第5章　ベクトルの公理的議論

ベクトルの数学的基礎は，第 3 章の始めに述べたように，19 世紀の中頃ハミルトンやグラスマンらによって確立しました．グラスマンはすでに「n 次元ユークリッド空間」について研究しています．

また，第 4 章の始めに述べたように，19 世紀末にはペアノがベクトルの抽象的な定義（☞§§4.1.1.3）を与えました．彼は，1888 年に刊行した『幾何学的算術』で，多項式からなる 1 変数関数はベクトルの定義を満たし，線形独立な多項式は無数にあるからその関数の集合の要素は無限にある，つまりその集合は無限次元であるとも記しています．これは，ベクトルの定義を満たす無数の関数の集合が‘ 無限次元のベクトル空間[1] ’であることを意味します．ただし，それが広く認められるにはその後 30 年以上を要しました．

物理現象は「微分方程式」の形で定式化されます[2]．例えば，弦や膜の振動，音波や電磁波の振る舞いは（境界条件・初期条件付の）「波動方程式」を解いて得られますが，その一般解は各々の振動数（固有値）に対応する「固有関数」の線形結合つまり「重ね合わせ」によって表すことができます．一般に，境界条件・初期条件のある「線形微分方程式」は「積分方程式」の形に書き直すことができ，固有値や固有関数も調べやすくなります．20 世紀の初頭に，フレッ

---

[1] 馴れないうちは集合を‘ 空間 ’と呼ぶことに抵抗があるでしょう．空間ベクトルの終点は 3 次元空間の‘ 点 ’と同一視できるので，空間ベクトルの集合は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ と見なすことができます．その類似性から，集合に何らかの構造が与えられ，幾何学的イメージを伴って語られるとき‘ 空間 ’と呼ばれます．特に，関数がベクトルの定義を満たす集合であるとき「関数空間」といいます．そのとき，各関数は空間上の‘ 点 ’と見なされます．

[2] この後の数学史の記述は‘ 現在学んでいる線形代数の奥に控えている広大な数学理論 ’をあえて名前だけ紹介します．以下読むとわかるように，それらは，深い霧の中に‘ 何とかベクトル ’，‘ 何とか空間 ’，‘ 行列何とか ’，‘ 何とか方程式 ’，‘ 作用素 ’，‘ 固有値 ’，‘ 固有関数 ’などと記した道標（みちしるべ）が立っている程度でしょう．当面は“ そんな数学があるからいま線形代数を学ぶのか ”と理解すれば十分です．君たちがこの章全体を学んだ後は，線形代数学の奥深さを嗅ぎとり，数学を勉強する意欲が沸いてくることを期待しています．

ドホルム（Erik Ivar Fredholm，1866〜1927，スウェーデン）は，彼の名前を冠する積分方程式を有限次元の連立 1 次方程式で近似するというアイデアから出発し，「行列式」を用いて 1 次方程式を解く通常の方法を巧みに応用して積分方程式の解を調べました．この方法は当時の数学者達の関心を呼び，数学の公理化を打ち立てた数学界の巨匠ヒルベルト（David Hilbert, 1862〜1943，ドイツ）も積分方程式を論じています．関数を関数に移す写像を「作用素」といいますが，ヒルベルトは方程式の「積分作用素」がその固有関数で展開できることを用いて問題を整理しました．方程式の解がベクトルの条件を満たすとき解の集合はベクトル空間となり，‘固有関数の集合がその空間の正規直交基底になります’．積分方程式を研究する際に，ヒルベルトが解の関数空間に課した‘2 乗可積分’の条件は後にその関数空間を「ヒルベルト空間」と呼ぶ所以（ゆえん）になりました．

1922 年，ポーランドの若き数学者バナッハ（Stefan Banach, 1892〜1945）は学位論文『抽象集合における作用素とその積分方程式への応用』を出版しました．彼の方法は，性質のよい特殊な関数を用いて積分方程式の解を表そうというものではなく，ある条件を満たす関数の集合を考えて作用素についての一般的定理を導こうというものです．その条件とは，集合の要素（関数）がベクトルの公理的定義を満たすこと，および，それによって得られるベクトル空間（関数空間）上でベクトル（関数）の（一般化された）ノルムによる「距離」を設定し，距離に関して「完備」と呼ばれる条件（空間上の収束する関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限値 $f_\infty(x)$ が同じ空間の要素になること）を満たすというもので，そのような関数空間は「バナッハ空間」と呼ばれます．個別の関数の特殊性に頼らない彼の方法は，作用素を研究する強力な武器「関数解析学」を与え，数学界に大きな影響がありました．1932 年，彼の記念碑的著述『線形作用素論』が出版されたときには，ベクトル空間の抽象的概念はもはや数学用語の一部になっていました．

1925 年, 23 才の神童ハイゼンベルグ（Werner Karl Heisenberg, 1901〜1976, ドイツ）は原子の振る舞いを説明する量子の力学「行列力学」を生み出しました．これに対して，オーストリアのシュレーディンガー（Erwin Schrödinger, 1887〜1961）は波動方程式による「波動力学」を定式化しました．ヒルベルト

は, “ 悪魔がまちがって人間の姿をしている ” とまで評された，当時 23 才の天才フォン・ノイマン（John von Neumann, 1903〜1957，ハンガリー）に量子力学の解説を求めました．ハイゼンベルグの講義を聴いたフォン・ノイマンは, ‘ ハイゼンベルグの行列理論もシュレーディンガーの波動理論も無限次元の複素ヒルベルト空間におけるベクトルを指し示している ’ というノートをまとめて，ヒルベルトに手渡しました．これをきっかけに，彼らは量子力学の数学的に厳密な表現の仕事に向かい，それは 1932 年に出版された『量子力学の数学的基礎』に集大成されました：ヒルベルト空間は，ベクトルの公理的定義を満たし，（一般化された）内積が定義され，それから導かれる距離に関して完備なバナッハ空間です．量子力学系の運動状態はヒルベルト空間のベクトル（「状態ベクトル」）によって表され，観測可能な量つまり物理量はその空間の「線形自己共役作用素」（「線形エルミート演算子」）によって表され，また 運動状態 A において運動状態 B を見いだす確率は状態ベクトル $\overset{\text{プサイ}}{\psi_A}$ と ψ_B の内積の絶対値の 2 乗 $|(\psi_B, \psi_A)|^2$ で表されます．物理量 F は，ハイゼンベルグの理論においては，2 つの固有ベクトル ψ_k, ψ_l で F を挟む形の内積を成分とする行列 $(F)_{kl} = (\psi_k, F\psi_l)$ で表現されます．また，シュレーディンガー理論では，F は「微分演算子」を巻き込むような形の作用素で表現されます.

§5.1　ベクトルの公理的議論と線形空間

5.1.1　‘ 公理系 ’ の意味すること

公理は ‘ 証明なしに（正しいと見なして）採用される根本命題 ’ ですね．数学では（内部矛盾を引き起こさない）いくつかの公理をまとめて **公理系** とし，それを理論の出発点として関係する全ての定理を導きます．その雛形は平面幾何学におけるユークリッドの公理系で，それは君たちのよく知っている平面幾何の定理を全て導きだします．『+α』の §§1.4.2 で議論したように，実数の公理系においては，分配法則などから，‘ 負 × 負 = 正 ’ であることも証明できました．また，『+α』の §§1.5.3 では,「ペアノの公理系」によって，自然数をその全体の集合として明確に定義しました．その公理系を満たす対象が自然数であるというわけです.

§§4.1.1.3 のベクトルの公理的定義では，平面および空間の幾何ベクトルや数ベクトルに共通する一連の演算法則を選びだし，ベクトルの公理系を考えました．それらはベクトルの計算に必要最小限な演算法則であり，ベクトルとしての性質を規定するのに必要十分な条件であると考えられます．それは“ベクトルにはこれこれの性質がある”というのではなく，“これこれの性質があるものがベクトルである”という考えに根ざしており，

‘ベクトルと呼ぶにふさわしい対象には，それが従うべき計算規則があり，
その規則に従うものは，見かけに関係なく，全てベクトルと定める’

というわけです．その考えによると，§§4.1.1.2 のベクトルの演算法則で議論したように，実数や複素数はその条件を満たし，したがって両者共にベクトルと見なされます．実際，複素数は平面ベクトルに似た振る舞いをします（両者を区別するには，さらに付加される演算法則，例えば積についての両者の違いを見ます）．

数学的対象を公理系によって定義し，理論を公理系のみから完全に演繹的に展開することを確立したのはヒルベルトであり，それは 1899 年の『幾何学基礎論』に著(あらわ)されました．『+α』の §§1.5.3.2 公理主義 でも議論したように，彼が“点・直線・平面という代わりに，テーブル・椅子・ビールジョッキということができる”と言ったことは有名です．

対象の名称はどうでもよく，
対象間の関係や計算を定めるルールがすべてを決定する

というわけです．彼の理論は幾何学を超えて数学全般に多大な影響を与えました．これに匹敵する貢献は，数字の代わりに文字を用いる数学つまり代数学を確立したデカルト（René Descartes，1596〜1650，フランス）の 1637 年の著作『幾何学』でしょうか．20 世紀に入り，すべての数学理論は公理系の上に構築されていきました．

ベクトルの公理的定義（☞§§4.1.1.3）で議論したことは，‘8 つの条件を満たす量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$（なら何であっても，それら）をベクトルと定義しよう’ということです．これらの条件は非常に緩い条件であり，ベクトルの次元は ∞ でもよく，また，ベクトルが $f(x)$ などと書かれていてもいっこうに構いません．以下，そんな定義方法について具体的に議論しましょう．

5.1.2　ベクトルの公理的定義

ベクトルの公理系によって定義されるベクトル（の候補）を今後は太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とか $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ などで表し，§§4.1.1.3 の 8 条件を正しく書き下しましょう．

空でない集合 V の任意の要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ が定義され，また，V の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ に対してスカラー倍 λ（ラムダ）$\boldsymbol{x} \in V$ が定義されるとします（スカラー λ はベクトルでない量を指し，実数または複素数です）．このとき，以下の条件 1°）〜8°）が満たされるとき，V の要素を **ベクトル** といい，集合 V を **ベクトル空間** または **線形空間** といいます：

1°）任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} \qquad \text{（交換法則）}$$

2°）任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z} \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) \qquad \text{（結合法則）}$$

3°）**零元** と呼ばれる要素 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在し，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} \qquad \text{（零元の存在）}$$

4°）任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対してその **逆元** $-\boldsymbol{x} \in V$ が存在する：

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{（逆元の存在）}$$

5°）任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ と任意のスカラー λ に対して

$$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$$

6°）任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と任意のスカラー $\lambda,\ \mu$（ミュー）に対して

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$$

7°）任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と任意のスカラー $\lambda,\ \mu$ に対して

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \lambda(\mu\boldsymbol{x})$$

8°）任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して単位のスカラー 1 が存在する：

$$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

以上の 8 条件を満たすのが‘ベクトル’というわけです（もちろん，より根源的な公理系をなす反射律：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$，対称律：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$，推移律：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ は成り立つとします（☞§§2.1.1））．これら 8 条件はごく普通の計算規則であり，ベクトルならこれらを満たすのは納得できますね．ただし，この 8 条件で十分だと納得するには多くの経験が必要でしょう．

注意すべきは，条件 1°）〜8°）のどれもがベクトルの和またはスカラー倍を含みますが，もしそれらが元のベクトル空間 V に属さなくなると 8 条件は意味をなしません．したがって，公理系の始めに述べられている‘ 前提条件 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ と $\lambda\boldsymbol{x}\in V$ が実は最も肝要な条件 ’ です．これは，我々が出会う方程式の解の集合がベクトル空間かどうかという場合に，現実の問題として浮上してきます.

5.1.3　ベクトル空間と基底

5.1.3.1　*n* 次元数ベクトル空間

まず，条件 1°）〜 8°）は，平面ベクトル・空間ベクトルに共通する性質を抽出しているので，次元を定める条件を含みません．したがって，この 8 条件が通常の連立方程式のようにベクトル $\boldsymbol{x}$ の解を定めるとは考えにくいですね．そこで，次元を外からもち込んでみましょう．n 個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を成分とする **n 次元数ベクトル**（ここでは列ベクトルとします）

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ (= (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T \text{ とも表す})$$

が条件 1°）〜 8°）を満たすかどうかを確認しましょう（右辺の行ベクトルの右肩の記号 T は行列に出てくる「転置行列」を表す記号です)．全ての実数の集合を $\mathbb{R}$ で表し，この数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ とします．任意の 2 つの n 次元列ベクトルを

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

として，ベクトルの相等，和，スカラー倍を以下のように定義します：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \cdots,\ x_n = y_n,$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n)^T,$$

$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n)^T \qquad (\lambda \text{は実数}).$$

このとき，ベクトルの和やスカラー倍は各成分で実数の和や実数の積で定義されるので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，$\lambda\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ が成り立つのは明らかですね．成分で考えれば

よいので，公理的定義の条件は事実上 §§2.1.1 で議論した実数の交換・結合・分配の 3 法則などに還元できます．例えば，1°）の交換法則 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ は実数のそれ $x_i+y_i=y_i+x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に還元され，成り立つことがわかります．したがって，n 次元数ベクトルが条件 1°）〜8°）を満たすことを示すのは簡単な練習問題です．（解説： 2°）は $(x_i+y_i)+z_i = x_i+(y_i+z_i)$ と同じだから成立．3°）は $x_i+0=x_i$ と同じです．4°）は $x_i+(-x_i)=0$ と同じね．5°）は $\lambda(x_i+y_i)=\lambda x_i+\lambda y_i$ と同じ．6°）は $(\lambda+\mu)x_i=\lambda x_i+\mu x_i$ と同じ．7°）は $(\lambda\mu)x_i=\lambda(\mu x_i)$ と同じ，8°）は $1x_i=x_i$ と同じです）．以上のことから，n 次元数ベクトル全体の集合 $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間（線形空間）であることが示されました．$\mathbb{R}^n$ を **n 次元数ベクトル空間** といいましょう．

上の例は公理的にベクトルを定める方法の雛形になっています：集合 V を設定し，その任意の要素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に和やスカラー倍などの必須な演算を定めます．このとき，条件 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$\lambda\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$ が満たされていることが絶対であり，このことを‘ 集合 V は加法とスカラー倍に関して **閉じている** ’といいます．そして，条件 1°）〜 8°）を満たすことが示されたならば，集合 V はベクトル空間であることが確定します．したがって，ベクトルの公理的定義によって定まるのは，V の個々の要素のベクトルというよりは，その全体の集合 V のほうであるといえるでしょう．

5.1.3.2　基底と次元

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を議論しましたが，n 次元ベクトルの n は任意の自然数で差し支えなく，1 次元ベクトルは実数，2・3 次元なら平面・空間ベクトルですね．もし $n \geqq 4$ のときは対応する現実の空間はありません．しかしながら，‘ 数学における次元 ’は本来‘ この世 ’の空間の次元とはまったく無関係で，数学では単に演算ができればよく，次元は変数や未知数などの個数などとすることができます．したがって，次元 n はしばしば非常に大きくなり，ときとして $n=\infty$ の場合もあります．

まもなく学ぶように，§§5.1.2 における‘ 公理が許すベクトル ’には関数も含まれます．そんなベクトルに対して，次元はどう考えればよいでしょうか．我々はベクトルの線形独立性を頼りにして‘ 数学的次元 ’を考えます．そのために，我々は「基底」という概念が必要です．

基底：ベクトル空間 V において，次の 2 条件を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ が存在するとき，$\{\boldsymbol{a}_k\}$ を V の **基底** といいます．
（ i ）$\{\boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合によって V の任意のベクトルを表すことができる．
（ii）n 個の $\{\boldsymbol{a}_k\}$ は線形独立である（$\{\boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合は V のベクトルをただ 1 通りに（一意的に）表す）．このとき，V は n 次元であるといいます（V の基底はその選び方に依(よ)らずに n 個のベクトルからなります）．

まずは数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ で基底を例解しましょう．$\mathbb{R}^n$ には n 個の基本ベクトルがあり，それらは

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \cdots, 0)^T, \quad \boldsymbol{e}_2=(0, 1, \cdots, 0)^T, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n=(0, 0, \cdots, 1)^T$$

ですね．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ をそれぞれ実数倍したものの和，つまりそれらの線形結合 $x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ は，$\mathbb{R}^n$ の定義より

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

だから，条件（ i ）を満たし，$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルは基本ベクトルの線形結合によって表されます．このとき，基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_k\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ は空間 $\mathbb{R}^n$ を **張る** または **生成する** といいます．条件（ii）が成り立つことは

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T=\boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ x_1=x_2=\cdots=x_n=0$$

からわかりますね．

以上の議論から，$\{\boldsymbol{e}_k\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，特に，それらは基本ベクトルなので **標準基底** と呼ばれます．これから，空間 $\mathbb{R}^n$ の次元は n であることがわかります（次元の定義の厳密な検証については，演習問題【4.1】（180 ページ），および 演習問題【6.6】（300 ページ）を参照しましょう）．

5.1.3.3　連続関数の空間

さて，連続関数も線形空間のベクトルと見なせることを示します．線形空間の概念が如何(いか)に広大で深遠であるかを凝視しましょう．簡単のために，区間 $I=(a, b)$（または $[a, b]$）で定義された実数値連続関数を考えます．§§1.7.1 で議論した一般化された関数つまり写像の記法を用います．写像の考え方に慣れていない人は，以下の議論は非常に重要なので，今一度読み返しましょう．

区間 I で定義された任意の実数値連続関数 f, g に対して，和 $f+g$ とスカラー倍 λf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad (\lambda\text{は実数})$$

で定義します．まず，この定義が何を意味するか，関数という観点から調べましょう．（解説しようかと思いましたが，やめて）練習問題にします．

ヒント：§§1.3.2 関数概念の一般化 1 を読み直せば簡単です．

答：関数 f はその定義域の各要素 x を関数値 $f(x)$ に移しますね．したがって，上の定義は‘和 $f+g$ は要素 x を関数値 $f(x)+g(x)$ に移し，スカラー倍 λf は要素 x を関数値 $\lambda f(x)$ に移す’と定めています．実数値連続関数の和とスカラー倍は同じく実数値連続関数になることに注意しておきます．

さて，第 3 の連続関数 h，および常に 0 になる「零関数」O $(O(x)=0)$ を用意すると，先に与えた関数の和とスカラー倍の定義に注意して，条件 1°）〜8°）は以下のように書き表されます：

1°）$f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$，2°）$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$，3°）$f(x)+O(x) = f(x)$（零元の存在），4°）$f(x)+(-f(x)) = O(x) = 0$（逆元の存在），5°）$\lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x)+\lambda g(x)$，6°）$(\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x)+\mu f(x)$，7°）$(\lambda\mu)f(x) = \lambda(\mu f(x))$，8°）$1f(x) = f(x)$．実数の和は実数，連続関数の和は連続関数であることに注意すると，1°）〜8°）は全て満たされていますね．したがって，実数値連続関数の全体はベクトル空間であり，実数値連続関数はそのベクトルになります．ベクトルの条件なんて，ホント緩（ゆる）いんです．

5.1.3.4　多項式の空間と関数空間の基底

この章の始めにペアノが議論した多項式の作るベクトル空間とその基底の線形独立性を議論しましょう．定義域が全実数で実係数の n 次以下の多項式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

全体の集合を $\boldsymbol{P}_n$ としましょう．$\boldsymbol{P}_n$ の任意の多項式 P, Q は全実数で定義される実数値連続関数ですから，和 $P+Q$ は $(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)$ で，スカラー倍 λP は $(\lambda P)(x) = \lambda P(x)$ によって定義されます．すると，多項式の和は多項式，多項式の定数倍も多項式ですから，$\boldsymbol{P}_n$ はベクトル空間となり，各多項式はそのベクトルとなりますね．

さて，$\boldsymbol{P}_n$ の基底は，直ぐわかるように，$\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n\}$ の $n+1$ 個の単項式にとればよいでしょう．すると，それらの線形結合

$$t_n x^n + t_{n-1}x^{n-1} + \cdots + t_1 x + t_0 1$$

は基底の条件（ｉ）（上の線形結合は $\boldsymbol{P}_n$ の任意のベクトルを表すことができる）を満たすのは自明ですね.

基底の条件（ii）（$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n$ は線形独立である）のほうはどうでしょうか．そのためには‘関数の線形独立’の定義から述べないとなりません：

関数の線形独立：定義域が D の 2 つの関数 f, g が，D で

$$\text{恒等的に } sf(x) + tg(x) = 0 \ \Rightarrow\ s = t = 0$$

が成り立つとき，f と g は **線形独立** であるといいます.
3 個以上の関数についても同様に定義します.

我々の扱う関数は，多項式がそうであるように，何回でも微分可能なものがほとんどです．そのような場合，‘恒等的’の意味はきわめて大きく，微分した $sf'(x) + tg'(x) = 0$ も恒等的に成り立ちます：ある x について $sf(x) + tg(x) = 0$ が成り立つとき，$x + \Delta x$ でも成り立つために（$sf(x+\Delta x) + tg(x+\Delta x) = 0$)，導関数の定義 $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ に適用すると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sf(x+\Delta x) - sf(x) + tg(x+\Delta x) - tg(x)}{\Delta x} = 0 \ \Leftrightarrow\ sf'(x) + tg'(x) = 0.$$

この技術を $\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n\}$ が $\boldsymbol{P}_n$ の基底となるための条件（ii）：

$$\text{恒等的に } t_0 1 + t_1 x + \cdots + t_n x^n = 0 \ \Rightarrow\ t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$$

に応用しましょう．まず，左辺で $x = 0$ とおくと $t_0 = 0$ ですね．微分すると，$t_1 + 2t_2 x + \cdots + nt_n x^{n-1} = 0$ だから，$x = 0$ とおくと $t_1 = 0$．以下，微分しては $x = 0$ とおく作業を続けて，$t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$ が得られます．したがって，基底の条件（ｉ），（ii）が満たされ，$\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n\}$ は $\boldsymbol{P}_n$ の基底です.

多項式 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1$ をベクトルとして眺めるには，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{p}$ を（ちょっと気取った記号の）基底 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ の線形結合で表した，$\boldsymbol{p} = t_n\boldsymbol{x}_n + t_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1} + \cdots + t_2\boldsymbol{x}_2 + t_1\boldsymbol{x}_1$ と比較するのがよいでしょ

う．§§3.6.2 からわかるように，基底ベクトル $\boldsymbol{x}_k$ は $\mathbb{R}^n$ の座標軸を定め，ベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{x}_k$ の係数つまり座標を用いて $\boldsymbol{p} = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n)^T$ と表されます．多項式 $P(x)$ についても，ベクトル空間 $\boldsymbol{P}_n$ の基底 $\{x^k\}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ が空間の x^k 軸を定めると考えます．すると，$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1$ は‘ 座標 ’を用いて

$$P(x) = (a_0, a_1, \cdots, a_n)^T$$

のように表してもよいでしょう．

最後に，「関数空間」つまりベクトルの定義を満たす一般の関数の集合の基底についてコメントしておきましょう．例えば，ある区間 $I = (a, b)$ で定義された関数の空間 V_I を考えます．V_I の任意の関数 f は I の任意の x で関数値 $f(x)$ をもつので，関数空間 V_I は I で連続的な値に対して様々な値になる関数が集まった広大な空間です．したがって，そんな関数空間については，有限個の基底で済む多項式の空間 $\boldsymbol{P}_n$ とは異なり，一般には，その空間の関数を表すには無限個の基底を必要とするでしょう．実際にそうであり，そんな関数空間は‘ 無限次元空間 ’と呼ばれます．

そんな一例を紹介しましょう．両端が固定された弦，例えば，ピアノやギターの振動の様子は，「ニュートンの運動方程式」から導かれる「波動方程式」という微分方程式（両端固定の境界条件付）を解いて得られます．君たちもまもなくその方程式を解くことになるはずですが，その解は振動数が f_0 のいわゆる基本音とその倍音 kf_0 の波の「重ね合わせ」で表されます．具体的には，ある位置 x で計った弦の変位を $u(t)$ とすると，§§1.4.4 波の合成 で学んだように，振動数が明示された波の表式（☞ §§1.4.4.2）を用いて，「フーリエ級数」といわれる

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k f_0 t + b_k \sin 2\pi k f_0 t)$$

の形になります．この例は，この方程式の解全体の集合がベクトル空間をなし，任意の解は無限個の基底 $\{\cos 2\pi k f_0 t,\ \sin 2\pi k f_0 t\}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ の線形結合（重ね合わせ）で表されることを示しています．$\cos 2\pi k f_0 t$ や $\sin 2\pi k f_0 t$ は振動数が kf_0 の‘ 固有な波 ’を表すので，「固有関数」とか，ベクトル空間の基底として「固有ベクトル」といわれます．それらの線形独立性を示すのは §§5.4.3.1 の内積の議論まで待つのが得策でしょう．一般の音や光，例えばテ

レビの音声や映像は連続する振動数の波の和，つまりそれらの波の振動数についての積分（「フーリエ積分」），として表すことができます.

Q1. n 次以下の多項式全体が作るベクトル空間 $\boldsymbol{P}_n$ の基底は

$$\{\, p_k(x) \mid p_0(x) = 1,\ p_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

のように選べることを示しなさい.

Q2. $\{\cos x,\ \cos 2x,\ \sin x,\ \sin 2x\}$ は線形独立であることを示しなさい.

A1. 集合の記号に惑わされないこと． $p_k(x)$ の線形結合を $\ell(x)$ と書くと

$$\begin{aligned}\ell(x) =& t_0 p_0(x) + t_1 p_1(x) + \cdots + t_{n-1} p_{n-1}(x) + t_n p_n(x)\\ =&(t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1} + t_n)1 + (t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n)x\\ &+ \cdots + (t_{n-1} + t_n)x^{n-1} + t_n x^n\end{aligned}$$

のように表され，$\ell(x)$ は $\boldsymbol{P}_n$ の任意の多項式を表せます．これらの $p_k(x)$ が線形独立の条件

$$\text{恒等的に } \ell(x) = 0 \ \Rightarrow\ t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$$

を満たすのを見るには，まず，$\ell(x)$ を n 回微分して，$\ell^{(n)}(x) = t_n n! = 0$ より $t_n = 0$ を得ます．$t_n = 0$ を利用すると，$\ell^{(n-1)}(x) = t_{n-1}(n-1)! = 0$ より $t_{n-1} = 0$．以下同様に続けると全ての $t_k = 0$ が得られます．したがって，$\{p_k(x)\}$ は $\boldsymbol{P}_n$ の基底です.

A2. 線形結合を $\ell(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\sin x + d\sin 2x$ と書くと，線形独立の条件は

$$\text{恒等的に } \ell(x) = 0 \ \Rightarrow\ a = b = c = d = 0$$

ですね．$\ell(x)$ を 3 回まで微分して $x = 0$ とおくと，

$$\ell(0) = a + b = 0, \qquad \ell'(0) = c + 2d = 0,$$
$$\ell^{(2)}(0) = -a - 4b = 0, \qquad \ell^{(3)}(0) = -c - 8d = 0.$$

これらから，$a = b = c = d = 0$ を得るので，$\{\cos x,\ \cos 2x,\ \sin x,\ \sin 2x\}$ は線形独立です.

§5.2　線形方程式と線形写像

方程式と写像は大いに関係があるといったら，初めて聞いた人はびっくりするでしょう．次の §§ 以下で例解するように，線形代数学が大発展を遂げた第 1 の理由は線形（微分）方程式と線形写像の密接な関係にありました．

まず，重要事項を復習しておきましょう．§§5.1.2 のベクトルを公理的に定義する条件 1°）〜8°）では，ベクトル空間となる集合 V の任意の要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について，和とスカラー倍が定義される（和とスカラー倍も V の要素である）ことが必須条件です：$\boldsymbol{x} \in V,\ \boldsymbol{y} \in V\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V,\ \lambda\boldsymbol{x} \in V$．したがって，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の線形結合 $\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}$ もまた V の要素です：$\boldsymbol{x} \in V,\ \boldsymbol{y} \in V\ \Rightarrow\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \in V$．これは当然な条件ですが非常にきつい場合があります．それは，以下の例で見るように，方程式の解の集合がベクトル空間かどうかを考える場合です．

5.2.1　非同次線形方程式

簡単な 3 元 1 次方程式[3)]

$$x+y-z=1 \qquad (x, y, z \text{ は実数})$$

を考えましょう．この方程式は, 3 個の未知数に対して方程式が 1 個なので, 連続的に無数の解があります．解 $\boldsymbol{x}=(x, y, z)^T$ については，方程式 $x+y-z=1$ を満たすものなら何でもよく，例えば，任意の解を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (s, t, s+t-1)^T \\ &= s(1, 0, 1)^T + t(0, 1, 1)^T + (0, 0, -1)^T \qquad (s, t \text{ は任意定数})\end{aligned}$$

の形に表せます（もちろん，$\boldsymbol{x}=(s+1, -s+t, t)^T$ などでも構いません）．

この方程式では，解のスカラー倍がまた解になることは期待できません．実際,

$$k\boldsymbol{x} = k(x, y, z)^T = (ks, kt, k(s+t-1))^T \quad (k \text{ は実数})$$

3) 1 次以下の項からなる方程式を「1 次方程式」または **線形方程式** といいます．その中で, 1 次の項のみの場合を **同次** である または ‘ 斉次（せいじ）’ であるといい，0 次の定数項がある場合を **非同次** である または ‘ 非斉次 ’ であるといいます．同次と非同次の違いは線形性の議論に影響します．

を方程式に代入すると

$$ks + kt - k(s + t - 1) = k \neq 1$$

だから，解にはなりません．したがって，解全体の集合を V とすると，

$$\boldsymbol{x} \in V \quad \text{だが} \quad k\boldsymbol{x} = (ks,\ kt,\ k(s + t - 1))^T \notin V$$

ですね．解の和が解でないこともすぐ確かめられます（練習問題とします）．

この例からわかるように，V が方程式の解の集合の場合には，一般に V はベクトル空間になりません．方程式が x, y, z の 2 次以上の項を含む場合も解の線形結合は解にならず，解の集合はベクトル空間ではありません．これを示すのを練習問題としましょう．

問題：非線形方程式 $x^2 + y - z = 0$ の解のスカラー倍は解でないことを示しなさい．ヒントは不要ですね．

解答：任意の解 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ は $\boldsymbol{x} = (s, t, s^2 + t)^T$（$s, t$ は任意定数）の形に表すことができます．このとき，解のスカラー倍 $k\boldsymbol{x} = (ks, kt, k(s^2 + t))^T$（$k$ は実数）を方程式に代入すると，

$$(ks)^2 + kt - k(s^2 + t) = (k^2 - k)s^2 \neq 0.$$

したがって，解のスカラー倍は解ではありません．

しかし，先の方程式 $x + y - z = 1$ で定数項 1 を除いた‘同次線形方程式’ $x + y - z = 0$ ではどうでしょう．次の §§ で調べましょう．

5.2.2　同次線形方程式と重ね合わせの原理

1 次のみの項からなる **同次線形方程式**

$$x + y - z = 0$$

を考えます．その任意の解 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ は，s, t を任意定数として，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (s,\ t,\ s + t)^T \\ &= s(1,\ 0,\ 1)^T + t(0,\ 1,\ 1)^T\end{aligned}$$

と表すことができます（もちろん，$\boldsymbol{x} = (s + t, -t, s)^T$ などでも構いません）．

この方程式の場合，解のスカラー倍 $k\boldsymbol{x} = (ks, kt, k(s+t))^T$（$k$ は実数）を方程式に代入すると，

$$ks + kt - k(s+t) = 0$$

だから，解のスカラー倍もまた解になります．つまり，解全体の集合を W とすると，同次線形方程式の解 $\boldsymbol{x} \in W$ ならば $k\boldsymbol{x} \in W$ です．

また，他の任意の解を $\boldsymbol{y} = (u, v, u+v)^T$（$u, v$ は任意定数）とすると，解の和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (s, t, s+t)^T + (u, v, u+v)^T \\ &= (s+u, t+v, s+u+t+v)^T\end{aligned}$$

も方程式を満たします：

$$(s+u) + (t+v) - (s+u+t+v) = 0.$$

よって，解の和もまた解です（$\boldsymbol{y} = (u+v, -v, u)^T$ などとしても同じです）．

以上の議論から，上の同次線形方程式の解の線形結合 $k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y}$（$k, l$ は任意定数）もまた解になりますね．これを（解の）**重ね合わせの原理** といいます：

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ が解} \Rightarrow k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y} \text{ も解} \quad (k, l \text{ は任意定数}).$$

この結果を解全体の集合 W の用語でいうと，

$$\boldsymbol{x} \in W, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y} \in W \qquad \text{（重ね合わせの原理）}$$

ですね．ここで練習問題です．

問題：3 元の同次線形方程式の一般形は $ax + by + cz = 0$（$a, b, c \neq 0$）です．この方程式の 2 つの解の線形結合はまた解になります．それを示しなさい．

解答：2 つの任意の解を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ としましょう．それらは

$$\boldsymbol{x} = (s, t, -(as+bt)/c)^T, \qquad \boldsymbol{y} = (u, v, -(au+bv)/c)^T$$

と表すことができます．それらの線形結合

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y} &= k(s, t, -(as+bt)/c)^T + l(u, v, -(au+bv)/c)^T \\ &= (ks+lu, kt+lv, -\{k(as+bt) + l(au+bv)\}/c)^T\end{aligned}$$

を方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}ax + by + cz &= a(ks+lu) + b(kt+lv) - (k(as+bt) + l(au+bv)) \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，同次線形方程式 $ax + by + cz = 0$ の解の線形結合はまた解になりましたね．

5.2.3　同次線形方程式の解空間

前の §§ で議論したように，3 元の同次線形方程式 $x+y-z=0$ やその一般形 $ax+by+cz=0$ は，その解全体の集合を W とすると，任意の解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の線形結合 $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}$ がまた解になる，つまり，線形性「$\boldsymbol{x}\in W,\ \boldsymbol{y}\in W\ \Rightarrow\ k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in W$」が成り立ちました．この性質は W がベクトル空間であるための前提条件であり，§§5.1.2 の条件 1°）〜8°）も明らかに満たされます．したがって，解全体の集合 W はベクトル空間です．一般に，方程式の解の全体を幾何学的に捉(とら)えるとき，それを **解空間** といいますが，同次線形方程式の解空間はベクトル空間になります．

解空間の例として，同次線形方程式 $x+y-z=0$ の解空間を調べてみましょう．任意の解を

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\\s+t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

と表してみればわかります．つまり，$x+y-z=0$ は 3 次元空間上の平面の方程式を表し，上の解 $\boldsymbol{x}$ はそのパラメータ表示になっていますね（☞ §§4.2.2）．実際，平面 $x+y-z=0$ の法線ベクトルは $(1,1,-1)^T$ であり，それは平面上の 2 ベクトル $(1,0,1)^T$ と $(0,1,1)^T$ に直交します．§§5.1.3.2 でベクトル空間の基底を議論しましたが，$(1,0,1)^T$ と $(0,1,1)^T$ は線形独立なベクトルであり，それらの線形結合は，係数 s, t を 2 つの任意定数として，任意の解を表すことができます．したがって，その 2 ベクトルは線形方程式 $x+y-z=0$ の解空間の基底です．以上の議論から，方程式 $x+y-z=0$ の解空間 W は 3 次元空間上の平面，つまり $\mathbb{R}^3$ の **部分空間**，として表されます：

$$W=\left\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x+y-z=0\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

（ベクトル空間 V の部分集合 W が線形条件「$\boldsymbol{x}\in W,\ \boldsymbol{y}\in W\ \Rightarrow\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}\in W$」を満たすとき，$W$ は V の「部分空間」であるといいます）．

解空間の基底はまた方程式の解であり，そんな解は特に **基本解** と呼ばれます．今の場合，解空間は 2 次元なので，基本解は 2 個あり，任意の解は基本解の係数として 2 つの‘任意定数を含む形’で表されていますね．一般に，任意

定数を含む形で表される解は方程式の **一般解** と呼ばれます．線形方程式は，後で議論する「線形微分方程式」（☞ §§5.3.2 ）も含めて，一般解で全ての解が尽きています（ある種の非線形微分方程式は一般解でない解ももちます）．

ここで，ちょっとした注意です：一般解の表し方は一通りではありません．例えば，上の方程式の一般解は，異なる基本解（基底）を用いて，$\boldsymbol{x} = (s+t,\ -t,\ s)^T$ などのように表すこともできます．

最後に練習問題です．同次線形方程式 $x - y = 0$ の解空間 W およびその基底（基本解）を求めなさい．ヒント：専門用語に惑わされないこと．

解答：2 変数の方程式なので一般解は $\boldsymbol{x} = (x, y)^T = (t, t)^T$（$t$ は任意の実数）などと表されます．解空間 W は

$$W = \left\{ (x,\ y)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y = 0 \right\} \quad \text{または} \quad W = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

などの表現でよいでしょう．解空間の基底は，平面上の直線 $x - y = 0$ の方向ベクトル，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ですね．

5.2.4　同次線形方程式の一般解と非同次線形方程式

同次線形方程式の一般解は一般の線形方程式，つまり **非同次線形方程式** の一般解を議論するときに必須です．例として，3 元 1 次方程式

$$x + y - z = b \qquad (b \neq 0)$$

の一般解を調べましょう．

この非同次線形方程式の解を $\boldsymbol{x} = (x,\ y,\ z)^T$ と書くと，1 つの解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ は

$$\boldsymbol{x}_0 = (b,\ 0,\ 0)^T$$

とできます．このとき，$b = 0$ とおいて得られる同次線形方程式 $x + y - z = 0$ の 1 つの解 $(s_0,\ t_0,\ s_0 + t_0)^T$ を上の解に付け加えたものも解ですね：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (b,\ 0,\ 0)^T + (s_0,\ t_0,\ s_0 + t_0)^T \\ &= (b + s_0,\ t_0,\ s_0 + t_0)^T.\end{aligned}$$

実際，$x+y-z = (b+s_0)+t_0-(s_0+t_0) = b$ が成り立ちます．ここで，$p = b+s_0$，$q = t_0$，$r = s_0 + t_0$ とおくと，非同次線形方程式の 1 つの解 $\boldsymbol{x}_0$ は一般に

$$\boldsymbol{x}_0 = (p,\ q,\ r)^T \qquad (p + q - r = b)$$

のように表されます．

　このとき注意すべきことは，解 $\boldsymbol{x}_0 = (p,\ q,\ r)^T$ に同次線形方程式 $x+y-z=0$ の一般解 $\boldsymbol{u} = (s,\ t,\ s+t)^T$ を付け加えたものも解となることです：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} = (p,\ q,\ r)^T + (s,\ t,\ s+t)^T \\ &= \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

この 3 元 1 次方程式 $x+y-z=b$ は 3 次元空間上の平面の方程式であり，上の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，その平面のパラメータ表示になっており，方程式のどんな解でも表すことができます．今の場合，非同次方程式 $x+y-z=b$ の 1 つの解 $(p,\ q,\ r)^T$ は平面上の 1 点であり，また，同次線形方程式 $x+y-z=0$ の基本解 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は平面の向きを指定する 2 つのベクトルになっています．

　非同次線形方程式の（任意定数を含まない）1 つの解 $\boldsymbol{x}_0$ は **特解**（ **特殊解** ）といわれます．特解 $\boldsymbol{x}_0$ にその同次線形方程式の一般解 $\boldsymbol{u}$ つまり基本解の線形結合を加えたもの $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}$ を非同次線形方程式の **一般解** といいます．非同次線形方程式の解は線形性がないので，その解の全体つまり解空間 W はベクトル空間ではありません．非同次線形方程式の解空間 W は，同次線形方程式の一般解のなすベクトル空間 $\{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}$は同次線形方程式の解$\}$ を非同次線形方程式の特解 $\boldsymbol{x}_0$ だけ平行移動した空間 $\{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}_0\}$ であり，「アフィン空間」と呼ばれます．

　最後に，2 元 1 次方程式の一般解の練習問題です．

問題：1 次方程式 $x-y=1$ の一般解を求めなさい．

ヒント：上の例題を易しくした問題ですね．

解答：$x-y=1$ の解を $\boldsymbol{x} = (x,\ y)^T$ として，1 つの特解は $\boldsymbol{x}_0 = (1,\ 0)^T$ ですね（注意：$(p,\ q)^T$ で $p-q=1$ を満たすものなら何でも特解です）．また，その同次方程式 $x-y=0$ の一般解は $\boldsymbol{u} = (s,\ s)^T$（$s$ は任意定数）と表されます．よって，$x-y=1$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad （s \text{ は任意定数}）$$

と表されます．この一般解 $\boldsymbol{x}$ は 1 次方程式 $x-y=1$ の任意の解を表します．また $x-y=1$ は 2 次元空間上の直線の方程式ですから，この一般解 $\boldsymbol{x}$ はその直線のパラメータ表示にもなっています．したがって，解空間 W は 2 次元空間上の直線 $\{(x,y)^T \mid x-y=1\} = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ ですね．

5.2.5　1 次方程式と線形写像

連立 1 次方程式の解法の研究から「線形写像」の概念が生まれ，それは数学の広い分野に適用されていきました．また，物理学などに現れる応用上重要な「線形微分方程式」にも応用されました．線形写像の詳しい議論は第 6 章 行列と線形変換 で行います．以下，線形写像へのイントロダクションです．

5.2.5.1　3 元 1 次方程式（非連立）と線形写像

まず，3 元 1 次方程式（非同次線形方程式）

$$x+y-z=b \qquad (b \neq 0)$$

から議論します．この方程式の 3 変数を成分とするベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$ に対して，それを左辺の同次 1 次式 $x+y-z$ に導く $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への写像 f：

$$f(\boldsymbol{x}) = f((x,y,z)^T) = x+y-z$$

を考えましょう．このとき，元の非同次方程式は $f(\boldsymbol{x})=b$ で与えられ，$\boldsymbol{x}$ が未知のベクトルになります．その一般解 $\boldsymbol{x}$ は，前の §§ で調べたように，1 つの特解，例えば $\boldsymbol{x}_0=(b,0,0)^T$ と，対応する同次方程式 $f(\boldsymbol{x})=0$ の一般解，例えば $\boldsymbol{u}=(s,t,s+t)^T$ の和で与えられます．実際，解であることは容易にわかります：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{u}) = f((s+b,t,s+t)^T) \\ &= (s+b)+t-(s+t) \\ &= b. \end{aligned}$$

さて，方程式から離れて，この写像の特徴を調べましょう．$\mathbb{R}^3$ の任意の 2 ベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$，$\boldsymbol{y}=(u,v,w)^T$ を考えると，和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ の写像について，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= f((x+u,y+v,z+w)^T) = (x+u)+(y+v)-(z+w) \\ &= (x+y-z)+(u+v-w) \\ &= f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立ちます．また，$\boldsymbol{x}$ の実数倍 $k\boldsymbol{x}$ の写像について，

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) &= f(k(x, y, z)^T) = f((kx, ky, kz)^T) \\ &= kx + ky - kz = k(x + y - z) \\ &= kf(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

も成り立ちます．

この 2 つの性質は写像 f が $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ を同次 1 次式に移す場合に得られます．それを確かめるのを練習問題にしましょう．ヒント：写像を具体的に

$$f(\boldsymbol{x}) = f((x, y, z)^T) = ax + by + cz \qquad (a, b, c \text{ は定数})$$

と書くとよいでしょう．

解答：ベクトル $\boldsymbol{y} = (u, v, w)^T$ を用意すると，ベクトルの和に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f((x + u, y + v, z + w)^T) = a(x + u) + b(y + v) + c(z + w) \\ &= (ax + by + cz) + (au + bv + cw) \\ &= f((x, y, z)^T) + f((u, v, w)^T) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立ちます．また，ベクトルのスカラー倍に対して

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) &= f((kx, ky, kz)^T) = akx + bky + ckz \\ &= k(ax + by + cz) \\ &= k\,f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

も成り立ちます．

ただし，写像が $\boldsymbol{x}$ を非同次 1 次式に移す場合にはこの性質は得られません．そのことを示す練習問題として，写像

$$f(\boldsymbol{x}) = x + y - z + c \qquad (\text{定数 } c \neq 0)$$

でスカラー倍の場合 $f(k\boldsymbol{x})$ を調べなさい．ヒントは不要ですね．

解答：

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) &= f((kx, ky, kz)^T) = kx + ky - kz + c \\ &= k(x + y - z + c) - kc + c \\ &= k\,f(\boldsymbol{x}) + c(1 - k) \\ &\neq k\,f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ですから成り立ちませんね．

また，写像 f が

$$f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y - z$$

のように，2 次以上の項を含む場合も上の 2 つの性質は得られません．これを示すことも練習問題にします．

解答：

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) &= f((kx,\, ky,\, kz)^T) = (kx)^2 + ky - kz \\ &= k(x^2 + y - z) + k(k-1)x^2 \\ &= k\,f(\boldsymbol{x}) + k(k-1)x^2 \\ &\neq k\,f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ですから成り立ちませんね．

というわけで，写像に対して上の 2 つの性質が成り立つ条件はかなり厳しいといえます．しかしながら，これらの性質は非常に重要で，これを一般化して得られる

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ \quad f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) \quad （\lambda \text{ はスカラー}） \end{cases} \qquad （線形性）$$

を満たす写像 f を一般に **線形写像** といい，両性質はあわせて f の **線形性** と呼ばれます．

線形性は「行列」や「同次線形微分方程式」に現れます．ここでは，行列に関係する部分にちょっと触れておきましょう．先ほどの線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = x + y - z$ は，ベクトルの内積を用いて，

$$f(\boldsymbol{x}) = x + y - z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

のように表されます．この表式 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$ をじっと眺めると，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot$ は写像 f を具体的に表現しているかのように見えます．より応用が広くなるように，行ベクトル $(a\ b\ c)$ を導入して，列ベクトルとの積を

$$(a\ b\ c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

のように定めます．すると，$f(\boldsymbol{x}) = x + y - z$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = (1\ 1\ \ -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z$$

と表され，‘ f は行ベクトル $(1\ 1\ \ -1)$ で表現された ’ と考えられますね.

5.2.5.2　3 元連立 1 次方程式と線形写像

3 元連立 1 次方程式，例えば，

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

をベクトル方程式

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として表すと，左辺のベクトルは写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{x}) = f((x, y, z)^T) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

の場合であると解釈できます.

この写像が線形写像であることは，$\boldsymbol{y} = (u, v, w)^T$ とすると，

$$\begin{aligned} f(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) &= f((\lambda x + \mu u, \lambda y + \mu v, \lambda z + \mu w)^T) \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu u) + (\lambda y + \mu v) - (\lambda z + \mu w) \\ (\lambda x + \mu u) - (\lambda y + \mu v) - (\lambda z + \mu w) \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u + v - w \\ u - v - w \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立つことからわかります．線形写像となる理由は，君たちも読めていると思いますが，上の写像がベクトルを‘ 同次 1 次式を成分とするベクトル ’ に移す写像だからですね.

非同次方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の特解 $\boldsymbol{x}_0$ は $(1, 0, 0)^T$ でよいでしょう．その同次方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の一般解 $\boldsymbol{u}$ は，$x + y - z = 0$，$x - y - z = 0$ だから，$\boldsymbol{u} = (s, 0, s)^T$ となり，したがって，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一般解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表されます．これは 3 次元空間の直線であり，その全体集合が $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ の解空間です．この解空間は 1 次元で，その基底（基本解）は $(1, 0, 1)^T$ ですね．

なお，一般の同次線形方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ については，その解空間 $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ はベクトル空間であり，その基底は方程式の線形独立な解からなります．このとき，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解空間は線形写像 f の「核」（カーネル）といわれます．

さて，この線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}x+y-z\\x-y-z\end{pmatrix}$ をうまく表現することを考えましょう．右辺を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ との積の形に表せたら成功です．実際，

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by+cz\\dx+ey+fz\end{pmatrix}$$

のように，積を定義する形で 2 行 3 列の **行列** $\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{pmatrix}$ を導入できます（上式と同類の積表現を，1855 年の論文で，ケーリー（Arthur Cayley，1821〜1895，イギリス）がすでに用いています）．すると，

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y-z\\x-y-z\end{pmatrix}$$

のように表すことができ，線形写像 f は行列 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ によって表現されます．その表現を

$$f : \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

と書き，この行列を線形写像 f の **表現行列** といいます．

以上の例からわかるように，連立 1 次方程式が n 元で，m 個の方程式からなるときは線形写像を表現する m 行 n 列の行列を定義することができ，行列の一般的理論を展開することができます．それを行うのが第 6 章であり，そこでは行列を用いて線形写像（特に，同じ集合に写像する 線形変換）に関する多くの知識を学びます．

ただし，第 6 章の行列の議論に先だって，我々は，次の §5.3 の線形微分方程式（波動方程式）を眺めておきましょう[4]．そこで，我々は，写像の概念がいかに広大であるかを学び，線形という概念がいかに奥深いものかを垣間(かいま)見ることができます．またそこで，線形変換の「固有値」や「固有ベクトル」と呼ばれるものにお目にかかります．それらは第 7 章で詳しく論じられますが，その決定的重要性は §5.3 の議論ですでに開示されるでしょう．

Q1．（1）2 元連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

の特解を 1 つ求めなさい．

（2）（1）の同次方程式の一般解および解空間を求めなさい．

（3）（1）の方程式の一般解を求め，その特徴を示しなさい．

A1．（1）$x - y = 0$，$x + y = 2$ だから，特解はこの場合 $x = y = 1$ のみです．

（2）同次方程式は

$$\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから，$x - y = 0$，$x + y = 0$ より，解は $x = y = 0$ のみです（これを「自明解」といいます）．したがって，同次方程式の解空間は $\mathbb{R}^2$ のゼロベクトル $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のみからなる集合 $\{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2\}$ ですね．

（3）（1）の方程式の一般解 $\boldsymbol{x}$ は（1）の特解 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と（2）の自明解 $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ の和だから，一般解？は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，（ただ 1 つしかない）特解に一致します．つまり，今の場合，元の 2 元連立 1 次方程式は，任意定数を含む本当の一般解ではなく，ただ 1 通りの解をもつ場合ですね．

---

[4] 非常に面白く，線形代数とその先の数学の全体像が概観できます．ただし，§§2.4.3 オイラーの公式 で用いた微積分の知識レベル程度が要求されます．今無理して読まずに後回しにして，第 6 章に入っても構いません．