6.3.3　行列式の再定義と高次の行列式

6.3.3.1　行列式の再定義

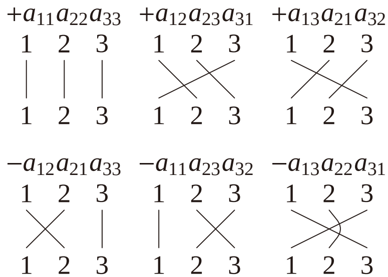
前の §§6.3.2 で得られた多くの定理（外積を用いたものは除く）はそのまま一般の n 次の行列や行列式についても成り立ちます．それを示すには行列式を使いやすくする必要があり，ここで行列式を定義し直しましょう．

例として，3 次行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

で議論します．$|A|$ の展開式は，各項が $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ または $\pm a_{q_1 1}a_{q_2 2}a_{q_3 3}$ の形に書けることからわかるように，$|A|$ の行および列が重複しない 3 個の成分 a_{ij} の積，およびその全ての組合せ，からできていますね．

問題は各項の符号です．我々は $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ の表現を基にして考えましょう．p_1, p_2, p_3 は重複せずに 1, 2, 3 の値をとります．各項の符号は，$p_1, p_2, p_3 = 1, 2, 3$ のときは＋，$p_1, p_2, p_3 = 2, 1, 3$ のときは－，などと決まりますから，符号は 1, 2, 3 の並ぶ順によって定まることがわかります．



符号を決める規則を見いだすのは数学者にとっては難しいことではなかったようです．数字 1, 2, 3 を上下に書き，成分 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}$ の添字の 2 数を線で結んでみましょう（3 つの線が 1 点で交わらないように引く）．そのとき，行列式の各項 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ に対応する図の‘交差の数が偶数のものには＋の符号を奇数のものには－の符号’をつけてみましょう．どうです，$\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ の符号にぴったり一致しますね．これを一般的に正当化するのが §§1.7.2 置換 で学んだあみだくじの理論（☞ §§1.7.2.3）であり，交差数の偶奇は置換の偶奇（☞ §§1.7.2.6）もしくは順列の偶奇に一致します．

問：2 次の行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ でやってみよう．

答：$a_{11}a_{22}$ 項の線は交差しないから＋，$a_{12}a_{21}$ 項の線は交差するから−ですね．

§§1.7.2.6 で学んだように，置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ または順列 $(p_1 \;\; p_2 \;\; \cdots \;\; p_n)$ を表す交差図の交差数 r の符号 $(-1)^r$ を $\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ で表しましょう．例えば，$\varepsilon_{231} = (-1)^2 = +1$ ですね．この記号を用いて n 次の正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ の行列式 $|A|\,(= \det A = |a_{ij}|)$ を定義します：

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

ここで，和 $\sum_{(p_1,\cdots,p_n)}$ は $n!$ 個ある全ての順列 $(p_1 \;\; p_2 \;\; \cdots \;\; p_n)$ についてとります．$n = 3$ のとき，$3! = 6$ 個の項で表されましたね．右辺の和の式を行列式 $|a_{ij}|$ の「展開式」ということがあります．

6.3.3.2　行列式の性質

4 次以上の一般の行列式は，理論的には興味ある対象ですが，取り扱いが難しく，多元連立 1 次方程式を解く手段には向いていません．一般の行列式の基本的な性質を調べた後，我々は，n 次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} が A の行列式 $|A|$ と余因子行列 $\widetilde{A}$ を用いて $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ と表されることを示して満足しましょう．以下，形式的な証明のため，面白くはありません．

【転置行列の行列式】行列式の値は行と列を入れ換えても変わりません：

$$|A^T| = |A|.$$

$A = \left(a_{ij}\right)$ のとき，$A^T = \left(a_{ji}\right)$ だから，$|A^T|$ の展開式は，$b_{ij} = a_{ji}$ とおくと，

$$\begin{aligned} |a_{ji}| &= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \end{aligned}$$

と表されます．このとき，展開式の各項 $a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ の因子を並べ換えると $a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$ と行の添字の順にできます：

$$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}. \qquad (*)$$

（例えば，$a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} = a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ です）．

この操作は，添字に対する置換 $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を行うことに同じです．（例えば，$a_{21}a_{42}a_{13}a_{34}$ は置換 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ によって $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ になりますね）．また，この置換は，$(*)$ の右辺からわかるように，その列を交換して置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$ と書き直すことができます：

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}.$$

（$a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} = a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ の例でいえば，$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ です）．

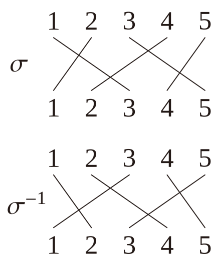
以上の議論から，

$$|\,A^T\,| = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n} a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$$

と書いたとき，符号について $\varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n} = \varepsilon_{q_1q_2\cdots q_n}$ が成り立つと仮定すると，

$$|\,A^T\,| = \sum_{(q_1,\cdots,q_n)} \varepsilon_{q_1q_2\cdots q_n} a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$$

が成り立ち，したがって，$|\,A^T\,| = |A|$ が示されたことになります．上の置換の議論から，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}^{-1}$ ですから，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$（$= \sigma$ と表す）の符号が $\varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n}$ であることに注意すると，置換の交差図で σ と σ^{-1} の交差数の偶奇が同じであることを示せば上の仮定は正当化されます．σ と σ^{-1} の交差図は，右図の例からもわかるように，σ の図で上下を入れ換えたものを σ^{-1} の図にすることができます．したがって，両者の交差数は等しくでき，置換の偶奇は一致します：$\varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n} = \varepsilon_{q_1q_2\cdots q_n}$．以上の議論から，$|\,A^T\,| = |A|$ が成り立ち，したがって，‘行列式の列で成り立つことは，全て，行でも成り立ちます’．



練習問題です．問：次の n 次の対角行列 D と上 3 角行列 ∇ の行列式を求めなさい．ただし，O はそれが対角成分より上に書かれているときは上の，下のときは下の成分が全て 0 であることを表します．

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \nabla = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

答：D は対角成分以外は 0 だから，$|D| = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ において，$p_j = j$ である成分のみが生き残ります．したがって，$\varepsilon_{1\,2\cdots n} = +1$ より，$|D| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

$|\nabla| = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ においては，$j \leqq p_j$ である成分のみが生き残ります．特に $j = n$ のときは $p_n = n$ 成分のみ残り，

$$|\nabla| = \sum_{(p_1,\cdots,p_{n-1})} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1\,p_{n-1}} a_{nn}.$$

$(p_1 \;\; p_2 \;\; \cdots \;\; p_n)$ は $(1 \;\; 2 \;\; \cdots \;\; n)$ の順列だから，$p_n = n$ のときは $(p_1, \cdots, p_{n-1})$ は n を含みません．したがって，$n-1 \leqq p_{n-1} < n$ より，$p_{n-1} = n-1$．同様の議論を続けて，$p_{n-2} = n-2, \cdots, p_2 = 2, p_1 = 1$ と定まります．したがって，$|\nabla| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

【2 つの行（列）の入れ換え】行列式 $|A|$ の任意の 2 つの行（または列）を入れ換えた行列式を $|A^{\leftrightarrow}|$ とすると $|A^{\leftrightarrow}| = -|A|$：

$$|A^{\leftrightarrow}| = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -|A|.$$

順列 $(p_1 \cdots p_i \cdots p_k \cdots p_n)$ の 2 数 p_i，p_k を交換すると，交差図の交差数が奇数だけ変わることに注意します（p_i, p_k は i, k 行の列を表す添字）.

$$\begin{aligned} |A^{\leftrightarrow}| &= \textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 \cdots p_i \cdots p_k \cdots p_n} a_{1p_1} \cdots \overset{i\text{ 行}}{a_{kp_i}} \cdots \overset{k\text{ 行}}{a_{ip_k}} \cdots a_{np_n} \\ &= \textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 \cdots p_i \cdots p_k \cdots p_n} a_{1p_1} \cdots a_{ip_k} \cdots a_{kp_i} \cdots a_{np_n} \\ &= -\textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1 \cdots p_k \cdots p_i \cdots p_n} a_{1p_1} \cdots a_{ip_k} \cdots a_{kp_i} \cdots a_{np_n} = -|A|. \end{aligned}$$

列の入れ換えについては $|A^T| = |A|$ を用いるか，その証明で得られた

$$|A| = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

を用いるとよいでしょう．

【1つの行（列）の定数倍】行列式の1つの行（または列）を c 倍すれば，行列式も c 倍される：（列でやってみましょう）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1\cdots p_j\cdots p_n} a_{p_11}\cdots(ca_{p_jj})\cdots a_{p_nn} \\ &= c\textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1\cdots p_j\cdots p_n} a_{p_11}\cdots a_{p_jj}\cdots a_{p_nn} = \text{右辺}. \end{aligned}$$

【2つの行（列）の一致】2つの行（または列）の等しい行列式は0です：

$$\begin{array}{ccccccc} & & j\text{ 列} & & k\text{ 列} & & \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

2つの行（列）を入れ換えると行列式の符号が変わります．今の場合，入れ換えても同じものになります．そんなものは0だけですね．

行列式を c 倍することは1つの行（列）を c 倍することに同じで，このことを用いると，系：「2つの行（または列）が比例する行列式は0である」が得られます．

【行（列）の成分が2数の和】行列式の1つの行（または列）の各成分が2つの数の和であるとき，行列式は和の各項をその行（または列）とする2つの行列式の和に等しい：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1\cdots p_j\cdots p_n} a_{p_1 1}\cdots(a_{p_j j}+a'_{p_j j})\cdots a_{p_n n} \\
&= \textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1\cdots p_j\cdots p_n} a_{p_1 1}\cdots a_{p_j j}\cdots a_{p_n n} \\
&\quad + \textstyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon_{p_1\cdots p_j\cdots p_n} a_{p_1 1}\cdots a'_{p_j j}\cdots a_{p_n n} = \text{右辺}.
\end{aligned}$$

行列式の定義式を用いると簡単ですね．

【行(列)の定数倍を他の行(列)に加える】行列式は 1 つの行（または列）を c 倍して他の行（または列）に加えても変わらない：

$$\begin{array}{c}
\quad\quad\; j\,\text{列} \quad\quad\quad\; k\,\text{列} \\
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & ca_{1j}+a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & ca_{2j}+a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & ca_{nj}+a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\quad\quad\; j\,\text{列} \quad\quad k\,\text{列} \\
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{array}.$$

証明は練習問題にしましょう．ヒント：2 つの行列式の和になり，片方が消えます．‘ 目 ’ で計算しましょう．この定理は大いに役立ちます．

練習問題です．次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

解答例：2 列と 3 列から 1 列を引き，次に，2 行から 1 行 ×2 および 3 行から 1 行 ×4 を引き，次に，3 行 ×3 を 2 行に加えます：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

最後に，2 列と 3 列を入れ換えると 3 角行列になって，対角成分の積 ×(−1) になります：

$$\text{与式} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 1 = -1.$$

コツがつかめましたね．0 となる成分を増やしていき，3 角行列にします．