§5.3　線形微分方程式と線形演算子

線形写像の概念は線形微分方程式においても見いだすことができます．それは関数を関数に移すような写像であり，我々はその議論の材料に 1 次元の波動方程式を用いましょう．

5.3.1　微分方程式の起源

5.3.1.1　ニュートンの運動方程式

微分方程式の起源は，詳しくは『+α』の §14.9 で解説したように，天才ニュートン（Isaac Newton，1642〜1727，イギリス）が発見した **運動方程式** にあります．質量 m，位置 $\vec{r}(t)$（t は時刻）の物体に力 $\vec{F}$ が働くと，その結果，物体の速度 $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$（＝位置の変化率）が変化し，**加速度**（＝速度の変化率）：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

が生じます．この関係は原因と結果の結びつき，つまり‘因果関係’を表していて，それを等号＝を用いて量的な関係として表したのが運動方程式です：

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad \text{（運動方程式）}$$

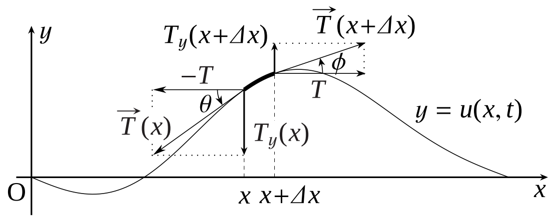
この方程式は微分を含む方程式であり，物体に働く力 $\vec{F}$ を知れば，原理的には物体の速度 $\vec{v}(t)$ や位置 $\vec{r}(t)$ を t の関数として表すことができます．

ニュートンの運動方程式は自然現象を記述する基礎方程式ですが，その後の自然科学の発展によって，小は原子・分子から大は全宇宙まで，**自然現象を記述する基礎方程式は全て微分方程式の形で表される** ことが知られています．我々は，微分方程式の具体例として，運動方程式から弦の振動の方程式を導くことから始めましょう．

5.3.1.2　弦の振動方程式

単位長さ当たりの質量（「線密度」という）が ρ（ロー）の弦の振動を考えましょう．弦は，静止状態では x 軸上に大きさ T の張力でぴんと張られているとし，弦の各点は y 軸方向に微小振動するとします．弦は自由に曲げられるとすると，

弦の各点に働く張力 $\vec{T}$ はそこでの弦の接線方向を向きます．弦の各点の y 軸方向の変位を u と書くと，u は，弦の各点の位置 x および時刻 t に依存するから，2 変数関数 $u(x, t)$ になります．



運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ を弦の振動に適用するために，微小区間 $[x, x + \Delta x]$ にある横幅 Δx の微小部分（図の部分）に着目しましょう（x は任意なので，弦の全ての部分を考えていることになります！）．重力や空気の摩擦力を無視すると，微小部分 Δx に働く力はの端点 x における張力 $\vec{T}(x)$ と端点 $x + \Delta x$ における張力 $\vec{T}(x + \Delta x)$ の 2 つで，それらは静止状態の張力 T と振動による弦の伸縮に起因します．微小部分が y 軸方向にのみ微小な振動をするときは，$\vec{T}(x)$ と $\vec{T}(x + \Delta x)$ の x 成分は，静止状態の張力 $-T$ と T になって，打ち消し合います．また，両張力ベクトルの y 成分は小さいので，それらの大きさは T にほとんど等しくなります（図の弦の変位は見やすくするために非常にデフォルメされています）．したがって，運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ をこの問題に適用するときは方程式の y 成分

$$ma_y = F_y$$

を考えれば十分です．

まず，質量 m から．微小区間 $[x, x + \Delta x]$ にある微小部分は，静止状態では長さが Δx で，弦の線密度が ρ だから，その質量は $m = \rho\Delta x$ です．

加速度の y 成分 a_y は微小部分の y 成分 $u(x, t)$ の t に関する 2 階導関数です：$a_y = \dfrac{d^2u(x, t)}{dt^2}$．ただし，今の t 微分の際には，2 変数関数 $u(x, t)$ の微小部分の位置を示す変数 x の値は固定されています．一般に，多変数関数について，特定の 1 変数以外の変数の値を固定しておいて，その 1 変数で微分することを **偏微分** するといいます．その際には，微分記号は d の代わりに ∂（ラウンド）を用い，例えば，微小部分の速度の y 成分 $v_y(x, t)$ は

$$v_y(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

のように定義されます．したがって，加速度 a_y は，正しくは，

$$a_y = \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

と書かれます．

（微分記号 d はどういう場合に使われるのでしょうか．それについては脚注でコメントしておきましょう[5]）．

さて，最後に y 軸方向に働く力 F_y です．それを与えるのは 2 つの張力 $\vec{T}(x)$ と $\vec{T}(x+\Delta x)$ の y 成分です．図からわかるように，弦の座標 x，$x+\Delta x$ において，x 軸方向と弦の接線方向のなす角を θ（図はその対頂角），ϕ とすると，

$$F_y = -T\tan\theta + T\tan\phi$$

となります．ここで，$\tan\theta$ は座標 x（時刻 t）における弦の傾きだから，

$$\tan\theta = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

同様に，$\tan\phi = \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}$．したがって，

$$F_y = -T\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + T\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} = T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right).$$

---

[5] 1 変数関数 $y = f(x)$ の導関数

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

からわかるように，増分 Δx に対応する増分 $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ が微小なとき，近似式 $\Delta y = \Delta f(x) \fallingdotseq f'(x)\Delta x$ が成り立ちます．このとき，『$+\alpha$』の §§12.4.1.1 で議論したように，形式的な増分

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

を考え，それを $y = f(x)$ の **微分** といいました．微分 dx や dy は実質的には「無限小増分」の場合を想定しています．また，$dy = df(x)$ は，f が多変数関数である場合も考慮して，$y = f(x)$ の **全微分** ともいわれます．実際，2 変数関数 $z = f(x, y)$ において，増分 $\Delta x, \Delta y$ の両方に対応する増分

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)\\ &= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y\end{aligned}$$

を考える場合もあります．そんなとき，$z = f(x, y)$ の形式的増分

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy$$

は $z = f(x, y)$ の全微分といわれ，dx, dy が無限小増分のときに役立ちます．

ここで，Δx は十分に小さい（実質的に無限小）と考えると，

$$F_y = T\frac{\dfrac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x} - \dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}}{\Delta x}\Delta x \fallingdotseq T\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\Delta x$$
$$= T\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x$$

となります．

以上の議論から，運動方程式 $ma_y = F_y$ は

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} \fallingdotseq T\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x$$

となり，微小部分 Δx を限りなく小さくしていくと，弦の振動方程式

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$$

が得られます．

上の方程式で $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ とおくと，1 次元の**波動方程式**

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$$

が得られます．いずれ学ぶことと思いますが，これは，$u(x,\ t)$ を適宜解釈し直すと，音波でも電磁波でも，1 方向に伝搬する波の方程式になります．

5.3.1.3　ダランベールの解法

フランスの偉大な数学者ダランベール（Jean le D’Alembert，1717〜1783）は，1747 年，波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$ の特別な解法を見いだしました：$f(x)$ を任意の 2 回微分可能な関数として，

$$u(x,\ t) = f(\omega t - kx) \qquad (\omega,\ k \text{ は定数})$$

の形の解が存在します．実際，方程式に代入すると，

$$\omega^2 f''(\omega t - kx) = v^2(-k)^2 f''(\omega t - kx)$$

だから（注意：$f''(\omega t - kx) = \dfrac{d^2 f(\omega t - kx)}{d(\omega t - kx)^2}$），$k = \pm\dfrac{\omega}{v}$ を満たすとき解になりますね．特に，この条件で，特に f が 3 角関数となる解もあります：

$$u(x,\ t) = A\sin(\omega t - kx + \delta).$$

これは, §§1.4.4.2 うなり で見たように, 典型的な波の形をしています：$\omega = 2\pi\nu$ は角振動数（ν（ニュー）は波の振動数．§§1.4.4.2 などでは f で表しました）で，δ は位相のずれ．ここで，時間 t を止めてみると，波は x 軸方向のサインカーブの形で，$|k|x = 2\pi$ の周期でくり返します．くり返すまでの x の長さ λ：

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}$$

を波の **波長** といいます．また，$v = \lambda\nu$ は，長さ λ が単位時間当たり ν 回くり返される，つまり波は $\lambda\nu$ だけ進むことを表すので，波の速度です．

5.3.2　線形微分方程式と重ね合わせの原理

波動方程式を「変数分離法」で解き，重ね合わせの原理を学びましょう．

5.3.2.1　変数分離法

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ の解が,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

のように，x のみの関数と t のみの関数の積に分離できると仮定して，解を求める方法を **変数分離法** といいます．微分方程式に代入して,

$$X(x)T''(t) = v^2 X''(x)T(t) \iff \frac{T''(t)}{T(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

が得られます．すると，上の第 2 式からわかるように，t のみの関数が x のみの関数に恒等的に等しいためにはそれらは定数です．それは負の値（それを $-\omega^2$ と書こう）のとき波を表す解になり（後で確かめよう），方程式は

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 \iff \begin{cases} T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2} X(x) = 0 \end{cases}$$

となります．

さて，1 変数の未知関数 $y = y(x)$ とその導関数 y', y'' について，1 次の項からなる微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

（P, Q, R は与えられた関数）を 2 階の**線形微分方程式** といいます．特に，右辺 $R(x)$（y の 0 次の項）がない，つまり，y, y', y'' の 1 次の項のみからなる

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

を 2 階の**同次線形微分方程式**といいます．上で得られた波動方程式の変数分離形は 2 階線形微分方程式の離形ですね．

2 階の微分方程式は，荒っぽくいえば 2 回積分して解を得るので，2 個の任意定数（積分定数）を含む解が一般解になります（正しくは，任意の $x = x_0$ で与えられた 2 つの初期条件 $y(x_0) = y_0$，$y'(x_0) = y_1$ を満たす，ただ 1 つの解をもつために 2 つの任意定数が必要です）．したがって，同次線形微分方程式 $T''(t) + \omega^2 T(t) = 0$ については，公式 $\dfrac{d^2}{dx^2}\{A\sin(\omega x + \theta)\} = -\omega^2 A\sin(\omega x + \theta)$（$A$, θ は任意定数）に注意すると，$T(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ が一般解です．その解は加法定理を用いると

$$T(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad (a,\ b \text{ は任意定数})$$

のようにも表されます．$X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}X(x) = 0$ の一般解も同様にして，変数分離形の一般解が得られます：a, b, c, d を任意定数として

$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= T(t)X(x) \\ &= (a\cos\omega t + b\sin\omega t)(c\cos\frac{\omega}{v}x + d\sin\frac{\omega}{v}x). \end{aligned}$$

問：この解が波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$ を満たすのを確かめなさい．

略解：

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = (-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t)(c\cos\frac{\omega}{v}x + d\sin\frac{\omega}{v}x),$$

$$v^2\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} = v^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t)(-c(\frac{\omega}{v})^2\cos\frac{\omega}{v}x - d(\frac{\omega}{v})^2\sin\frac{\omega}{v}x).$$

5.3.2.2　同次線形微分方程式と重ね合わせの原理

同次線形微分方程式 $T''(t) + \omega^2 T(t) = 0$ の一般解は $T(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ですが，$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ も解ですね．逆にいえば，$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ が解のとき，それらの線形結合 $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ が解になっています．これは §§5.2.2 で学んだ重ね合わせの原理ですね．$X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}X(x) = 0$ でも同様です．

ここで，重ね合わせの原理が成り立つことの意味を確認しておきましょう．微分方程式の解全体の集合つまり解空間を W とすると，重ね合わせの原理は「$u \in W,\ v \in W \Rightarrow ku + lv \in W$」（$k$, l は定数）と集合の言葉で言い表されます．

そのとき，任意の解は §§5.1.2 の 8 条件を満たすので，解空間 W は関数を要素とするベクトル空間つまり「関数空間」になります．つまり，解の重ね合わせの原理が成り立つことは，事実上，その解空間がベクトル空間であることを意味します．

さて，同次線形微分方程式の解の重ね合わせの原理を線形写像の観点から議論しましょう．関数 $y = f(x)$ の導関数 y' は微分記号 $\frac{d}{dx}$ を用いて

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y$$

などと書かれますね．このとき，$\frac{d}{dx}$ を文字 D で表すと，関数 y を微分して導関数 y' を作ることは‘関数 y に対して関数 $Dy = y'$ を対応させる’ことと見なすことができます．このような対応は §§1.7.1 で議論した‘写像 f’と同質であり，‘D は関数 y を別の関数 Dy に写す写像’と解釈されます．この写像が上で議論した関数空間における写像であるとき，それを **作用素**，または物理学の分野では，**演算子** といいます．特に D のように，微分に関係する作用素は **微分作用素**（**微分演算子**）といわれます．もし D を含む微分演算子 L（例えば，$L = D + P(x)$ など）が関数 u, v の線形結合 $ku + lv$ に対して，性質

$$L(ku + lv) = kLu + lLv \qquad \text{（線形性）}$$

が成り立つならば，L を **線形微分演算子** といい，その性質を L の **線形性** といいます．

微分方程式 $Ly = 0$ の微分演算子 L が線形性をもつことはその微分方程式において重ね合わせの原理が成り立つことを意味します．それを 2 階の同次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

で例解しましょう．2 階微分を表す微分演算子 D^2 を

$$D^2y = D(Dy)\,(= Dy' = y'')$$

によって定義すると，上の微分方程式 $D^2y + P(x)Dy + Q(x)y = 0$ は微分演算子 $L = D^2 + P(x)D + Q(x)$ を用いて

$$Ly = (D^2 + P(x)D + Q(x))y = 0$$

と表されます．この方程式の任意の 2 解を u, v とすると，$Lu = 0$，$Lv = 0$ が成り立ち，そのとき，u, v の線形結合 $ku + lv$ に対して

$$\begin{aligned} L(ku + lv) &= (D^2 + P(x)D + Q(x))(ku + lv) \\ &= D^2(ku + lv) + P(x)D(ku + lv) + Q(x)(ku + lv) \\ &= (ku'' + lv'') + (kP(x)u' + lP(x)v') + (kQ(x)u + lQ(x)v) \\ &= k(u'' + P(x)u' + Q(x)u) + l(v'' + P(x)v' + Q(x)v) \\ &= kLu + lLv \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ちます．したがって，同次線形微分方程式 $Ly = 0$ の解について重ね合わせの原理が成り立ちます．その結果，$Ly = 0$ の解空間はベクトル空間つまり関数空間になります（§§5.1.2 ベクトルの公理的定義 の 8 条件はもちろん満たします）．

重ね合わせの原理または微分演算子 L の線形性は線形微分方程式の一般解の求め方を教えます．2 階の同次線形微分方程式 $Ly = 0$ で例解しましょう．先に述べたように，2 階の微分方程式の一般解は，積分を 2 回行って得られるので，2 個の任意定数（積分定数）を含みます．一方，$Ly = 0$ の 2 つの解を $u(x), v(x)$ とすると，その線形結合 $ku(x) + lv(x)$（k, l は任意定数）も解です．このとき，解 $u(x), v(x)$ が線形独立（☞§§5.1.3.4）ならば，$u(x), v(x)$ は比例関係になく，したがって，線形結合 $ku(x) + lv(x)$ は正しく 2 個の任意定数 k, l を含む一般解です．（同様の議論によって，n 階の同次線形微分方程式の一般解は n 個の線形独立な解の線形結合として表すことができます）．

上の議論を先に求めた波動方程式の変数分離形 $T''(t) + \omega^2 T(t) = 0$ の一般解 $T(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$（$a, b$ は任意定数）で確かめてみましょう．$\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ が線形独立であることを示すのは練習問題ですね．
ヒント：（a, b を未知数として）「恒等的に $a\cos\omega t + b\sin\omega t = 0 \Rightarrow a = b = 0$」を示します．
答：恒等的に $a\cos\omega t + b\sin\omega t = 0$ のとき，$t = 0$ とおくと $\sin 0 = 0$，$\cos 0 = 1$ だから $a = 0$．また，$t = \frac{\pi}{2\omega}$ とおくと同様にして $b = 0$ を得ます．したがって，一般解は確かに $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の線形結合で表されますね．

5.3.2.3　波動方程式の固有値

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ の解を $u(x,t) = X(x)T(t)$ と変数分離し，元の方程式を $T''(t) + \omega^2 T(t) = 0$，$X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}X(x) = 0$ と分離して，それらの一般解 $T(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$，$X(x) = c\cos\dfrac{\omega}{v}x + d\sin\dfrac{\omega}{v}x$ を得ました．

波動方程式が実際の弦の振動を表す場合などを考えればわかるように，上の解で，ω や定数 a, b, c, d の値を任意に選ぶことはできませんね．実際には，弦の振動方程式でいえば，方程式それ自身のほかに，弦の最初の形や初速度を定める「初期条件」や弦の長さや端点の状態（固定または自由）を定める時間によらない「境界条件」があり，それらを付け加えると弦の振動が完全に定まります．ピアノやギターの各弦の振動は，基本振動とその倍振動からなることから推測できるように，ω の値は飛び飛びの値 ω_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のみが許されます．この飛び飛びの値は線形微分演算子の「固有値」に対応しています．以下，このことを議論しましょう．

1 例を考えれば議論には十分なので，弦の振動を考えます．変数分離の方程式 $X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}X(x) = 0$ の一般解 $X(x) = c\cos\dfrac{\omega}{v}x + d\sin\dfrac{\omega}{v}x$ に境界条件を付加します：弦の長さを l とし，端点 $x = 0, l$ で固定するつまり $X(0) = X(l) = 0$．すると，上の一般解より $X(0) = c = 0$，よって，

$$X(x) = d\sin\frac{\omega}{v}x,\ \text{かつ}\quad X(l) = d\sin\frac{\omega}{v}l = 0$$

と制限されます．よって，$\sin k\pi = 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ に注意すると，

$$\frac{\omega}{v}l = k\pi \ \Leftrightarrow\ \omega = \frac{k\pi v}{l}\,(=\omega_k\text{とおく})\quad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

したがって，

$$X(x) = X_k(x) = d_k\sin\frac{\omega_k}{v}x,\qquad T(t) = T_k(t) = a_k\cos\omega_k t + b_k\sin\omega_k t$$

と制限され，この結果は，ピアノやギターの音が基本振動数 $\nu_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{v}{2l}$ とその倍振動 $\nu_k = \dfrac{kv}{2l}$ $(k = 2, 3, \cdots)$ からなることを説明しますね．

上の例からわかるように，波動方程式（一般に，偏微分方程式）は，境界条件の下で解いたときにだけ，意味のある解を得ます．微分方程式をこのように解く問題を「境界値問題」といいます．以後，我々は偏微分方程式を境界値問題として扱いましょう．

さて，微分方程式 $X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}X(x) = 0$ は境界条件 $X(0) = X(l) = 0$ の下では，$X''(x) + \dfrac{\omega_k^2}{v^2}X(x) = 0$（ただし，$\omega_k = \dfrac{k\pi v}{l}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$）となりました．これを，パラメータ $\lambda_k = -\dfrac{\omega_k^2}{v^2}$ と微分演算子 $D = \dfrac{d}{dx}$ を用いて

$$D^2X(x) = \lambda_k X(x) \quad (\Leftrightarrow\ X''(x) = -\frac{\omega_k^2}{v^2}X(x)) \qquad \text{（固有値方程式）}$$

と書き直しましょう（D^2 は線形微分演算子です）．すると，この微分方程式の‘解 $X(x)$ は，D^2 によって，自分が λ_k 倍されるもの’になります．λ_k を D^2 の **固有値** といい，それを与える境界条件の下で解 $X(x) = X_k(x) = d_k \sin\dfrac{\omega_k}{v}x$ が得られましたが，$X_k(x)$ を固有値 λ_k の **固有関数** といいます．その意味で，我々は上の方程式を **固有値方程式**[6] と呼びましょう．

固有値や固有関数は線形代数学において最も重要なものです．事実，この手の方程式は，量子力学において，最も重要な固有値方程式 $\mathscr{H}\varphi = E\varphi$（$\varphi$（ファイ）は波動関数，$\mathscr{H}$ はハミルトン演算子，E はエネルギー）として現れます．行列の章では，線形写像を行列で表すと，固有値方程式 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ が現れます．それは固有値・固有ベクトルの手頃な練習問題を与えるでしょう．

5.3.2.4　波動方程式の解の固有関数展開

ピアノやギターの音は基本振動とその倍振動が重なり合っています．つまり，波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}$ の解は，境界条件の下で，重ね合わせの原理を満たすはずです．以下，そのことを確かめましょう．

波動方程式は，変数分離 $u(x,\ t) = X(x)T(t)$ によって，$X''(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}X(x) = 0$，$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0$ と分離します．さらに境界条件 $X(0) = X(l) = 0$ を付加すると，ω が飛び飛びの値 $\omega_k = \dfrac{k\pi v}{l}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ に制限されました（ω_k は「固有角振動数」といわれます）．その結果，前の §§ で得られた固有関数と呼ばれる $X_k(x)$，$T_k(t)$ に対応する波動方程式の解

$$\begin{aligned} u(x,\ t) = u_k(x,\ t) &= T_k(t)X_k(x) \\ &= (a_k\cos\omega_k t + b_k\sin\omega_k t)\sin\frac{\omega_k}{v}x \end{aligned}$$

が得られます（定数 d_k は a_k と b_k に吸収しました）．

---

6) 一般に，ベクトル空間 V をそれ自身に移す線形写像 T に対して，方程式 $T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つとき，スカラー λ を T の固有値といい，$\boldsymbol{x} \neq 0$ を固有値 λ の固有ベクトルといいます．$T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ はときに（物理用語として）固有値方程式 と呼ばれます．

波の重ね合わせが起こるとすると，波動方程式の最終的な解は $u_k(x,\,t)$ の和で表されるはずです：

$$u(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)\sin\frac{\omega_k}{v}x.$$

このことを保証するのはやはり微分演算子の線形性です．それを見るために，偏微分演算子 $L_{波} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ を導入すると，波動方程式は

$$L_{波}\,u(x,\,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,\,t) = 0$$

と書けます．このとき，$L_{波}$ が線形演算子であることは

$$L_{波}\,(u_k(x,\,t) + u_l(x,\,t)) = L_{波}\,u_k(x,\,t) + L_{波}\,u_l(x,\,t)$$

からわかります（スカラー倍は省略）．それを確かめるのは練習問題です．
ヒント：$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u_k(x,\,t) + u_l(x,\,t))$ を展開する順序に注意．

答：

$$\begin{aligned}
&L_{波}\,(u_k(x,\,t) + u_l(x,\,t))\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u_k(x,\,t) + u_l(x,\,t))\\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_k(x,\,t) + u_l(x,\,t)) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_k(x,\,t) + u_l(x,\,t))\\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_k(x,\,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_l(x,\,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_k(x,\,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_l(x,\,t)\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_k(x,\,t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_l(x,\,t)\\
&= L_{波}\,u_k(x,\,t) + L_{波}\,u_l(x,\,t).
\end{aligned}$$

したがって，偏微分演算子 $L_{波}$ は線形演算子であり，上式で $L_{波}\,u_k(x,\,t) = 0$，$L_{波}\,u_l(x,\,t) = 0$ だから重ね合わせの原理が成り立ちます．

各 $u_k(x,\,t)$ $(k = 1,\,2,\,\cdots)$ は固有値方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_k(x,\,t) = -\frac{\omega_k^2}{v^2}u_k(x,\,t)$$

を満たすので，$u_k(x, t)$ は線形微分演算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ の固有関数です．したがって，無限級数 $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$ は波動方程式の解 $u(x, t)$ を固有関数によって展開した形になっています．

§§5.4.2 一般的ベクトルの内積 で 3 角関数の内積（☞ §§5.4.2.3）を学ぶと固有関数の線形独立性が議論でき，波動方程式の解をベクトル空間の基底と考えることができます．我々の最終目的はそこにあります．

なお，弦の振動などで強制振動が加わると，波動方程式は，運動方程式の議論を経た後，

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f_{\text{強}}(x, t)$$

の形の非同次線形偏微分方程式になります．この方程式の解は，§§5.2.4 における議論とまったく同様に，非同次方程式の 1 つの特解と上で求めた同次方程式の一般解の和になります．

§5.4　内積の公理的議論

ベクトルを公理的に定義するとき，関数さえもベクトルの仲間に入ることがわかりました．ベクトルの内積も公理的に考えることができます．その結果，関数の内積や，関数の間の距離なども定義できるようになります．また，ベクトル（関数）の線形独立性や基底の議論が容易になります．

5.4.1　内積の公理的定義

我々はベクトルのイメージとして矢線，つまり，長さと向きをもつ量を考えています．しかし，§§5.1.2 で議論したベクトルの公理的定義 1°）～8°）を見ると，それには長さを規定するような条件は含まれていないようです．実際，そこで公理的ベクトルの例とされた連続関数や数列・方程式の解には必ずしも長さの性質は必要なく，広い意味でベクトルを考えるときにはベクトルに長さの属性をもたせないほうが自然なのでしょう．しかしながら，長さや角の概念は面積や体積など計量の問題を考えるときに重要であり，平面や空間のベクトルに対しては内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\theta$ は必須な演算です．我々は一般化されたベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ についても，‘ 内積 ’ を公理的に定義することを試みましょ

う．それは‘ §§4.1.3 の内積の 4 つの基本性質を内積の公理と見なす’方法です．それらはまったく自然な性質なのですが，後で見るように，我々がまったく予測しなかった‘ 関数の内積’さえも可能にします.

内積： 実ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して実数値となる積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が定義でき，以下の 4 条件を満たすとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **内積** といいます[7)]：

（i） $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ （対称性）

（ii） $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ （分配法則）
（iii） $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ （k は実数）
（線形性）

（iv） $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ （正値性）

内積が定義されたベクトル空間は **内積空間** または **計量ベクトル空間** と呼ばれます．ベクトル $\vec{a}$ の長さ $\left|\vec{a}\right|$ に当たる $\sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の **ノルム** といわれ，$\|\boldsymbol{a}\|$ または $|\boldsymbol{a}|$ で表します：

$$\|\boldsymbol{a}\| = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

上の内積の公理的定義から，一般化されたベクトルについても幾何ベクトルの内積と同等な表現 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ を導くことができます．そのために，「シュワルツの不等式」

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

を導いておきましょう．まず，実数 x に対して

$$|x\boldsymbol{a}|^2 = (x\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{a}) = x^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = x^2|\boldsymbol{a}|^2, \qquad \text{よって} \quad |x\boldsymbol{a}| = |x||\boldsymbol{a}|$$

が成り立つことに注意して，x の 2 次式 $|\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}|^2$ $(\geqq 0)$ を考えます.

$$\begin{aligned} 0 \leqq |\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})x^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})x + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2x^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})x + |\boldsymbol{b}|^2. \end{aligned}$$

7) 量子力学などで現れる 複素ベクトル の場合は内積の定義は少々変更されます(☞§§7.2.1.1)：内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は複素数.（i）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$（エルミート対称性）.（iii）$(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$（$k$ は複素数）.

よって，上の 2 次式の判別式 D について $\frac{D}{4} = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})^2 - |\,\boldsymbol{a}\,|^2|\,\boldsymbol{b}\,|^2 \leqq 0$ が成り立ちます．したがって，シュワルツの不等式が成り立ちます．これから，2 ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が共に $\mathbf{0}$ でないとき，

$$-|\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,| \leqq (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \leqq |\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,| \iff -1 \leqq \frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{|\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|} \leqq 1$$

が成り立ちます．よって，$\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ が単調減少することに注意すると，

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{|\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

を満たす実数 θ がただ 1 つ定まります．この θ を一般化されたベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **なす角** といいましょう．上の等式は一般化されたベクトルの内積 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ が幾何ベクトルの内積表現を用いて表されることを意味します：

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = |\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|\cos\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi). \tag{$*$}$$

内積の公理的定義（ i ）〜（iv）は幾何ベクトルの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ の 4 つの基本性質を抽象化して内積を定める 4 条件としたものですね．そして，その 4 条件から，幾何ベクトルの内積に一致する内積表現 $(*)$ が得られたわけです．ということは，内積の公理的定義（ i ）〜（iv）は確かに内積であるための必要十分な条件であることを意味しますね．一般に，ある対象のもつ性質を抽象化して得られる公理的定義は，その性質を表すための必要十分な条件になっています．

ここで練習問題．「3 角不等式」

$$|\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,| \leqq |\,\boldsymbol{a}\,| + |\,\boldsymbol{b}\,|$$

を示しなさい．ヒント：シュワルツの不等式 $|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})| \leqq |\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|$ を用います．

答：

$$\begin{aligned} |\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= |\,\boldsymbol{a}\,|^2 + 2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) + |\,\boldsymbol{b}\,|^2 \\ &\leqq |\,\boldsymbol{a}\,|^2 + 2|\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,| + |\,\boldsymbol{b}\,|^2 \\ &= (|\,\boldsymbol{a}\,| + |\,\boldsymbol{b}\,|)^2 \end{aligned}$$

より直ちに得られますね．（宿題．$|\,|\,\boldsymbol{a}\,| - |\,\boldsymbol{b}\,|\,| \leqq |\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\,|$ を示しなさい）．

内積が定義されたベクトル空間において，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の距離 d は

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\,|$$

によって定義されます．これから，距離の基本性質（1）～（3）が導かれます：

（1）　$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geqq 0, \qquad d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$　（正値性，同一性）

（2）　$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$　（対称性）

（3）　$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leqq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$　（3 角不等式）

（1）は 距離の定義と内積の性質 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ から明らか．第 2 式の同一性については，ベクトル（多くの場合，実は関数）の‘酷似性’ $\boldsymbol{a}_n \fallingdotseq \boldsymbol{a}$ は空間上の点の‘至近性’ $d(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}) \fallingdotseq 0$ で表されると了解するのがよいでしょう．（2）は $|\,k(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})| = |k||(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})|$ で $k = -1$ とすれば得られます．（3）は‘2 点間の距離は 直線距離 が最短である’ことを述べています．証明には 3 角不等式の公式をうまく使います：

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) &= |\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\,| = |\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\,| \\ &\leqq |\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\,| + |\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\,| = d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \end{aligned}$$

距離の基本性質（1）～（3）は理論的に重要で，距離の概念を用いて数列の収束や関数の連続性を議論することができます．内積を定義しなくても，距離を定義することは可能で，そのとき基本性質（1）～（3）は距離の公理とされます．

5.4.2　一般的ベクトルの内積

前の §§5.4.1 の内積の公理（ i ）～（iv）を満たせば，ベクトルの内積それ自身はまったく自由に定義できます．その代表的な例を見てみましょう．

5.4.2.1　n 次元数ベクトルの内積

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の内積は平面・空間ベクトルの内積を単に一般化したものです．列ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ に対して

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

と定めます．このとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が内積であることはそれが 4 条件（ i ）～（iv）

を満たすことからわかります：（ｉ）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ は

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n$$

より明らか．（ii）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ として

$$\begin{aligned} &a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \cdots + a_n(b_n + c_n) \\ =&(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + (a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n) \end{aligned}$$

より明らか．（iii）$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は

$$(ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + \cdots + (ka_n)b_n = k(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$$

より明らか．（iv）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ は

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqq 0, \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n = 0$$

だから，成り立ちますね．

5.4.2.2　連続関数の内積

次の例は意外な，しかし，大学では決定的に重要なものです．§§5.1.3.3 連続関数の空間 で議論したように，区間 $[a, b]$ で連続な実関数全体の集合はベクトル空間になり，その要素の関数はベクトルです．そのベクトル空間を $C[a, b]$ で表すとき，$C[a, b]$ の任意のベクトル f, g に対して，

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

と定義します．このとき，(f, g) は，4 条件（ｉ）〜（iv）を満たし，内積になることがわかります：（ｉ）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ は

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx$$

より成り立ちます．（ii）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ は，$h \in C[a, b]$ として

$$\int_a^b f(x)(g(x) + h(x))\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)h(x)\,dx$$

より成り立ちます.（iii）$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は，k を実数として

$$\int_a^b (k\,f(x))g(x)\,dx = k\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

より成り立ちます.（iv）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ は，$a < b$ だから

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \geqq 0, \qquad \int_a^b f(x)^2\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

より成り立ちます．この事実は関数の積の定積分さえも内積と見なせることを意味し，ベクトル空間 $C[a, b]$ は内積空間になります.

このとき，ベクトル f のノルム $\|f\| = \sqrt{(f,\ f)}$ は

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

で与えられます.

5.4.2.3　3 角関数の内積と正規直交系

特に，内積空間 $C[a, b]$ を $C[-\pi, \pi]$ にとり，そのベクトル

$$\cos nx, \quad \sin mx \qquad (m,\ n \text{ は整数}, n \geqq 0,\ m \geqq 1)$$

の内積を考えます．そのとき，§§1.4.3 で得られた 3 角関数の積和公式を用いるとよいでしょう．例えば,

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

より，$\dfrac{d\cos ax}{dx} = -a\sin ax$ だから

$$\begin{aligned}
(\sin mx,\ \cos nx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x - \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が得られます（ $m - n = 0$ のときは積分実行の前に $\sin(m-n)x = 0$ ）．これは $\sin mx$ と $\cos nx$ が‘ 直交する ’ことを意味します.

同様にして,

$$(\sin mx,\ \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases},$$

$$(\cos mx,\ \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi & (m = n \neq 0) \\ 2\pi & (m = n = 0) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が得られます．$\cos 0x = 1$ に注意しましょう．

これらは練習問題としますが，$(\sin mx,\ \sin nx)$ の場合の略解をつけておきます．$m \neq n$ のとき，$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$ より，

$$\begin{aligned}(\sin mx,\ \sin nx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$m = n\,(\neq 0)$ のとき，半角公式 $\sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2}$ より，

$$\begin{aligned}(\sin mx,\ \sin mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2mx)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

一般に，内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ について，それらの長さ（ノルム）がどれも 1 で，かつ，異なるどの 2 つも直交する，つまり

$$(\boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{a}_l) = \left.\begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}\right\}(\,=\delta_{kl}\ \text{と表そう})$$

であるとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots\}$ は **正規直交系** であるといいます．したがって，先の内積の計算結果より，内積空間 $C[-\pi, \pi]$ のベクトル

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

は正規直交系をなしますね（確かめておこう）．

5.4.3　フーリエ級数

正規直交系とベクトル空間の基底との間には，すでに気がついた人も少なくないと思いますが，深い関係がありそうです．また，上の 3 角関数の正規直交系は波動方程式の解である固有関数と関係が深そうです．

5.4.3.1　正規直交系と正規直交基底

n 次元の内積空間 V^n に正規直交系をなす n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ がある場合を考えましょう．

まず，正規直交系をなす，つまり $(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) = \delta_{kl}$ が成り立つので，それらは V^n の線形独立なベクトルになります．その証明は簡単で，$\boldsymbol{a}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ の線形結合を $\mathbf{0}$ とおいた式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

を考え，両辺に $\boldsymbol{a}_l$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$ を内積しましょう．すると，§§5.4.1 の内積の条件（ii）と（iii）より，

$$x_l(\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{a}_l) = 0 \quad \text{よって} \quad x_l = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立ち，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立です．

また，このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の個数 n が V^n の次元に等しいので，それらは V^n の基底になります．その証明も簡単です．$\boldsymbol{a}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ と V^n の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ の線形結合を考えると，それは，$n+1$ 個のベクトルの線形結合なので，線形独立ではありません．つまり，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合の形 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ で表されます．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V^n の基底となり，V^n の任意のベクトルを表すことができます．

5.4.3.2　フーリエ級数

前の §§ で議論した内積空間 $C[-\pi, \pi]$ の正規直交系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

は無限個の関数からなる直交関数系です．‘この直交系の線形結合はどのような関数を表すのでしょうか’．それを調べるために，区間 $[-\pi, \pi]$ が定義域のある関数 $f(x)$ が上の直交系の無限級数で表されるとして議論しましょう：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{F}$$

が成り立つと仮定します．（係数 a_0 は，計算の都合上，2 で割ってあります）．

まず，3 角関数の直交性を利用して，内積 $(f, 1)$ を計算すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = a_0\pi.$$

同様にして，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = a_k\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = b_k\pi$$

から，全ての係数 a_k, b_k が定まります．このように係数を定めた上の級数 (F)（の右辺）を関数 $f(x)$ の **フーリエ級数** といいます（フーリエ：Jean Baptiste Joseph Fourier，1768～1830，フランス）．

さて，フーリエ級数は無限級数ですから，収束の問題があります．さらに，係数を求める際に，無限級数の「項別積分」（$\int \sum_1^{\infty}(\cdots)\, dx = \sum_1^{\infty} \int(\cdots)\, dx$）を行っています．これは，『$+\alpha$』の §14.7 でも示したように，一般には正当化できない操作です．したがって，関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (F) が $f(x)$ に収束する保証はありません．収束問題をきちんと議論することは，残念ながら，このテキストの守備範囲をはるかに超えます．したがって，ここでは 1 つの定理を紹介して，無限級数 (F) を正当化しましょう：

> 関数 $f(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で連続であり，かつ，その導関数 $f'(x)$ は高々有限個の点を除いて連続で，条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ を満たすならば，$f(x)$ のフーリエ級数 (F) は $f(x)$ に収束する[8]．

$f(x)$ が連続の条件は我々にとっては自然でしょう．$f'(x)$ が有限個の点を除いて連続は $f(x)$ が折れ線的でもよいことを述べています．$f(-\pi) = f(\pi)$ はフーリエ級数 (F) の 3 角関数の周期性 $\cos k(x + 2\pi) = \cos kx$, $\sin k(x + 2\pi) = \sin kx$ に由来します．よって，$f(x)$ の定義域を $[-\pi, \pi]$ としないで，周期 2π の周期関数としても構いません．これで，波動方程式の変数分離法による解法が正当化されそうです．

---

[8] 高木貞治 著「解析概論（改訂第 3 版）」（岩波書店）§75 定理 65.

上の定理を満たす関数 $f(x)$ の集合 $C_F[-\pi, \pi]$（$C[-\pi, \pi]$ の部分集合ですね）を考えましょう．そんな関数の和や定数倍は明らかに同じ性質をもちます．したがって，$C_F[-\pi, \pi]$ はベクトル空間（関数空間）であり，その任意の要素はフーリエ級数 (F) つまり線形独立な無限個のベクトル（直交関数系）の線形結合によって表されます．したがって，$\{1, \cos kx, \sin kx\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ はベクトル空間 $C_F[-\pi, \pi]$ の基底であり，その空間は無限次元です．

5.4.3.3　波動方程式の解空間

我々は §§5.3.1.2 で弦の振動方程式 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ を導きました．それに変数分離 $u(x, t) = X(x)T(t)$ をして，境界条件 $X(0) = X(l) = 0$ を付加し，波動方程式の線形性から解の重ね合わせの原理が成り立ち，無限級数解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi}{l} x \qquad \left(\omega_k = \frac{k\pi v}{l}\right) \qquad \text{（波）}$$

を得ました．以下で見るように，これはフーリエ級数です．

まず，$u(x, t)$ の x についての定義域を考えましょう．元々は $[0, l]$ ですが，解には $\sin \frac{k\pi}{l} x = \sin \frac{2k\pi}{2l} x$ が現れるので，$u(x, t)$ を x について奇関数，つまり $u(-x, t) = -u(x, t)$ と考えることができ，定義域を $[-l, l]$ に拡張できます．すると，3 角関数の直交性が容易に確かめられます：

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k'\pi x}{l} \, dx = l\delta_{kk'}.$$

したがって，解の各項つまり固有関数は互いに直交し，固有関数全体は直交関数系をなします．

次に，上の無限級数解（波）の係数 a_k, b_k を定めましょう．それらは，変数分離の 2 階微分方程式 $T''(t) + \omega_k^2 T(t) = 0$ を解く際に現れた，2 個の積分定数です．それらは弦の始めの状態に応じて定まります．つまり，弦の始めの形状 $u(x, 0) = u_0(x)$，および 弦の各点における初速度 $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\Big|_{t=0} = v_0(x)$ を与える「初期条件」から定まります．級数解（波）で $t = 0$ とおくと

$$u_0(x) = \sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'} \sin \frac{k'\pi}{l} x$$

が得られ，部分積分が可能とすると

$$\int_{-l}^{l} u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = a_k l$$

と a_k $(k = 1, 2, \cdots)$ が決まります（確かめよう）．また，級数解（波）を t で偏微分して $t = 0$ とおくと

$$v_0(x) = \sum_{k'=1}^{\infty} b_{k'}\omega_{k'}\sin\frac{k'\pi x}{l}$$

が得られ，同様にして，

$$\int_{-l}^{l} v_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = b_k l\omega_k$$

と b_k $(k = 1, 2, \cdots)$ が決まります（確かめよう）．このようにして得られた無限級数（波）は区間 $[-l, l]$ で定義されたフーリエ級数と見なされます．

弦の振動の変位 $u(x, t)$ を各時刻 t で考えると，変位は $[-l, l]$ で連続であり，また，その形状はなめらかな曲線か，弾くなどしたときに折れ線的だから，その x 偏導関数は高々有限個の点を除いて連続です．また，境界条件 $X(0) = X(l) = 0$，および奇関数として定義域を $[-l, l]$ に拡張したから，$u(-l, t) = u(l, t)$ $(= 0)$ が成り立ちます．したがって，このフーリエ級数（波）は 227 ページの定理を定義域を変更した形で満たし，したがって，その級数（波）は弦の変位 $u(x, t)$（弦の本当の振動）に正しく収束します．

以上，弦の振動方程式（波動方程式）の解を議論しました．解は（変数分離方程式の微分演算子の）互いに直交する固有関数を項とするフーリエ級数（波）の形で表されました．各固有関数は波動方程式の解ですが，方程式が線形なので，固有関数の線形結合（フーリエ級数）も解となり，したがって，解全体はベクトル空間をなします．しかも，固有関数の線形結合は（定められた境界条件・初期条件の）波動方程式のどんな解でも表します．

この波動方程式の解全体の集合（ベクトル空間）を解集合 $W_{波}$ としましょう．各固有関数は解（ベクトル）なのでそれらは $W_{波}$ の要素です．固有関数の線形結合はまた解であり，異なる固有関数は直交し，また固有関数は無数にあるので，$W_{波}$ は無限次元ベクトル空間（関数空間）になります．さらに，無限個の固有関数全体は，その線形結合がどんな解でも表し，かつ，それらは線形独立なので，$W_{波}$ の基底になります（基底をなすベクトルが無限個あるときは，基底 の代わりに，特に「完全系」といいます）．

この章では，ベクトルを公理的に定義する話に始まって，3 元 1 次方程式（線形方程式），線形微分方程式と進んで，解の重ね合わせの原理と方程式の線形性が同じことであるのを理解し，また，波動方程式の変数分離法では固有値・固有関数が現れて，境界条件付きの波動方程式を完全に解くことができました．例を用いた大雑把（おおざっぱ）な解説でしたが，上で述べた事柄が線形代数学のエッセンスそのものであると言ってよいでしょう．そのために，数学は，抽象的なベクトルの概念を用意して関数までもベクトルの範疇（はんちゅう）に取り込み，また，初等関数の概念を極限まで一般化して写像に発展させたのでした．

線形代数の行き着く先には，極微の世界を究明する，量子力学が待っています．その力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \mathscr{H}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t)$$

は見ての通り線形微分方程式です．ハミルトン演算子 $\mathscr{H}$ が時間に依存しないときには，変数分離 $\psi(\boldsymbol{r},t) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\boldsymbol{r})$ が可能となり，固有値方程式

$$\mathscr{H}\varphi = E\varphi$$

を解くことができれば，エネルギー E がどんな値をとり，対応する固有関数 φ がどんな状態を表すかが原理的には全てわかります．

以上の事柄を念頭において，我々は，次の第 6 章へと駒（こま）を進め，線形代数の雛形である行列を詳しく学びましょう．我々は行列を n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 f の「表現」として理解します．次の章では，行列が関係する種々の詳細事項を学び，固有値問題の詳しい議論は第 7 章で行いましょう．