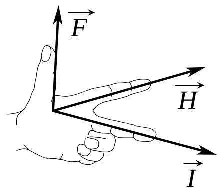
この 1 通りでないことを逆手にとります．平面 B は（共には 0 でない）実数 p, q の‘任意の値に対して’直線 ℓ を含みます．実際，直線 ℓ 上の全ての点は，任意の実数 p, q に対して，B の方程式を満たします．その意味で，‘B は直線 ℓ を含む平面の集団’を表しています．そして，その集団は直線 ℓ を回転軸として平面 α や β を回転すると得られます．実数 p, q（の比）を定めて直線 ℓ を含む平面を決定するには，例えば，（ℓ 上にない）任意の 1 点を通るという条件を付け加えればよいでしょう．

最後に練習問題をやりましょう．直線 $x = y = z$ を含み点 (1, 0, 0) を通る平面を求めなさい．ヒント：B の方程式を利用します．
解答：直線 $x = y = z$ を含む平面 B の方程式は

$$B : p(x - y) + q(y - z) = 0 \quad (p^2 + q^2 \neq 0)$$

と表すことができ，点 (1, 0, 0) を通るから，$p = 0$．したがって，$q \neq 0$ だから，答は $y - z = 0$ ですね．

4.3.4　外積

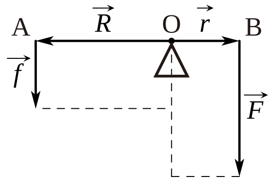


2 つの空間ベクトルの積が，内積の場合と異なり，再び空間ベクトルになるような積の定義があり，それを「外積」といいます．外積は科学・技術の発展に不可欠なものでした．以下，シーソーの例から始まる「力のモーメント」（物体を回転させる力）で外積を解説しますが，外積はモーターの原理である「フレミングの左手の法則」（図に示すように，電流 $\overrightarrow{I}$ が磁場 $\overrightarrow{H}$ の中で受ける力 $\overrightarrow{F}$ は $\overrightarrow{I}$ と $\overrightarrow{H}$ の外積 $\overrightarrow{I} \times \overrightarrow{H}$ に比例します），また発電機の原理である「フレミングの右手の法則」など多くの重要な例があります．フレミングの法則は磁力の不思議な性質を表しており，電磁現象を正しく記述するには外積は絶対です．

2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の両方に直交するように定義されます．これを利用すると，平面の法線ベクトルは平面上の 2 つのベクトルの外積を用いて求めることができます．例えば，§§4.2.2 で議論した 3 点 A, B, C を通る平面 α の法線ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ は $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とできます．

4.3.4.1　シーソー

我々は，§§ 3.5.3 で，物体の各部に働く重力の合力は全てその重心に働くかのように扱ってよいことを見ました．その力は物体を回転させるものではありませんね．今度は‘物体を回転させる力’を調べましょう．



右図のシーソーの例で考えてみましょう．シーソーの端 A に子供が座りました．子供には重力 $\vec{f}$ が働くので，シーソーには中心 O の周りに左回り（反時計回り）に回転させる力が働きます．A と反対側の位置 B に大人が座りました．大人は重力 $\vec{F}$ を受け，シーソーには右回りに回転させる力が働きます．両者の回転させる力が釣り合うのはどんな場合でしょうか．君たちは，日常の経験から，「てこの原理」と呼ばれるその答を知っていますね．位置ベクトル $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ を用いると，釣り合うのは

$$\left|\vec{R}\right|\left|\vec{f}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|$$

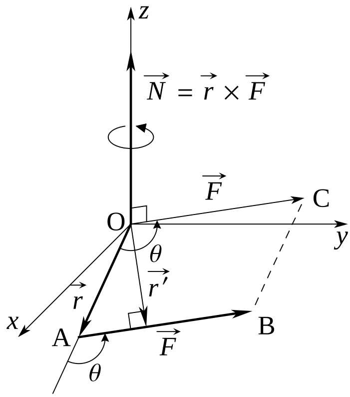
が成り立つ場合ですね．これを図形的にいうと，$\vec{R}$ と $\vec{f}$ が作る長方形の面積が $\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る長方形の面積に等しい場合です．ただし，この条件は回転の向きについては触れていません．正しい釣り合いの条件は回転の向きも考慮した場合に得られます．

今の場合，（大人の例でいうと）位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ は直交しており，それらの長さの積 $\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|$ は **力のモーメント** と呼ばれます．力のモーメントは‘回転を引き起こす力に直接関係する量’として定義されました．残念ながら，この定義では，回転の向きを表すことができず，またそれらのベクトルが直交しない場合には適用できません．これらの事柄を考慮して，力のモーメントを一般化しましょう．

4.3.4.2　回転の向きを表す力のモーメント

回転の向きを考慮し，また，位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ が直交しない場合も想定して，力のモーメントを一般化することを考えましょう．それは $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の‘ある種の積’を力のモーメントと考えれば可能です．簡単な場合から始めましょう．

力が働いて物体が回転するとき，‘回転の中心’となるのは，（ア）（シーソーのように固定された）回転軸か，（イ）物体の重心です．回転の中心を原点 O として，xy 平面上の点 A を作用点とする xy 平面上の力 $\vec{F}$ が働いて回転を引き起こす場合を考えましょう（回転と関係のないことは無視します）．



一般には位置ベクトル $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と力 $\vec{F}$ は直交しません．その場合，$\vec{r}$ の $\vec{F}$ に直交する成分を $\vec{r}'$ とすると，力のモーメントの大きさは，てこの原理より，$|\vec{r}'||\vec{F}|$ で与えられます．この大きさは‘$\vec{r}$ と $\vec{F}$ が作る平行四辺形の面積 S’に等しくなりますね：

$$S = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta = |\vec{r}'||\vec{F}|.$$

さて，力 $\vec{F}$ による回転の向きを考えましょう．回転中心は原点 O で，$\vec{r}$ と $\vec{F}$ は共に xy 平面上にあるとしているので，物体の回転軸は z 軸です．したがって，‘回転軸は $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の両方に直交’しています．このとき，回転の向きは（z 軸の正の方向から見て）右回りか左回りの 2 通りあります．どちらであるかは位置ベクトル $\vec{r}$ と力ベクトル $\vec{F}$ の相対的な向きの関係で決まります．$\vec{r}$ を（180° 以内で）回転してその向きが $\vec{F}$ の向きと同じになるようにしましょう．その回転の向きは回転軸周りの回転の向きと同じですね．図の例は，その回転角を θ で表し，左回りを表すために回転角を表す弧に矢印をつけています．

この回転軸と回転の向きの情報を力のモーメントにとり入れましょう．それを行うにはネジの回転を考えるとよいでしょう．ネジを板に刺して‘右回りに回す’とネジは進みますね．ネジを回転軸上においてみましょう．ただし，ネジの先は，$\vec{r}$ を $\vec{F}$ と同じ向きになるように回転したときに，ネジが進む向きにとります．このようにおかれたネジはベクトルの向きの性質をもちます．そこで，力のモーメントを一般化してベクトルに昇格させ，そのベクトルの向きを回転軸におかれたネジの向きにとりましょう．こうすることによって，力 $\vec{F}$ が引き起こす回転の向きを‘ベクトルとしての力のモーメント $\vec{N}$’の向きに対応させることができるわけです．

$\overrightarrow{N}$ は，その大きさが $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ が作る平行四辺形の面積なので，今の向きの議論とあわせると，ベクトルとして完全に定義されたことになります．そこで，一般の位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ と力のベクトル $\overrightarrow{F}$ に対して力のモーメント $\overrightarrow{N}$ を定義することができます．$\overrightarrow{N}$ は $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ から作られたので

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

と表し，$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ を $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ の **外積** と呼ぶことにしましょう．

> 外積 $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ は，その大きさが $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ が作る平行四辺形の面積に等しく，その向きは，$\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ の両方に直交し，かつ $\overrightarrow{r}$ を回転 ($\leqq 180°$) して $\overrightarrow{F}$ に重なるようにネジを回転させたときに，ネジが進む方向と定めます．

先にシーソーのところで，子供と大人に働く重力による回転の働きの釣り合いを議論しました．力のモーメントの外積表現を用いると，外積 $\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{f}$ と $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ は大きさが等しく，向きは反対のベクトルになるので，シーソーの釣り合いは

$$\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{f} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

のように表現できます．左辺の外積の和は全体の力のモーメントが各モーメントの和として表されることを意味します．

なお，力のモーメント $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ の議論において，力 $\overrightarrow{F}$ が k 倍になった，または座る位置 $\overrightarrow{r}$ が k 倍になったとすると力のモーメントも k 倍になりますね．このことは，外積が実数倍について

$$\overrightarrow{r} \times (k\overrightarrow{F}) = (k\overrightarrow{r}) \times \overrightarrow{F} = k(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F})$$

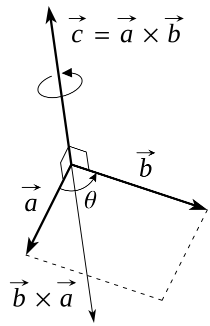
の性質をもつことを意味します．これは k が負のときも成立します．

また，力 $\overrightarrow{F}$ に加えて力 $\overrightarrow{F'}$ が同じ点に働いた場合の全体の力のモーメントは，$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F'}$，または $\overrightarrow{F}$ と $\overrightarrow{F'}$ の合力を先に求めて，$\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F'})$ によって求められます．このことは，外積に対して，分配法則

$$\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F'}) = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F'}$$

が成り立つことを要請しています．

4.3.4.3　外積の演算法則



力のモーメント $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ の話はひとまず終えて，一般のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ の演算法則を確認しましょう．それがわかると外積の表現，つまり成分表示ができるようになります．

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は，(i) その大きさが 2 ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$（なす角 θ）が作る平行四辺形の面積に等しく：

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta,$$

(ii) その向きは $\vec{a}$ を $\vec{b}$ と同じ向きになるように（180° 以内で）回転したときにネジが進む方向であると定めましょう．この定義は外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交することを含みます．

外積は，力のモーメントのところで触れたように，実数倍について

$$\vec{a}\times(k\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$$

の性質をもち，また，分配法則

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

を満たします．これらの性質は外積の定義から直接導くこともできます．

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は同じものでしょうか．両ベクトルは，同じ長さで，共に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交します．しかしながら，$\vec{a}$ を $\vec{b}$ と同じ向きにする回転角を $+\theta$ とすると，$\vec{b}$ を $\vec{a}$ と同じ向きにする回転角は $-\theta$ です．よって，両者は向きが反対になり，外積は

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

という奇妙な性質をもつことがわかります．この性質は，君たちが初めて体験する‘交換法則が成り立たない例’でしょう．

この性質を上述の外積の基本性質に適用すると，（ベクトルの記号を適当に変えて）

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が得られ，外積が関係する演算法則が完成します．

4.3.4.4　外積の成分表示

準備が整ったので，ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の成分表示からそれらの外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ の成分表示を求めましょう．

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とすると，それらは，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ を用いて

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$$

と表されます．よって，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ の計算は，外積の演算法則を用いて展開すると，基本ベクトルの外積計算に還元されますね．

例えば，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ は，それぞれ，x 軸，y 軸の正の方向を向く長さ 1 のベクトルなので，外積 $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ は z 軸の正の方向を向く長さ 1 のベクトル，つまり $\overrightarrow{e_3}$ になりますね：$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$．他の基本ベクトルの外積も同様に考えて，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} &= \overrightarrow{e_3}, \quad & \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} &= -\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} &= \overrightarrow{e_1}, \quad & \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} &= -\overrightarrow{e_1}, \\ \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} &= \overrightarrow{e_2}, \quad & \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} &= -\overrightarrow{e_2}, \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$$

が得られます．

これらの結果を用いると，多少の単純な計算の後

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) \times (b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

が得られ，したがって，外積の成分表示

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

が得られます（確かめましょう）．

この成分表示を用いて外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に直交することを確かめることは内積を用いると簡単にできます．外積の大きさ $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しいことを確かめるには，$\vec{a}, \vec{b}$ の作る平行四辺形の面積 S が公式

$$S = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

で与えられることを用います．こちらのほうは結構大変ですが，確かめることを勧めます．

4.3.4.5　外積の応用

外積の成分表示は覚えにくいので，まず，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の外積を簡単に計算する方法から始めましょう．右表にあるように，$\vec{a}, \vec{b}$ の成分を縦に並べます．ただし，y, z, x, y 成分の順で y 成分は二度書きます．次に y, z 成分の積を表の実線や破線の組合せで計算します．実線の積 a_2b_3 から破線の積 a_3b_2 を引いた数が $\vec{a} \times \vec{b}$ の x 成分 $a_2b_3 - a_3b_2$ になります．このように一見奇妙な計算になったことは $\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$，$\vec{e_3} \times \vec{e_2} = -\vec{e_1}$ に起因します．他の成分についても同様にして外積の成分表示が得られます．

$$\begin{array}{cccc} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{a} \times \vec{b} \\ y: & a_2 & b_2 & \\ & & & a_2b_3 - a_3b_2 \\ z: & a_3 & b_3 & \\ & & & a_3b_1 - a_1b_3 \\ x: & a_1 & b_1 & \\ & & & a_1b_2 - a_2b_1 \\ y: & a_2 & b_2 & \end{array}$$

では，練習です．$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めなさい．答：$\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ですね．$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ の両方に直交することを確かめましょう．

もう 1 題．3 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(4, -2, 4)$, $\mathrm{C}(-1, 1, 3)$ を通る平面 α の方程式を求めなさい．

解答：平面 α のベクトル方程式は $\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表され，その法線ベクトル $\vec{\alpha}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に直交します．よって，外積を用いて，

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

と $\vec{\alpha}$ が求まります．この $\vec{\alpha}$ を α のベクトル方程式に内積して，$\alpha\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

よって，平面 α の方程式 $x-2y-11z+36=0$ が得られます．

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさが $\vec{a},\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しいことから，空間の 3 角形の面積の公式が得られます．△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

で表されます．特に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}a\\c\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}b\\d\\0\end{pmatrix}$ のように z 成分が 0 のときは，

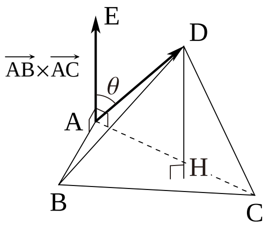
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}a\\c\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b\\d\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|ad-bc|\ \left(=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|\text{と表す}\right)$$

となって，平面ベクトルの場合に §§3.8.2 で得られた公式に一致します．上の式に現れた $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}(=ad-bc)$ が 2 次の「行列式」です．

最後に挑戦問題です．四面体 ABCD の体積 V は，外積と内積を用いて

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$$

と表されることを示しなさい．ヒント：右図.

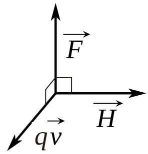


解答：頂点 D から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とすると，体積は $V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}$ で与えられますね．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|$，また DH は $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ 方向成分の大きさです：$\mathrm{DH}=\mathrm{AD}\,|\cos\theta|$（$\theta$ は $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ のなす角）．したがって，四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AD}\,|\cos\theta|\\&=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|.\end{aligned}$$

行列の章で学ぶように，ベクトルの成分表示を用いて，この公式は 3 次の行列式で表すこともできます．また，外積の成分表示も 3 次の行列式で表現できます．

4.3.4.6　ローレンツ力



この §§ の始め（171 ページ）で言及したように，フレミングの左手の法則は，電流 $\overrightarrow{I}$ が磁場 $\overrightarrow{H}$ の中で受ける力 $\overrightarrow{F}$ は $\overrightarrow{I}$ と $\overrightarrow{H}$ の外積 $\overrightarrow{I}\times\overrightarrow{H}$ に比例することを表します．電流 $\overrightarrow{I}$ は文字通り電荷の流れですから，$\overrightarrow{I}$ は電荷の量 q と電荷の速度 $\overrightarrow{v}$ の積 $q\overrightarrow{v}$ に比例します：$\overrightarrow{I}\propto q\overrightarrow{v}$．したがって，フレミングの左手の法則は ‘ 磁場 $\overrightarrow{H}$ の中で速度 $\overrightarrow{v}$ で運動する電荷 q が受ける力 ’

$$\overrightarrow{F}=kq\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{H} \qquad (k \text{ は正の比例定数})$$

のように表現できます．このような力は「ローレンツ力」と呼ばれ，磁気現象の基本的な力となっています．右上の図からわかるように，電荷はその ‘ 速度 $\overrightarrow{v}$ に垂直な力 ’ を受けます．

ではここで，君のセンスを問う問題です．電荷 q を空中にそっと置きます（電気的な力を利用すれば可能です）．そのとき，電荷に強力な磁場 $\overrightarrow{H}$ をかけました．電荷はどのような動きをするでしょうか．

答：電荷は速度がないのだから，磁気力は働きませんね．したがって，電荷は静止したままです．

Q1.　3 ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が線形独立である必要十分条件は $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$ がゼロでないことを示しなさい．

A1.　$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が線形独立の条件「$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+u\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; s=t=u=0$」は，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ がどれも $\overrightarrow{0}$ でなく，またそれらを同一平面上に描けないことを意味します．一方，条件 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\neq 0$ は $\left|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\right|\neq 0$ と同じです．$\left|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\right|$ は $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を表し，それが 0 でないことは 3 辺がどれも 0 でなく，またその 3 辺を同一平面上に描けないことを意味します．したがって，条件 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\neq 0$ は $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が線形独立であるための必要十分条件です．

なお，2 ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が線形独立である必要十分条件は $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ がゼロでないことです．これを示すのは宿題としましょう．