

は、2ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の線形結合の形  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  に、ただ1通りに表される'ことがわかりました。この定理はベクトルの幅広い応用をもたらしますが、それは追々理解されるでしょう。

### 3.4.3 ベクトルの線形独立と空間の次元

上の定理に現れた  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  の条件を一般化してみましよう。まず、線形結合の式を利用して  $\vec{a}, \vec{b}$  に対する条件

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow s = t = 0 \quad (\text{線形独立 } V^2)$$

を考えます。 $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  の場合や、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$  の場合には  $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$  を満たす0でない  $s, t$  の組がいくらでもあります。しかし、 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  の場合にはそれを満たす解は  $s = t = 0$  のみですね。よって、(線形独立  $V^2$ ) の条件は  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  を表し、これを満たすベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  は線形独立または1次独立であるといわれます。

これから直ちに得られる定理は、 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  のとき、

$$p\vec{a} + q\vec{b} = p'\vec{a} + q'\vec{b} \Rightarrow p = p', q = q'$$

が成り立つことです。それを確かめるのは簡単な練習問題です。

次に、3つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  について、条件

$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow s = t = u = 0 \quad (\text{線形独立 } V^3)$$

を考えてみましょう。今の場合、3つのベクトルがどれも  $\vec{0}$  でなく、どの2つも平行でなくとも、2つのベクトルの線形結合を用いて残りのベクトルを表すことができ、例えば、 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$  です。このとき  $s = t = u = 0$  以外の解がありますね。よって、この条件は意味がありませんね。平面のベクトルを考えている限りは。

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ 、かつ、 $\vec{c}$  が  $\vec{a}, \vec{b}$  の両方に直交する場合を考えてみましょう。そんなベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は同一平面上に描けませんね。しかしながら、3本の鉛筆をベクトルに見立ててみればわかるように、空間上には描けます。そこで、これらのベクトルを空間のベクトルとしたときには、線形独立  $V^3$  の条件は意味が

あり、それを満たす「ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は線形独立である」といいます。そして、線形独立な3つのベクトルの線形結合を用いて、空間上の任意のベクトルをただ1通りに表すことができます(空間ベクトルのところで示しましょう)。このように線形独立なベクトルの個数は「空間の次元」と密接に関連していません。平面を「2次元空間」、我々が住む空間を「3次元空間」というのはその理由からです。その意味において、数学的には、4次元空間、5次元空間、 $\dots$ 、一般に、 $n$ 次元空間が存在します。そして我々はやがて「 $n$ 次元線形空間」に深く関わり、 $n$ 個の線形独立なベクトルはその空間のベクトルを表す「基底」として議論されることとなります。

Q1. (1) 2つのベクトル  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  は線形独立であることを示しなさい。

(2) ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  の線形結合で表しなさい。

(3) 任意の平面ベクトル  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は  $\vec{a}, \vec{b}$  の線形結合で表されることを示しなさい。

A1. (1)  $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$  だから線形独立は明らかですが、きちんとやってみよう。方程式  $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$  を考えると、

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、 $s+2t=0$ ,  $s-t=0$ 。よって、 $s=t=0$ 。したがって、線形独立です。

(2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とすると、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ s-t \end{pmatrix}$ 。よって、 $1 = s+2t$ ,  $2 = s-t$ 。これを解いて、 $s = \frac{5}{3}$ ,  $t = \frac{-1}{3}$ 。したがって、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

(3) (2)と同様に  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと、任意の  $x, y$  に対して、解の組  $s = \frac{x+2y}{3}$ ,  $t = \frac{x-y}{3}$  を得ます。したがって、任意のベクトル  $\vec{x}$  に対して、 $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$  と表すことができます。

ならばこの領域は第1象限 ( $x > 0, y > 0$ ) なので、条件  $s > 0, t > 0$  は第1象限に対応する領域を表すと考えてよいでしょう。この‘象限’という考え方は以下の議論においても重要です。

F)  $s\vec{a} + t\vec{b}$  が  $\triangle OAB$  の内部を表す：

まず、点 P が半直線 OA, OB に挟まれた領域  $Q_1$  上にあると考えて、条件  $s > 0, t > 0$  の下で考えます。次に、 $s\vec{a} + t\vec{b}$  を変位と考えて、もし点 P が原点から線分 AB の内分点に移動したとしたら条件  $s + t = 1$  が付加されますが、実際には、P は AB の内分点には届かず  $\triangle OAB$  の内部に留まるのだから、付加条件は  $s + t < 1$ 。したがって、求める条件は  $s > 0, t > 0, s + t < 1$  です<sup>5)</sup>。この問題も、 $\vec{a}, \vec{b}$  が基本ベクトル  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  であるかのように考えて、 $\triangle OAB$  の内部は、‘第1象限’  $s > 0, t > 0$  のうち、2点 A, B を通る直線  $t = -s + 1$  より下の領域  $t < -s + 1$  と考えることができますね。

以上、議論したように、線形独立なベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の線形結合  $s\vec{a} + t\vec{b}$  の性質は基本ベクトルの線形結合  $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  の性質にきわめてよく似ていますね。次の §§ でその類似性をさらに議論しましょう。

### 3.6.2 斜交座標系

一般の線形独立なベクトルによる線形結合  $s\vec{a} + t\vec{b}$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$ ) と、その特別な場合の基本ベクトルの線形結合  $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  の間に、強い類似性が見られました。この §§ では、 $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  が  $xy$  座標系を導くように、一般の線形結合  $s\vec{a} + t\vec{b}$  は斜めに交わる座標系を導くことを議論しましょう。

以下の議論のために  $\vec{a}, \vec{b}$  は位置ベクトル  $\vec{OA}, \vec{OB}$  を表すとします。前の §§

<sup>5)</sup> きちっと導出するには以下のようにします。点 P は線分 AB の内分点と原点を結ぶ線分上にあると考えると、 $\vec{OP} = k\{u\vec{b} + (1-u)\vec{a}\}$  ( $0 < u < 1, 0 < k < 1$ ) と表すことができます。よって、 $s = k(1-u), t = ku$ 。u を消去して  $s+t = k$  が得られます。また、k を消去すると  $(s+t)u = t$  です。ここで、 $0 < k = s+t < 1$  だから  $0 < s+t < 1$ 、また、 $0 < u = \frac{t}{s+t} < 1$  より、 $0 < t < s+t$ 。これは  $0 < t$  かつ  $t < s+t$  のことだから、 $0 < t, 0 < s$  を得ます。以上をまとめると、 $s > 0, t > 0, s+t < 1$  です。

で一般の線形結合  $s\vec{a} + t\vec{b} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$  を議論しましたが，直線 OB は方程式  $s = 0$ ，また直線 AB は方程式  $s + t = 1$  などで表されました． $s, t$  の方程式をもっと考えてみましょう．

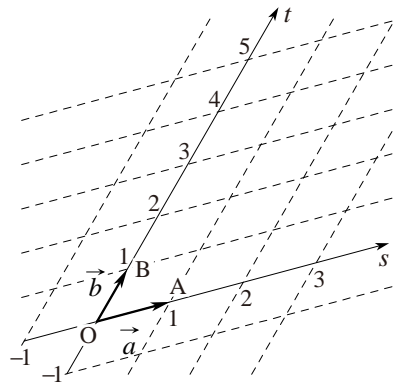
方程式  $s = 1$  は  $s\vec{a} + t\vec{b} = 1\vec{OA} + t\vec{OB}$  ( $t$  は任意の実数) のことですから， $s = 1$  は点 A を通り線分 OB に平行な直線を表しますね．同様に，方程式  $s = p$  は  $p\vec{OA}$  の終点を通り線分 OB に平行な直線です．また，方程式  $t = 0$  は直線 OA で， $t = q$  は  $q\vec{OB}$  の終点を通り線分 OA に平行な直線ですね．これらの直線は， $s, t$  を  $x, y$  に直すと， $xy$  直交座標系で  $A(1, 0), B(0, 1)$  とした場合の直線に当たりますね．

上の議論をふまえて考え方をもっと徹底しましょう．右図にあるように，位置ベクトル  $\vec{a} = \vec{OA}$ ， $\vec{b} = \vec{OB}$  に沿って新しい座標軸  $s$  軸， $t$  軸をとり，点 A, B の座標を  $(1, 0)$ ， $(0, 1)$  としてしまいましょう．このことによって先に議論した直線の方程式は  $xy$  直交座標系のものとの対応が完全になります．

このように座標軸が斜めに交わるような座標系を斜交座標系といい，その座標を斜交座標と呼びます．すると，位置ベクトル  $\vec{OA} + \vec{OB}$  に対応する点の斜交座標は  $(1, 1)$  であり，線形結合  $\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$  に対応する点 P の斜交座標は  $(s, t)$  となりますね． $s\vec{a} + t\vec{b}$  が斜交座標  $(s, t)$  を表すことになったので， $xy$  座標系の位置ベクトルの表示  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$  にならって，ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の線形結合を

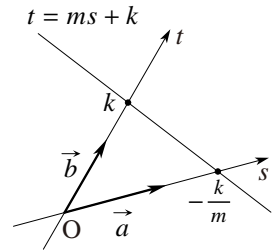
$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表し，それによって表される斜交座標  $(s, t)$  を斜交座標系の‘点  $(s, t)$ ’と呼びましょう．直交座標系の基本ベクトル  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  と同様に，座標の向きを決める  $\vec{a}, \vec{b}$  はまた斜交座標系における基本となるベクトルです．線形独立な 2 ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  は，その線形結合が平面上の任意のベクトルを表すことができ，数学理論においては平面の「基底」と呼ばれます．



直交座標系の直線の方程式  $y = mx + k$  に当たる斜交座標系の方程式  $t = ms + k$  が直線を表すかどうか調べてみましょう。このとき、線形結合が表す位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= s\vec{a} + t\vec{b} = s\vec{a} + (ms + k)\vec{b} \\ &= k\vec{b} + s(\vec{a} + m\vec{b}) \end{aligned}$$



となるので、 $k\vec{b}$  が表す点  $(0, k)$  を通り、方向ベクトルが  $\vec{a} + m\vec{b}$  の直線を表します。また、 $s$  軸との交点は、 $(ms + k)\vec{b} = \vec{0}$  より、 $(s, t) = (-\frac{k}{m}, 0)$  です。直線  $y = mx + k$  も  $xy$  座標系の 2 点  $(0, k)$ ,  $(-\frac{k}{m}, 0)$  を通りますね。したがって、 $y = mx + k$  と  $t = ms + k$  は直交座標系と斜交座標系の「座標が同じ点」を通る直線になりますね。

斜交座標は多くの分野で応用されています。例えば、アインシュタインの相対性理論のことを聞いたことがあるでしょう。そう、ほとんど光速で飛んでいるロケットから見ると、物体が縮んだり時間が遅れたりするという理論です。この興味をチョーそる理論では長さや時間の尺度が変わるので、斜交座標はごく普通に利用されています。

以上、議論してきたように、ベクトルの本質はベクトルの線形結合と線形独立性にすでに現れています。それらを用いて直線や多角形に関する問題を十分に扱うことができます（以下に斜交座標を用いて面積比を求める問題を出しましょう）。ただし、一般の線形結合のを用いた場合には距離や角度を扱うことが難しくなります。それらを扱うには基本ベクトルを用い、次の § で議論するように、「内積」を導入することになります。

Q1. 3 点  $O, A, B$  は同一直線上にないとし、実数  $k, l, m$  が条件  $k \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ,  $k + l = 1$ ,  $1 \leq m$  を満たして変化するとき

$$k\overrightarrow{PA} + l\overrightarrow{PB} + m\overrightarrow{PO} = \vec{0}$$

を満たす点  $P$  の存在する領域の面積  $S$  と  $\triangle OAB$  の面積の比を求めなさい。ヒント：ベクトルの始点を揃えましょう。