる値をとりながら，a に任意の方法で限りなく近づくときに，$f(x)$ の値が一定値 α に限りなく近づくならば，$f(x)$ の極限値は α であるといい，

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to \alpha, \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

などと表します．厳密にいうと，§§11.5.3.1 で議論したときと同じように，正数 ε を任意に（いくらでも小さく）与えるとき，それに対応して（いくらでも小さい）正数 δ が，不等式

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{のとき} \quad |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

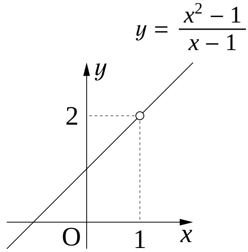
を満たすように定められるとき，つまり，$0<|x-a|<\delta$ を満たす全ての x に対して，$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$ が必ず満たされるとき，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と定義しましょう．連続関数のグラフを頭に描くと，与えられた ε に対応して δ を定められることがイメージできます．$f(x) = x^2$，$a = 1$ の場合でやってみましょう．

「$x \to a$」は ‘ x が，a とは異なる値をとりながら，a に（任意の方法で）限りなく近づく ’ ことを表し，単に x に a を代入することではありません．単に

代入して得られるのは関数値 $f(a)$ です．よって，一般に，‘ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ と $f(a)$ は別物 ’ です．両者をなぜ区別するかは以下の議論でわかります．

このことを例解するために，関数

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \begin{cases} x+1 & (x \neq 1) \\ \text{定義されない} & (x = 1) \end{cases}$$



を考えましょう．まず，$x \to a\ (a \neq 1)$ のとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x+1) = a+1, \quad f(a) = a+1$$

ですから，両者は一致します．次に，$x \to a\ (a = 1)$ のとき

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2, \quad f(1) \text{ は定義されない}$$

より，両者は一致しません．一致しないとき，その点でグラフは ‘ 切れて ’ 不連続になっていますね．

この例から，両者の一致・不一致が関数の連続・不連続を表すことは明らかでしょう．実際，関数の連続・不連続の定義は次の通りです：

$$f(x) \text{ が } x = a \text{ で連続} \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a),$$

$$f(x) \text{ が } x = a \text{ で不連続} \iff \lim_{x\to a} f(x) \neq f(\lim_{x\to a} x) = f(a).$$

12.2.2　極限の基本定理

極限の計算に必要な定理を挙げておきましょう．一部は既に黙って利用しています．§§ 11.5.2.4 で学んだ数列の極限についての基本定理：

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ が有限な一定値になるとき

(A)　$\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$　（k は定数），

(B)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$　（複号同順），

(C)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(D)　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$　$(b_n \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$

に対応して，関数の極限についても以下の定理が成り立ちます：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ が有限な一定値になるとき

(1°)　$\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$　　（k は定数），

(2°)　$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$　　（複号同順），

(3°)　$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

(4°)　$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$　　$(g(x) \fallingdotseq 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \fallingdotseq 0)$.

その証明は数列の場合と同様でよいのですが，より厳密にするために，極限値について以下のように定めましょう．$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$ であるとは，任意の（小さい）正数 ε が与えられたとき，それに対応して（小さい）正数 δ が定められ，$0 < |x - a| < \delta$ のとき $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が（必ず）成り立つことである：

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \iff 0 < |x - a| < \delta \text{ のとき } |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

よって，例えば，(1°) については，$0 < |x - a| < \delta$ のとき $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つので

$$|kf(x) - k\alpha| = |k||f(x) - \alpha| < |k|\varepsilon, \quad \text{よって} \quad |kf(x) - k\alpha| < |k|\varepsilon$$

が成立します．正数 $|k|\varepsilon$ は 0 にいくらでも近くできるので，$\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\alpha$ が示されたことになります．(2°) については, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta$, つまり $0 < |x - a| < \delta$ のとき $|g(x) - \beta| < \varepsilon$ も成り立つとして，

$$\begin{aligned} |(f(x) \pm g(x)) - (\alpha \pm \beta)| &= |(f(x) - \alpha) \pm (g(x) - \beta)| \\ &< |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

より，$|(f(x) \pm g(x)) - (\alpha \pm \beta)| < 2\varepsilon$ が得られます．したがって，(1°) の場合と同様の議論より $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ が成り立ちます．他の場合も同様です（やってみましょう）.

12.2.3　接線の存在

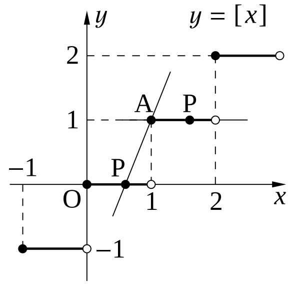
§§12.1.2 で接線とその傾きを議論しました．関数のグラフの曲線上に定点 A と動点 P をとり，P を A に限りなく近づけていったとき，直線 AP の極限として得られる直線 AT が点 A における接線であると定めましたね．ここでは接線が存在するための条件を調べてみましょう．関数のグラフにおいては，接線の存在は微分係数が有限な一定値となることに同じです．

関数 $y = f(x)$ が多項式で表されるような場合には，そのグラフは ‘滑(なめ)らか’ なので，グラフ上の全ての点で微分係数が確定し，接線が存在しますね．用語「**滑らか**」は数学用語で，正しくは，‘関数 $y = f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ が存在してそれが区間 I で連続的に変化するとき，$y = f(x)$ のグラフは区間 I で滑らかである’といいます．よって，接線はグラフの曲線が滑らかに変化する区間上で存在します．

関数の不連続点において接線は存在するのでしょうか．微分係数の定義 $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ を用いて調べましょう．この定義より，$f(a)$ が定義されない（存在しない）ときは，$f'(a)$ つまり接線の傾きが定義されないので，$x = a$ で接線はありません．

次に，関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で不連続であっても，$f(a)$ は存在する場合の接線の有無を考えてみましょう．例として，ガウスの関数

$$y = f(x) = [x] = x \text{ を超えない最大の整数}$$



を考えましょう．この関数は，n を任意の整数として，$n \leqq x < n + 1$ のとき $[x] = n$ であり，したがって，$x = n$ で不連続で，$f(n) = n$ です．$x = 1$ で不連続なので，点 A$(1, 1)$ で接線が引けるかどうか調べましょう．

まず，このことを図で理解するには，グラフ上の動点 P$(1 + \Delta x,\ f(1 + \Delta x))$ を考えるとよいでしょう．$\Delta x > 0$ のときは P は A の右側に，$\Delta x < 0$ のときは A の左側にあるので，場合によって直線 AP の傾きが違うことが明白です．また，不連続点 A に対しては，（任意の近づき方）P → A そのものが不可能なので，不連続点での接線は存在しないことが明らかです．

次に，このことを微分係数の定義を用いて調べましょう．

$$f'(1) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(1+\varDelta x) - f(1)}{\varDelta x}$$

の極限値が存在して一定値になれば接線は存在し，極限値がなければ接線はありません．よって，極限値の有無を慎重に議論しましょう．

第 1 に注意すべきことは，記号 $\varDelta x \to 0$ は，$\varDelta x$ を 0 に限りなく近づけるとき，その方法については何も述べられていないので，‘ 任意の方法で近づけてよい’ ことを意味します（数学では，述べられていないことは条件が付かないことを意味します）．よって，$\varDelta x$ は，一般に，正になったり負になったりしながら 0 に近づきます．よって，上式に対して，どの $\varDelta x \to 0$ に対しても有限な同一の値が得られるときのみ，$\varDelta x \to 0$ に対する極限値が存在することになります．特に，$\varDelta x$ が正の値を保ったまま 0 に近づけることを $\varDelta x \to +0$ で表し，逆に $\varDelta x$ が負の値を保ったまま 0 に近づけることを $\varDelta x \to -0$ で表します．

同様のことは記号 $x \to a$ にも当てはまり，この場合 x は a に任意の方法で近づきます．記号 $x \to a + 0$ や $x \to a - 0$ の意味は明らかでしょう．

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

は x が $x > a$ のまま a に近づくときの $f(x)$ の極限を表し，**右極限** $f(a+0)$ といいます．また $f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ は x が $x < a$ のまま a に近づくときの $f(x)$ の極限を表し，**左極限** $f(a-0)$ といいます．また，極限値

$$f'(a+0) = \lim_{\varDelta x \to +0} \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{\varDelta x}$$

が存在するならば，関数 $f(x)$ は $x = a$ で **右微分可能** であるといい，$f'(a+0)$ を **右微分係数** といいます．同様に，極限値

$$f'(a-0) = \lim_{\varDelta x \to -0} \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{\varDelta x}$$

が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で **左微分可能** であるといい，$f'(a-0)$ を **左微分係数** といいます．

さて，ガウス関数の問題に戻って，上で考えた任意の近づき方 $\varDelta x \to 0$ のうち，2 つの近づき方 $\varDelta x \to +0$ と $\varDelta x \to -0$ を考えてみましょう．微分係数

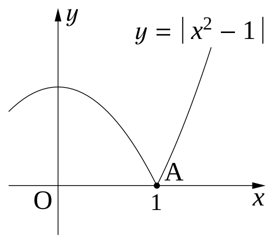
$f'(1) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(1+\varDelta x) - f(1)}{\varDelta x}$ が存在することは，右微分係数 $f'(1+0)$ と左微分係数 $f'(1-0)$ が一致することを意味します．したがって，両者が一致しない場合は $f'(1)$ が存在しないことを意味します．

$\varDelta x > 0$ のとき，$f(1+\varDelta x) = f(1) = 1$，また $\varDelta x < 0$ のとき，$f(1+\varDelta x) = 0$ ですから，

$$f'(1+0) = \lim_{\varDelta x \to +0} \frac{f(1+\varDelta x) - f(1)}{\varDelta x} = 0, \quad f'(1-0) = \lim_{\varDelta x \to -0} \frac{f(1+\varDelta x) - f(1)}{\varDelta x} = \infty$$

となり，それらは一致しません．よって，微分係数 $f'(1)$ は存在せず，よって接線の傾きが確定しないので，$x = 1$ での接線はありません．

右微分係数・左微分係数を考えると，折れ線の頂点やその類の点（尖(せん)点）においても接線はないことがわかります．例えば，関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ のグラフ上の尖点 A(1, 0) に対して，



$$f(1+\varDelta x) = \begin{cases} +(1+\varDelta x)^2 - 1 & (\varDelta x > 0) \\ -(1+\varDelta x)^2 + 1 & (\varDelta x < 0) \end{cases}$$

ですから，容易に確かめられるように，$f'(1+0) = 2$，$f'(1-0) = -2$ となり，$f'(1)$ は存在しません．グラフ上の動点 $P(1+\varDelta x, f(1+\varDelta x))$ で考えても同様に $f'(1+0)$ と $f'(1-0)$ の違いがわかります．

なお，関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば，$\lim_{\varDelta x \to 0} \{f(a+\varDelta x) - f(a)\} = 0$ が成り立つ，つまり $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つので，関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であることがわかります．

§12.3　導関数

12.3.1　導関数

関数 $y = f(x) = x^n$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は na^{n-1} で与えられたように，一般の関数 $y = f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ は a に対応して定まり，a を変数と見なせば a の関数になります．そこで，a を x に置き換えて得られる関数

$$f'(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

が存在するとき，つまりある区間 I の全ての x に対して微分可能なとき‘ $f(x)$ は区間 I で微分可能’といい，$f'(x)$ を関数 $f(x)$ の **導関数** といいます．上の極限操作 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ の最中には x は定数として扱い，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ が終わった後に変数扱いにします．関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを **微分する** といいます．

n 次関数の導関数については

$$f(x) = x^n \text{ のとき} \quad f'(x) = nx^{n-1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となりますね．

導関数は微分学の基本となる関数で，高校数学ではその全てといってもよいほどです．導関数は多くの数学者によって研究され，そのため多くの記法が今も使われています．関数 $y = f(x)$ の導関数を表す記号としては，$f'(x)$ の他に

$$\{f(x)\}', \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

なども用いられます．記号 dx，dy は「微分」（微々たる増分の意味）と呼ばれ，後で議論するように，無限小量のように考えることができます．

ではここで練習問題です．

$$(1) \quad \left\{\frac{1}{x}\right\}' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (2) \quad \left\{\sqrt{x}\right\}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

を示せ．ヒント：導関数の定義式を用います．(2) では分子有理化が必要です．これらは公式 $\{x^n\}' = nx^{n-1}$ で $n = -1,\ \dfrac{1}{2}$ とした場合に当たります．

12.3.2　導関数の基本公式

関数 $y = ax^2 + bx$ の導関数 y' を求めましょう．y の増分が

$$\Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) - ax^2 - bx = (2ax + a\Delta x + b)\Delta x$$

ですから，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2ax + a\Delta x + b)\Delta x}{\Delta x} = 2ax + b$$

となり，$ax^2 + bx$ の各項を個別に微分したものの和になっていますね．このような性質が一般的に成立すればとても便利ですね．

実際，一般に導関数について以下の性質が成り立ちます：

$$\text{(I)}\quad \{kf(x)\}' = kf'(x) \qquad (k\text{ は定数}),$$

$$\text{(II)}\quad \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x) \qquad (\text{複号同順}),$$

$$\text{(III)}\quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\text{(IV)}\quad \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (g(x) \neq 0).$$

証明には §§ 12.2.2 で学んだ極限の基本定理 (1°–4°) を用います．(I) については，基本定理 (1°) $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$ を利用すると

$$\{kf(x)\}' = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{kf(x+\varDelta x) - kf(x)}{\varDelta x} = k\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = kf'(x).$$

和・差の微分 (II) は練習問題にしましょう．ヒント：使うのは基本定理 (2°) ですね．

積の微分 (III) は基本定理 (2°) と (3°) を用います：

$$\begin{aligned}
&\{f(x)g(x)\}' \\
&= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x) - f(x)g(x)}{\varDelta x} \\
&= \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{\frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}g(x+\varDelta x) + f(x)\frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x}\right\} \\
&= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}g(x+\varDelta x) + \lim_{\varDelta x\to 0} f(x)\frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} \\
&= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0} g(x+\varDelta x) + \lim_{\varDelta x\to 0} f(x)\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

商の微分 (IV) については，今示した (III) を利用しましょう．$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，$f(x) = g(x)h(x)$．よって，$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ ですから

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)h(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

が得られます．

ここで，(IV) の特別な場合として，重要な公式

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2} \qquad (f(x) \neq 0)$$

が得られます．

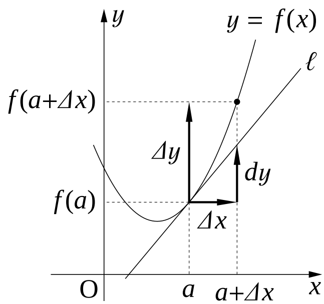
ではここで練習問題です．n が負の整数のとき，$\{x^n\}' = nx^{n-1}$ が成り立つことを示せ．ノーヒントです．また，n が負の半整数，つまり $n = \frac{1}{2} - m$（m は自然数）のときも成立することを示せ．ヒント：$\left\{\sqrt{x}\right\}'$ についての公式は示されています．

§12.4　関数のグラフ

12.4.1　関数の増減

12.4.1.1　近傍での増減と微分

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ の近くにおける増減を調べることから始めましょう．$x = a$ の近くを拡大していくと，$y = f(x)$ のグラフはだんだん直線的に見えてきて，$x = a$ での接線と重なってきますね．この直線的に見えるほどの近くを $x = a$ の **近傍**[3]といいましょう．



$y = f(x)$ のグラフとその接線との関係を $x = a$ の近傍で調べてみましょう．x の増分 Δx に対し，y の増分は $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ですね．これに対して，$x = a$ における接線 $\ell : y - f(a) = f'(a)(x - a)$ のほうの増分を dy で表すと，$\Delta x = x - a$, $dy = y - f(a)$ ですから

$$dy = f'(a)\Delta x$$

ですね．この dy がまさに **微分** と呼ばれる量です．増分 Δy と微分 dy は，グラフが直線のように見える近傍では微少量となり，そこで $\Delta y \fallingdotseq dy$ が成り立ちます．

[3] 近傍は数学用語です．ここではその厳密な意味では使っていません．

したがって，$x = a$ の近傍では y の増分が $\varDelta y \fallingdotseq dy = f'(a)\varDelta x$ と表され，微分係数 $f'(a)$ の符号が $x = a$ における関数の増減を決めます：

$$f'(a) > 0 \text{ ならば } x = a \text{ の近傍で } f(x) \text{ は増加し，}$$
$$f'(a) < 0 \text{ ならば } x = a \text{ の近傍で } f(x) \text{ は減少する．}$$

ここで，関数 $y = f(x)$ の（任意の x における）微分 $dy = f'(x)\varDelta x$ についてコメントしておきましょう．$\varDelta x$ は関数 x に対する増分とも解釈できますが，その微分 dx は $dx = \{x\}'\varDelta x = 1\varDelta x$ ですから，$dx = \varDelta x$ が成り立ち，したがって，

$$dy = f'(x)dx,\ \text{すなわち}\quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

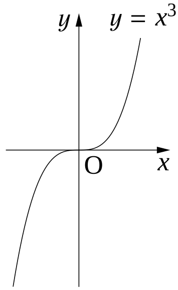
が得られます．$\dfrac{dy}{dx}$ は $f'(x)$ の意味で使われる記号そのものです．接線の傾きの感じがよく出ていますね．

微分の記号 dx や dy はニュートンとほぼ同時代に微分積分学を創始したライプニッツによって用いられた記号です．当時は微分 dx や dy は，0 とは異なるけれどもそれに向かって限りなく近づいていく量，すなわち無限小と見なされ，それらの比 $\dfrac{dy}{dx}$ をとらずに $dy = f'(x)dx$ のような形のまま議論されました．そのため，無限小の概念や論理の展開が厳密とはいえず，現在では極限操作の方法に置き換えられました．しかしながら，厳密なことをいい出さない限り，無限小としての微分 dx，dy のもつ**圧倒的な説得力**は捨てがたく，今後このテキストでは用法に注意しながらそれらを無限小の意味でしばしば使うことにしましょう．

12.4.1.2　区間における増減

関数 $f(x) = x^2$ の導関数は $f'(x) = 2x$ ですから，$f'(x) > 0$ $(x > 0)$ より区間 $x > 0$ の全ての点で関数 $f(x)$ は増加し，よって $f(x)$ はこの区間全体で増加しています．同様に，$f'(x) < 0$ $(x < 0)$ より $f(x)$ は区間 $x < 0$ 全体で減少していますね．この例からわかるように，一般に

$$f'(x) > 0 \text{ となる区間で } f(x) \text{ は増加し，}$$
$$f'(x) < 0 \text{ となる区間で } f(x) \text{ は減少する．}$$



また，関数 $f(x) = x^3$ では $f'(x) = 3x^2$ なので，実数の全区間で $f'(x) \geqq 0$ が成り立ち，1 点 $x = 0$ を除いて全区間で明白に増加しています．このような場合，$f'(x) = 0$ となる例外の点 $x = 0$ も含めて，実数の全区間で増加するとしたほうが自然ですね．このことをふまえて区間における増加や減少を定めるには，導関数を用いずに，次のように定義します：

x_1，x_2 が区間 A 上の $x_1 < x_2$ を満たす任意の 2 点であるとき

$$f(x) \text{ が区間 } A \text{ で増加} \iff f(x_1) < f(x_2),$$
$$f(x) \text{ が区間 } A \text{ で減少} \iff f(x_1) > f(x_2).$$

増減に関するこんな定義には注意しましょう．

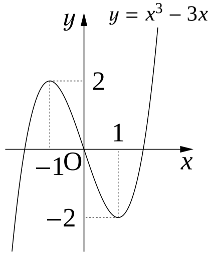
12.4.2　増減表と極大・極小

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べてグラフの概形を描きましょう．導関数 $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ より，$x < -1$ で $f'(x) > 0$，$x = -1$ で $f'(x) = 0$，$-1 < x < 1$ で $f'(x) < 0$，$x = 1$ で $f'(x) = 0$，$1 < x$ で $f'(x) > 0$．よって，$x < -1$ と $1 < x$ で関数は増加し，$-1 < x < 1$ で減少します．

増減が複雑なときに便利な表，**増減表**を用いるとスッキリします．表で記号 ↗ は関数の増加の状態を，↘ は減少の状態を表します．$x = -1$ の近傍では関数が増加の状態から減少の状態に変わり，$x = -1$ がその境目です．このとき関数 $f(x)$ はその境目 $x = -1$ で **極大** であるといい，関数値 $f(-1) = 2$ を **極大値** といいます．また，$x = 1$ の近傍では減少の状態から増加の状態に変わり，$x = 1$ がその境目なので $f(x)$ は $x = 1$ で **極小** であるといい，$f(1) = -2$ を **極小値** といいます．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

一般に連続関数 $f(x)$ が，$x = a$ の近傍で増加の状態から減少の状態に変わり，$x = a$ がその境目のとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で極大であるといい $f(a)$ を極大値といいます．逆に，$x = a$ の近傍で減少の状態から増加の状態に変わり，



$x = a$ がその境目のとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で極小であるといい $f(a)$ を極小値といいます．極大値と極小値を合わせて **極値** といいます．

この定義から，折れ線の頂点でも極大・極小となる場合があり，極大点・極小点で微分係数が 0 である必要はありません．また，関数の定義域の端点では，その近傍でたかだか増加・減少の状態の片方しかないので，そこで極大や極小になることはありません．

極大値・極小値の計算が容易でない場合があります．関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x$ を例にとると，$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 1)$ より $x = 1 \pm \sqrt{2}$ で $f'(x) = 0$ になります．よって，増減表を書くと（任せます），$x = 1 - \sqrt{2}$ で極大になりますが，その極大値 $f(1 - \sqrt{2})$ の計算は意外にてこずります．このような場合，

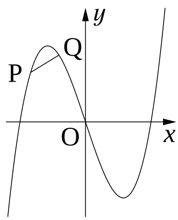
$$x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{より} \quad (x-1)^2 = 2,\ \text{よって} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

となることを利用します．$P(x) = x^2 - 2x - 1$ とおくと $P(1 - \sqrt{2}) = 0$ となるのがミソです．そこで，$f(x)$ を $P(x)$ で割ると

$$f(x) = P(x)(x-1) - 4x - 1$$

となり，$f(1 - \sqrt{2}) = -4(1 - \sqrt{2}) - 1 = -5 + 4\sqrt{2}$ が得られます．この方法は，関数値を求める際に，既に応用されていましたね．

12.4.3　曲線の凹凸と第 2 次導関数



今まで見てきたように，導関数 $f'(x)$ が連続的に変化する関数 $y = f(x)$ のグラフは滑らかな曲線を描きますね．そのような曲線のもう 1 つの特徴は曲線の凹凸です．例えば，関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフは区間 $x < 0$ で **上に凸**，区間 $x > 0$ で **下に凸** になっています．正確にいうと，区間 $x < 0$ で上に凸であるとは，区間 $x < 0$ にある曲線上に任意な 2 点 P，Q をとるとき，線分 PQ より曲線の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ のほうが必ず上にあることをいいます．同様に，下に凸も線分と弧の関係を用いて定めます．

曲線の凹凸を導関数 $f'(x)$ の増減によって定めることもできます．上に凸の区間では，導関数 $f'(x)$，つまり接線の傾きが x の増加に伴って減少していますね．接線の代わりに定規を用いて確かめましょう．また，下に凸の区間では，導関数 $f'(x)$ が x の増加と共に増加しますね．

関数 $f(x)$ がある区間で増加（減少）することはその導関数 $f'(x)$ がその区間で正（負）であることでした．導関数 $f'(x)$ は関数なのでさらに微分することができ，その導関数は $\{f'(x)\}'$ となります．よって，$f'(x)$ の増減を $\{f'(x)\}'$ の正負で表すことができ，グラフの凹凸を次のように定めることができます：

関数 $y = f(x)$ のグラフについて，区間 I で

$$f(x) \text{ が上に凸} \iff f'(x) \text{ が減少} \iff \{f'(x)\}' < 0,$$

$$f(x) \text{ が下に凸} \iff f'(x) \text{ が増加} \iff \{f'(x)\}' > 0.$$

$\{f'(x)\}'$ は関数 $f(x)$ の **第 2 次導関数** または **2 階導関数** と呼ばれ，通常 $f''(x)$ または y'' で表されます．曲線の凹凸が変わる境目の点を **変曲点** といい，変曲点ならば $f''(x) = 0$ です（逆は成り立ちません．反例は $f(x) = x^4$）．

関数 $y = f(x) = x^3 - 3x$ の $f''(x)$ の符号を調べて，グラフの凹凸が上で議論した通りであることを確かめましょう．$f'(x) = 3(x^2 - 1)$，よって $f''(x) = 6x$ ですから，$x < 0$ のとき $f''(x) < 0$ より区間 $x < 0$ で上に凸，また $x > 0$ のとき $f''(x) > 0$ より区間 $x > 0$ で下に凸になりますね．このとき $x = 0$ が $f''(x)$ の符号の変わる境い目になり，$f(0) = 0$ なので変曲点は原点 O です．

第 2 次導関数 $f''(x)$ から得られる凹凸の結果も増減表に書き込むと関数のグラフの様子がより詳細にわかります．その結果が右表です．記号 ↱ は上に凸で増加の状態を，⤵ は上に凸で減少を，↳ は下に凸で減少を，⤴ は下に凸で増加を表します．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↱	2	⤵	0	↳	-2	⤴

第 2 次導関数が現実的な意味をもつ場合があります．それは変数 x が時刻を表すときなどです．物体の位置を y，時刻を t で表すと，$y = y(t)$ の導関数 $y'(t)$ は物体の速度を表しますね．ここで，速度の（瞬間的）変化率を考えると，それは第 2 次導関数 $y''(t)$ で表され，「加速度」といわれます．よく知られている

ように，無重力状態で物を投げると，まっすぐ飛んでいき速度は変化しませんね．速度の変化が現れるのは力が働いたときで，その結果である加速度 $y''(t)$ は物体に働く力の大きさを表すことになります．実際，落下の問題で y が地表からの高さを表すとき，$y''(t) = -g$（一定）で，重力の大きさを F，物体の質量を m とすると $F = mg$ が成り立ちます．

§12.5　種々の微分法と導関数

12.5.1　合成関数・逆関数・パラメータ表示の微分法

関数 $y = (ax+b)^n$ の導関数を求めるときに，その定義に従って愚直(ぐちょく)に極限計算をするのはしんどいですね．関数 $y = (ax+b)^n$ は，$u = g(x) = ax+b$，$y = f(u) = u^n$ とおくと，合成関数 $y = f(g(x))$ の形に表すことができます．よって，合成関数を微分する方法を考えれば済みます．

一般の合成関数 $y = f(g(x))$ を $y = f(u)$，$u = g(x)$ と表しておいて，導関数の定義

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$

に基づいて考えます．x の増分 $\varDelta x$ に対応する y の増分

$$\varDelta y = f(g(x+\varDelta x)) - f(g(x))$$

は，$y = f(u)$ と $u = g(x)$ によって 2 段階に分けることができます．まず，$\varDelta x$ に対応して u の増分 $\varDelta u = g(x+\varDelta x) - g(x)$ が定まり，次に $\varDelta u$ に対応して $\varDelta y = f(u+\varDelta u) - f(u)$ が定まると考えることができます．

このように考えると，増分の比 $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta u} \cdot \dfrac{\varDelta u}{\varDelta x}$ と変形しておいて，$\varDelta x \to 0$ の極限をとることができます．よって，$\varDelta x \to 0$ のとき $\varDelta u \to 0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta u} \cdot \frac{\varDelta u}{\varDelta x} \\ &= \lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta u} \cdot \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta u}{\varDelta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

が成り立ち，よって，合成関数の微分法

$$y = f(u),\ u = g(x) \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

が得られます．

この結果は，§§ 12.4.1.1 で議論したように，微分 dx，dy，du を無限少の量と見なしたとき，‘ 割り算 ’ $\dfrac{dy}{dx}$ の間に $1 = \dfrac{1}{du}du$ を差し挟んだ形になっています．このようなことは微分の商に対して可能です．

$y = f(u)$，$u = g(x)$ より，表式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ は，$\dfrac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$ などに注意して，

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

のように表すこともできます．表式 $f'(g(x))$ は導関数 $f'(u)$ に対して $u = g(x)$ を代入したもので，敢（あ）えて書くと $f'(g(x)) = \dfrac{df(g(x))}{dg(x)}$ です．紛れることのないように注意しましょう．

では，ここで練習です．始めに挙げた例 $y = (ax + b)^n$ の導関数を求めよ．ノーヒントにしましょう．答は

$$\{(ax + b)^n\}' = n(ax + b)^{n-1}a$$

です．これは非常にしばしば用いられる公式です．

次に，逆関数の微分法を考えましょう．例えば，関数 $y = f(x) = x^n$（n は自然数）のとき，これを x について解くと $x = f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ が得られます．そのとき，x と y を入れ替えて得られる $y = f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ を関数 $y = f(x) = x^n$ の逆関数といいます．この逆関数を微分するのは容易ではなさそうです．関数のほうの導関数を利用することを考えましょう．

一般に，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を x について解いて得られる $x = f(y)$ は元の逆関数と同値です．よって，$y = f^{-1}(x)$ の導関数は，微分 dx，dy を無限少量と考えると，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}$$

で与えられます．

少々乱暴でしたね．正しくは，$\varDelta x \to 0$ のとき $\varDelta y \to 0$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\varDelta x}{\varDelta y}} = \frac{\displaystyle\lim_{\varDelta x \to 0} 1}{\displaystyle\lim_{\varDelta y \to 0} \frac{\varDelta x}{\varDelta y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}$$

とします．$f'(y)$ は $y = f^{-1}(x)$ を用いると x で表されます．

逆関数 $y = f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$（$n$ は自然数）で例解しましょう．記号 f^{-1} は省き

$$y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$$

に注意します．よって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$$

となります．元の関数の定義域には注意しましょう．

では，練習問題です．関数 $y = \sqrt{x+1}$ を微分せよ．ヒントは不要でしょう．答は $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ です．

円 $x^2 + y^2 = r^2$ は $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ などとパラメータ表示できますね．このとき，変数 x，y はパラメータ θ の関数になり，x と y は θ を媒介として関数関係にあります．一般に，曲線のパラメータ表示が $x = f(t)$，$y = g(t)$ であるとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めましょう．逆関数の微分の場合と同様，微分 dx，dy，dt で考えると，直ちに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

となりますね．極限を用いて厳密に導くのは君の仕事にします．上の円のパラメータ表示 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の場合，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\cos\theta}{-r\sin\theta} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

ですね．これは点 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における円の接線の傾きです．

12.5.2　曲線の方程式の微分法

円 $x^2+y^2=r^2$ を考えます．$x^2+y^2=r^2$ を y について解くと，$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ なので，厳密にいうと y は x の関数ではありません．しかしながら，x 軸の上側では $y=+\sqrt{r^2-x^2}$，下側では $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ ですから，‘ 適当な領域を定めると y は x の関数になります ’．そのような関数を「陰関数」といいます．方程式 $x^2+y^2=r^2$ の y を x の陰関数と見なして，その導関数を求めましょう．

円上に 2 点 $\mathrm{A}(x,\ y)$，$\mathrm{P}(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)$ をとると，それらは円の方程式を満たします：

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (x+\varDelta x)^2+(y+\varDelta y)^2=r^2.$$

それらの差をとって $\varDelta x$ で割ると，

$$\frac{(x+\varDelta x)^2-x^2}{\varDelta x}+\frac{(y+\varDelta y)^2-y^2}{\varDelta x}=0$$

が得られます．$\varDelta x\to 0$ の極限を考えると，

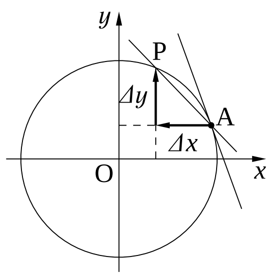
$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{(x+\varDelta x)^2-x^2}{\varDelta x}+\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{(y+\varDelta y)^2-y^2}{\varDelta x}=0 \iff \frac{dx^2}{dx}+\frac{dy^2}{dx}=0$$

となるので，これは方程式 $x^2+y^2=r^2$ の両辺を x で微分したことに当たります．よって，合成関数の微分法を用いて

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,\text{ よって }\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

を得ます．これは $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ または $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ の導関数に同値です．

$\dfrac{dy}{dx}$ が接線の傾きであることを確かめましょう．先ほど円上に 2 点 $\mathrm{A}(x,\ y)$，$\mathrm{P}(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)$ をとって，$\varDelta x\to 0$ の極限を考えましたね．このとき，P は円に沿って A に限りなく近づいていきます．よって，$\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ は点 A における接線の傾きを表します．



よって，円上の点 $(a,\ b)$ での接線の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ となるので，その点における接線の方程式は

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$$

です．$a^2 + b^2 = r^2$ を用いて整理すると，よく知られた結果 $ax + by = r^2$ が得られます．

一般の曲線 $f(x,\ y) = 0$ の場合についても同様です．$f(x,\ y) = 0$ の両辺を x で微分します:

$$\frac{df(x,\ y)}{dx} = 0.$$

この方程式は $\dfrac{dy}{dx}$ を含むので，それについて解くと $\dfrac{dy}{dx}$ が x，y の式で表されます．

では，練習問題です．放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $\mathrm{A}(pa^2,\ 2pa)$ における接線は

$$y = \frac{x}{a} + pa$$

であることを示せ．ノーヒントです．

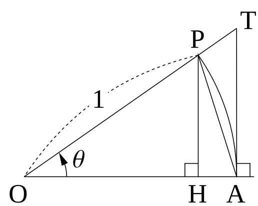
12.5.3　三角関数の微分

12.5.3.1　三角関数の極限

三角関数の導関数を求めるには次の極限の定理が必須です：

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad （\theta \text{ はラジアン単位}）.$$

この定理は初等幾何を用いて証明されます．半径が 1 で中心角 θ (rad) の扇形 OAP の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の端点 P から半径 OA に垂線 PH を引き，点 A で OA に立てた垂線と OP の交点を T とします．このとき，$\triangle\mathrm{OAP} <$ 扇形 OAP $< \triangle\mathrm{OAT}$ が成り立つので，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，



$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

が得られます．$\sin\theta$ で割って逆数をとると

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

となります．

この不等式は，$\dfrac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$ なので，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$ のときも成り立ちます．よって，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ だから，θ を 0 に収束する数列の一般項 θ_n などと見なすと，はさみうちの原理が利用できて

$$1 \geqq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \geqq 1,\quad \text{よって}\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

が成立します.

この定理から導かれる重要な極限

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0, \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$$

を示すことは練習問題にしましょう．ヒント：

$$1-\cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\,.$$

12.5.3.2　**三角関数の導関数**

三角関数の導関数で基本となるのは次の 3 つです：

$$\{\sin x\}' = \cos x, \qquad \{\cos x\}' = -\sin x, \qquad \{\tan x\}' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

前の 2 つを示すとき，先に学んだ三角関数の極限と加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を用います.

簡単のために増分 $\varDelta x$ を h と略記すると

$$\begin{aligned}
\{\sin x\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x\sin h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\right) = \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1\\
&= \cos x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\cos x\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \sin x\sin h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}\right) = \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1\\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$

これらから，商の微分法を用いると

$$\{\tan x\}' = \left\{\frac{\sin x}{\cos x}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\{\sin x\}'\cos x - \sin x\{\cos x\}'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

これらの公式の導出過程からわかるように，$\sin x$ と $\cos x$ は全ての実数 x に対して微分可能であり，その結果，全ての実数 x で連続になります．

さて，練習問題です．公式

$$\{\sin^n(ax+b)\}' = an\sin^{n-1}(ax+b)\cos(ax+b),$$
$$\{\cos^n(ax+b)\}' = -an\cos^{n-1}(ax+b)\sin(ax+b)$$

を導け．ヒント：$u = ax+b$，$v = \sin u$ などとおき，合成関数の微分法を 2 段階に使います．

12.5.4　指数関数・対数関数の微分

12.5.4.1　指数関数の連続性と指数法則

§§6.1.1 で議論したように，実数の指数 a^p $(a > 0)$ は，実数 p に収束する有理数の数列 $\{p_n\}$ を考えて，極限

$$\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = a^p$$

として定義されました．そのため，指数関数 a^x $(a > 0)$ の連続性はまだ示されておらず，もし不連続なら，指数関数は微分不可能です．また，連続の性質を用いなければ，実数 p，q に対する指数法則

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

を示すことはできません．

指数関数 $f(x) = a^x$ が連続関数であることを示しましょう．§§11.5.2 で

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (a > 0)$$

が成り立つことを議論しました．

また，実数 p，q に対して指数法則 $a^p a^q = a^{p+q}$ が成り立つことは §§11.5.2.4 で議論したことに注意しましょう．

　$a > 1$ のとき，$-\dfrac{1}{n} < h_n < \dfrac{1}{n}$ を満たす任意の数列 $\{h_n\}$ に対して

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^{h_n} < a^{\frac{1}{n}}$$

が成り立ちます．よって，はさみうちの原理より，$n \to \infty$ のとき $h_n \to 0$ で，

$$\lim_{n\to\infty} a^{h_n} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{h\to 0} a^h = 1$$

が得られます．これから，任意の実数 c に対して，

$$\lim_{x\to c} a^x = \lim_{x\to c} a^c a^{x-c} = a^c \lim_{x\to c} a^{x-c} = a^c \cdot 1 = a^c$$

よって，

$$\lim_{x\to c} a^x = a^c \qquad (a > 1)$$

が成り立ちます．これを $0 < a < 1$ の場合に示すのは，君たちに任せましょう．ヒント：違うところは $a^{\frac{1}{n}} < a^{h_n} < a^{-\frac{1}{n}}$ だけです．それができたら指数関数の連続性が完全に示されます．

　指数法則 $(a^p)^q = a^{pq}$（p，q は実数）を示しましょう．任意の実数 p，q に対して，$\{p_m\}$，$\{q_n\}$ をそれぞれ p，q に収束する有理数列とすれば，§§6.1.1 で示したように

$$(a^{p_m})^{q_n} = a^{p_m q_n}$$

が成り立ちますね．よって，指数関数の連続性：$\lim\limits_{m\to\infty} a^{p_m} = a^{p_\infty} = a^p$ より

$$\lim_{m\to\infty} (a^{p_m})^{q_n} = \lim_{m\to\infty} a^{p_m q_n} \ \Leftrightarrow\ (a^p)^{q_n} = a^{p q_n}$$

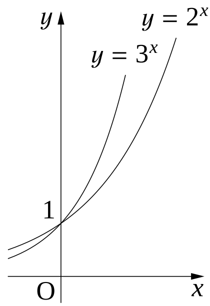
が得られ，したがって

$$\lim_{n\to\infty} (a^p)^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{p q_n} \ \Leftrightarrow\ (a^p)^q = a^{pq}$$

が得られます．これで，§§11.5.2.4 の議論と併せて，実数指数に対する指数法則が全て示されました：

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (ab)^p = a^p b^p, \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad （p,\ q \text{ は実数}）.$$

12.5.4.2　指数関数の導関数



指数関数 $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ の導関数を求めましょう．

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$
$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{0+\Delta x} - a^0}{\Delta x} = a^x f'(0)$$

となります．$f'(0)$ は関数 $y = f(x) = a^x$ のグラフ上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きであり，右図から読みとれるように，それは a の値と共に変化します．

そこで，まず，$f'(0) = 1$ となる場合を考えましょう．その場合の a を文字 e で表すと，約束によって

$$\{e^x\}' = e^x$$

が成り立ちます．e は無理数で，$e = 2.7182818\cdots$ であることが知られています．

$a = e$ のとき $f'(0) = 1$ ですから，微分係数の定義より

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1,$$

または，$\Delta x = h$ とおいて，

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

が成り立ちます．

一般の指数関数 a^x の導関数については，$a = e^\alpha$ とおいて底が e の対数をとると，$\log_e a = \alpha$ なので，$a^x = e^{\alpha x} = e^{x \log_e a}$ が成り立ちます．よって，合成関数の微分法より，

$$\{a^x\}' = \left\{e^{x \log_e a}\right\}' = e^{x \log_e a} \log_e a = a^x \log_e a$$

となるので，

$$\{a^x\}' = a^x \log_e a \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

が得られます．

ここで，練習問題です．関数 $y = e^{2x} \sin 3x$ を微分せよ．ノーヒントです．答は $y' = 2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x$ ですね．

12.5.4.3　対数関数の導関数

対数関数 $y = \log_a x$ は $x = a^y$ に同値ですから，$y = \log_a x$ は指数関数 $y = a^x$ の逆関数になっていますね．したがって，対数関数の導関数は逆関数の微分法を用いて得られ，そのとき底が e の場合が簡単です．底が e である対数 $\log_e x$ を **自然対数** といい，微分積分法では主に自然対数を考えるので，底 e は省略して単に $\log x$（または $\ln x$ ）と書きます．文字 e はしばしば「自然対数の底」といわれます．

対数関数 $y = \log x$ の導関数は，$x = e^y$ より $\dfrac{dx}{dy} = e^y$ だから，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

したがって，

$$\{\log x\}' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

が得られます．

一般の対数関数 $y = \log_a x$ の導関数は

$$\{\log_a x\}' = \frac{1}{x \log a} = \frac{\log_a e}{x}$$

となります．これを示すのは君たちに任せましょう．最後の式を導くとき，対数の底の変換公式 $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ を用います．

しばしば用いられる導関数の公式に

$$\{\log|x|\}' = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

があります．$x > 0$ のときは既に示されています．$x < 0$ のときは合成関数の微分法を用いて，

$$\{\log|x|\}' = \frac{d\log|x|}{dx} = \frac{d\log(-x)}{dx} = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

と示されます．

では，ここで練習問題です．

$$\{\log|ax+b|\}' = \frac{a}{ax+b}, \qquad \{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

を示せ．ヒントは不要でしょう．

対数を利用した微分法は非常に有用です．例として，‘実数次数’の関数 $y = x^\alpha$（$x > 0$, α は実数）を微分してみましょう．まず，両辺の（自然）対数をとると $\log y = \alpha \log x$ ですね．そこで両辺を微分すると，

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}, \quad \text{よって} \quad y' = y\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

したがって，公式

$$\{x^\alpha\}' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x > 0,\ \alpha \text{ は実数})$$

が得られます．このように対数をとって微分する方法を **対数微分法** といいます．

では，練習問題です．関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ を微分せよ．よく出てくる有名問題です．ヒントは不要ネ．答は

$$\{x^x\}' = x^x(\log x + 1).$$

指数関数の導関数のところで，e を定める等式 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ を得ました．これから対数関数の底 e を極限値として表す定理

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

を導きましょう（$x \to \pm\infty$ の符号 $\pm$ は $+$, $-$ のどちらでも構いません）．$e^h - 1 = k$ とおくと，$h = \log(k+1)$ で，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ となるので，

$$\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log(k+1)} = 1, \quad \text{よって} \quad \lim_{k\to 0}\frac{\log(k+1)}{k} = 1 \iff \lim_{k\to 0}\log(k+1)^{\frac{1}{k}} = 1$$

が成立します．ここで, 対数関数は連続関数なので, 連続の性質 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を用いると，対数の底は e であることに注意して

$$\lim_{k\to 0}\log(k+1)^{\frac{1}{k}} = \log\left(\lim_{k\to 0}(k+1)^{\frac{1}{k}}\right) = 1 \iff \lim_{k\to 0}(k+1)^{\frac{1}{k}} = e$$

が得られます．$k \to 0$ の右極限 $k \to +0$ または左極限 $k \to -0$ を考えて，$k = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$k \to \pm 0$ のとき $x \to \pm\infty$ となるので上の定理が得られます．

$x = 10000$ のとき，電卓計算を行うと，e の近似値として 2.718 が得られます．