第 6 章　行列と線形変換

未知数 3 個の 3 元連立 1 次方程式を解いたことがあるでしょう．手こずりませんでしたか．2 元や 3 元の連立 1 次方程式は古代バビロニアや中国・インドの文書に見られます．多元連立 1 次方程式を最も合理的に解く方法を求めて，17 世紀に「行列式」(determinant) が生まれ，やがて「行列」(matrix) の理論に発展しました．

2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

ですが，2 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

と定めると，解は

$$x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

のように表されます．

日本の数学者 関孝和（1642 頃〜1708）の 1683 年の手稿によると，彼は 3〜5 次の行列式をドイツの指導的数学者ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646〜1716）に先駆けて見いだしたようです．

n 元連立 1 次方程式の解に対応するには，上の 2 次の行列式を，n 個の未知数および方程式に対する $n \times n$ 個の係数から作られる「n 次の行列式」に一般化すればよいわけです．そんな行列式を用いた解は 1750 年に定式化され，発見者にちなんで，「クラメルの公式」として知られています．

行列式の理論的道具立ては，しかしながら，未知数の個数 n が方程式の個数 m に一致しない，n 元 m 連立 1 次方程式においては十分ではありません．そのような方程式は，例えば §§5.2.5.2 で議論した 3 元 2 連立 1 次方程式のように無数の解をもったり，まったく解をもたない場合（$m > n$ の場合など）もあります．このような連立方程式の研究に行列は大いに役立ちます．イギリスのケーリー（Arthur Cayley，1821〜1895）は，1855 年と 1858 年の論文で，友人のシルベスターが案出した「行列」という用語を用い，行列の理論を構築しました．先ほどの 2 元 (2) 連立 1 次方程式 $ax + by = p$，$cx + dy = q$ では，いったんベクトル方程式に直すと，自然に 2 行 2 列の行列が現れます：

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がその行列ですね．

上の第 3 の表式の左辺 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ は，現在では，それに対応する線形変換 $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ の表現として広く知られています：

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

しかしながら，高い評価を受けている数学史の名著[1)]によると，行列と抽象ベクトル空間の線形変換との基本的な関係が明確に理解されたのはかなり遅く，1940 年代になってからとのことです．

固有値問題が最初に出てきたのはダランベールの 1743〜1758 年にかけての研究でした．彼は，いくつかの重りをバネで結んだときの運動に当たる，定数係数線形連立方程式

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

を研究し，それらの微分方程式をうまく組み合わせると，もとの微分方程式系は単一の微分方程式 $\frac{d^2}{dt^2}u = \lambda u$ に帰着されることを見いだしました．これは §§5.3.2.1 の変数分離法で得られた微分方程式に同じです．

1) ヴィクター J. カッツ 著『カッツ 数学の歴史』（共立出版，2005）

217 ページ脚注の固有値方程式 $T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ における線形変換 T が行列で表される場合に，固有値問題を最初に解いたのはコーシー（Augustin Louis Cauchy, 1789～1857，フランス）でした．（原点を中心とする）2 次曲線を与える方程式は 2 次式 f が 2 変数関数で一定の場合：

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + dy^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

です．これらの曲線を分類するには，『+α』の §9.3 で行ったように，固有値方程式 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を利用して，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ を対角化するような線形変換を見いだすことが必要です．コーシーは，2 次曲面を表す 3 変数の 2 次方程式 $f(x, y, z) = c$ の分類を，さらには，n 変数の 2 次方程式が表す超曲面の分類を，2 変数の場合と同様に，求められた固有値から対角化する変換を見いだし，1829 年の論文で発表しました．

この章では数ベクトル空間における写像を行列で表現し，行列の性質を詳しく議論します．また，連立方程式に関係して行列式も議論します．行列の固有値問題への応用は，大量のため，第 7 章に回しましょう．

§6.1　線形変換と行列

平面ベクトルや空間ベクトル，そして一般の n 次元数ベクトルを考えましょう．それらのベクトルの集合はベクトル空間であり（☞ §§5.1.3），それぞれ $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ で表されましたね．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ のうち，$m = n$ の場合の写像 f を特に $\mathbb{R}^n$ 上の変換 f といいます．$\mathbb{R}^n$ 上の変換 f が，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，$k, l \in \mathbb{R}$ として，特に，性質

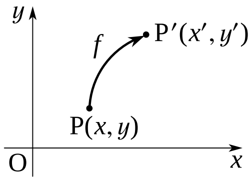
$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(k\boldsymbol{x}) = k\,f(\boldsymbol{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \ f(k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y}) = k\,f(\boldsymbol{x}) + l\,f(\boldsymbol{y})$$

を満たすとき，f は $\mathbb{R}^n$ 上の **線形変換**（**1 次変換**）と呼ばれます．この § で議論する変換は全てこの性質をもちます．

簡単のため，この § で考えるベクトルは平面ベクトル，行列は 2 行 2 列の行列に限定しましょう．行列の一般化は次の § で行います．

6.1.1　線形変換の例

6.1.1.1　対称移動



xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に移動する変換 f を考えましょう．この変換 f を

$$\mathrm{P}' = f(\mathrm{P}),$$

または，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \binom{x}{y}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \binom{x'}{y'}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表しましょう．このとき f は，点 P に点 P′ を対応させる，またはベクトル $\binom{x}{y}$ にベクトル $\binom{x'}{y'}$ を対応させる働きがあるので，‘ 一般化された関数 ’ すなわち写像（正確には $\mathbb{R}^2$ 上の変換）ですね．

例えば，$\mathrm{P}'(x', y')$ が点 $\mathrm{P}(x, y)$ を x 軸に関して折り返した点であるとき，$x' = x$，$y' = -y$ なので

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

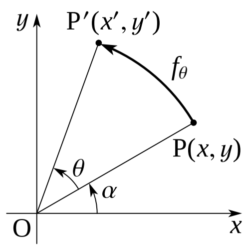
と表されます．また，P′ が点 P に原点対称な点であるときは

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

ですね．

では，練習問題です．P′ が点 P を直線 $y = x$ に関して折り返した点のとき，$f\binom{x}{y}$ を求めなさい．答は，x, y 座標が入れ替わるので，$f\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$ ですね．

6.1.1.2　回転



点を原点の周りに角 θ だけ回転する変換 f を特に f_θ とし，$\binom{x'}{y'} = f_\theta\binom{x}{y}$ を求めましょう．点 $\mathrm{P}(x, y)$ と原点 O の距離を r，半直線 OP と x 軸とのなす角を α として，3 角関数の知識を使うのが簡明です．すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

と表されますね．ここで，加法定理を用いると

$$r\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\\ \sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta\\ r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ y\cos\theta+x\sin\theta\end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=f_\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}$$

であることがわかります．なお，この表式は $\binom{x}{y}$ が任意のベクトルのときも成立します.

6.1.2　線形変換と表現行列

6.1.2.1　線形変換の基本法則

前の §§ の変換 f の特徴を調べましょう．$f\binom{x}{y}$ には，x, y の ‘ 1 次の項のみ ’ が現れ，定数項や 2 次以上の項は現れませんね．このような変換は，一般に

$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}\qquad（a,\ b,\ c,\ d\ は定数）\qquad（線形表現）$$

の形のベクトルで表現されます．実は，この変換 f がこの § の始め（233 ページ）で述べた **線形変換** なのです．したがって，f は，平面ベクトルを平面ベクトルに変換し，$\vec{x}$, $\vec{y}$ を任意の平面ベクトルとするとき，2 つの性質 $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$, $f(k\vec{x})=kf(\vec{x})$ （k は実数）を満たします.

上の（線形表現）の f が線形変換であることを証明しておきましょう.
$\vec{x}=\binom{x_1}{x_2}$, $\vec{y}=\binom{y_1}{y_2}$ とすると,（線形表現）より

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x_1+y_1)+b(x_2+y_2)\\ c(x_1+y_1)+d(x_2+y_2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\ cx_1+dx_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ay_1+by_2\\ cy_1+dy_2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

が成り立ちます.

また，

$$f\left(k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}akx_1+bkx_2\\ckx_1+dkx_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}=kf\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

も成り立ちます．

逆に，$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$，$f(k\vec{x})=kf(\vec{x})$ から（線形表現）を導くことも必要です．$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に注意し，（線形表現）の a, b, c, d の記法に従って $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ と定めます．すると，

$$\begin{aligned}f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=xf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+yf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立ちます．これで証明されましたね．

6.1.2.2　線形変換の表現行列

線形変換 $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$ の表現をもっとスッキリした‘ 積の形 ’で表現することが考案されました：

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \qquad \text{（変換の行列表現）}$$

つまり，行と列の並び $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の積が $\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$ であるように定義します[2)]．この式を眺めると，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ は，変換 f を表すように見えることから，f の **表現行列** と呼ばれます．そのことは $f:\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ と表されますが，表現行列の意味を正しく理解するには，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が任意のベクトルという前提で

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ f:\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

であることを忘れてはいけません．

---

2) 積 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の計算法のコツは，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を行ベクトル $(a\quad b)$ と $(c\quad d)$ を並べた $\begin{pmatrix}(a\quad b)\\(c\quad d)\end{pmatrix}$ と見て，積 $(a\quad b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $ax+by$ になり，積 $(c\quad d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $cx+dy$ になると考えて

$$\begin{pmatrix}(a\quad b)\\(c\quad d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a\quad b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\(c\quad d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

と見るのがよいでしょう．このような見方は行列の積の一般化の基本になるものです．

この表現行列は「2 行 2 列の行列」または **2 × 2 行列**，または正方形の形をしているので「2 次の正方行列」といわれます．行列の各文字を行列の **成分** といい，例えば a は第 1 行第 1 列の成分なので (1, 1) 成分，c は第 2 行第 1 列の成分なので (2, 1) 成分などといいます．

前の §§ で議論した，点やベクトルを角 θ だけ回転する変換 f_θ については，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるので，f_θ の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ です．この回転を表す線形変換 f_θ はしばしば利用されるので，その表現行列を R_θ と略記しましょう：

$$f_\theta : R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2 つの線形変換 $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $g : \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ が同じになるは，当然のことながら，それらの表現行列の各成分が一致する場合ですね：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = e,\ b = f,\ c = g,\ d = h.$$

ここで練習問題．恒等変換 $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の表現行列を求めなさい．答：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.1.3　行列の演算

行列は実数に似たところもあります．行列の実数倍・和・積・商などの演算の性質を調べましょう．

6.1.3.1　行列の実数倍

任意の実数 k に対して

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kax + kby \\ kcx + kdy \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成立しますね．このときベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は任意なので，次ページの脚注の議論からわかるように，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をとり除くことができ

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

と表すことができます[3]．行列の実数倍は，ベクトルの実数倍と同様に，各成文を実数倍したものと同じです．

行列の実数倍の演算法則がベクトルの場合と同様に成り立ちます．行列を表す簡略記号 A などを用いると，任意の実数 p，q に対して

$$p(qA) = (pq)A$$

です．これは A を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ などと成分で表してみるとほぼ明らかでしょう．

6.1.3.2　行列の和

線形変換を $f:\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+e)\,x + (b+f)\,y \\ (c+g)\,x + (d+h)\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ex+fy \\ gx+hy \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立ちます．これもベクトルを省略して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

と表すと，行列の和は各成分の和として定義できることがわかります．

成分が全て 0 の行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は O で表し，2 次の **零行列** または **ゼロ行列** と呼ばれます．O は任意の 2×2 行列 A に対して

$$A + O = O + A = A$$

となりますね．

---

[3] $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が任意のベクトルのとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ex+fy \\ gx+hy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by = ex+fy \\ cx+dy = gx+hy \end{cases}$$

において，x, y は任意なので，$y = 0$ とか $x = 0$ などとして係数比較をすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

が導かれ，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をとり除いてもよいことがわかります．

ベクトルの場合と同様に，行列の和の演算法則が成り立ちます．行列を表す簡略記号 A, B, C などを用いると

$$A+B=B+A, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad \text{（結合法則）}$$

です．行列の成分を考えると，これらを示すのは簡単な練習問題でしょう．

行列の実数倍と組み合わせると分配法則が成り立ちます．任意の行列 A, B と実数 p, q に対して

$$(p+q)A=pA+qA, \qquad p(A+B)=pA+pB$$

です．これも練習問題にしましょう．

6.1.3.3　行列の積

§§ 1.3.4 で合成関数 $f\circ g(x)=f(g(x))$ を学びましたね．ここでは変数がベクトルになった場合を学びましょう．2 つの線形変換 $f: A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g: B=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ を g, f の順に行った合成変換

$$f\circ g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

を考えます．

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=x\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(x\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) \\ &=x\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} ar+bs \\ cr+ds \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (ap+bq)\,x+(ar+bs)\,y \\ (cp+dq)\,x+(cr+ds)\,y \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立ちます．最後の行列 $\begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}$ は複雑です．そこで，それを

$$\begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}=AB$$

のように表し，行列の積であると考えてみましょう[4)]．つまり，これが行列の積の定義であるとするわけです．

　このように積を定義すると

$$A\left(B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=(AB)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{$*$}$$

が成り立ちます．

　この等式から行列の積についての基本性質

$$A(BC)=(AB)C \qquad \text{（結合法則）}$$

が導かれます：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は任意のベクトルなので，それに行列 C を掛けたベクトル $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で置き換えても等式は成立します：

$$A\left(B\left(C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\right)=(AB)\left(C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right).$$

上の $(*)$ より，上式の左辺は $A((BC)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=(A(BC))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，右辺は $((AB)C)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となるので

$$(A(BC))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=((AB)C)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が成立します．$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は任意なので，それを除くと結合法則が得られます．

　行列の積に関する他の演算法則

$$(A+B)C=AC+BC,\quad A(B+C)=AB+AC, \qquad \text{（分配法則）}$$

$$(pA)B=A(pB)=p(AB) \qquad \text{（p は実数）}$$

を示すには，行列の成分表示を用いて積を計算するほうが簡単でしょう．

---

4) 行列の積 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}$ の計算は，左側の $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を行ベクトルを並べた $\begin{pmatrix}(a&b)\\(c&d)\end{pmatrix}$，右側の $\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}$ を列ベクトルを並べた $\left(\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\right)$ と見て，$(a\ \ b)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=ap+bq$，$(c\ \ d)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=cp+dq$ などに注意し，

$$\begin{pmatrix}(a&b)\\(c&d)\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(a&b)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} & (a&b)\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\\ (c&d)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} & (c&d)\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

と見るとよいでしょう．さらに，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\right)$$

と見なすこともできることに注意しましょう．

なお，等式 $A(B\binom{x}{y}) = (AB)\binom{x}{y}$ は，線形変換の合成はまた線形変換であること，また線形変換 $f : A$，$g : B$ の合成変換 $f \circ g$ の表現行列は AB であることを示しています．合成変換を $f \circ g$ と積の形のように表した理由が納得できるでしょう．

ところで，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，容易に確かめられるように，$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ となるので，

$$AB \neq BA$$

であり，行列の積については，一般に，交換法則は成り立ちません．このことを，行列の積は一般に“ **非可換** である ”といいます．

では，ここで問題．任意の行列 A と交換する（可換な）行列 $C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ はあるかな．あるとすれば，どんな形の行列かな．ヒント：$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ などと成分表示して，任意の実数 a, b, c, d に対して $AC = CA$ を（各成分で）満たす C を探すことになります．まず，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ などとしておいて，k，l，m，n に条件をつけておくとよいでしょう．
答：k を任意の実数として，$C = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です．特に $k = 0$ のとき C は 2 次の零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ になりますね．

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 次の **単位行列** といい，I（または，E）で表します．I と O の積に関する性質をまとめると，任意の 2×2 行列 A に対して

$$AI = IA = A, \quad \text{特に} \quad I^2 = I,$$

$$AO = OA = O, \quad \text{特に} \quad O^2 = O$$

です．ただし，行列 A について，AA を A^2，A^2A を A^3，$\cdots$ のように表します．O, I は実数でいえば 0, 1 に当たる行列ですね．

行列の和や積の演算法則を見ると，行列は実数に似たところもあり，積の交換法則が成り立たないなど，違う点もありますね．決定的に違う点を示す例を挙げてみましょう．$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ を計算すると零行列 O になりますね．また $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O$ ですね．このように，行列にはそれ自身は O でなくとも積が O になる場合があります．$A \neq O$，$B \neq O$ で $AB = O$ のとき，A, B を **零因子**（ゼロ因子）といいます．行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が示す特殊な性質

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix},\quad \text{よって}\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}=O,$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix},\quad \text{よって}\quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}=O$$

は興味深く，しかも，次の §§ で例解するように，意外な応用があります．

6.1.3.4　**非可換な行列と零因子の恐るべき応用例**

本題から脱線して楽しみましょう．コマの回転や地球の自転，フィギュアスケート選手のスピンなどのように自転するものは回転による運動量をもち，これを「角運動量」といいます．特に荷電物体が回転すると「磁気モーメント」という磁石の強さを表す量が生じて，荷電物体は磁石になります．君たちが子供の頃に遊んだ，棒磁石や U 字型磁石は，実は，その中の小さな小さな，しかし莫大な数の電子がそろって右回りか左回りに自転した状態と考えられています（本当はそう単純ではありません．この問題に興味ある人は相対論的電子論の基礎となる「ディラック方程式」を勉強しましょう）．電子の自転と見なされる角運動量は「スピン角運動量」と呼ばれます．

さて，電子のような極微な世界で有効な物理学は量子力学ですが，その力学理論では物理量は対応する「演算子」として扱われます（例えば，演算子 F を状態ベクトル ψ_A, ψ_B で内積 $(\psi_A, F\psi_B)$ をとると測定される物理量 F_{AB} が計算されます（☞186 ページ）．量子力学の演算子は，しかしながら，非可換であり，例えば，スピン角運動量 $\boldsymbol{S}=(s_x,\ s_y,\ s_z)^T$ は，$\hbar$（エィチスラッシュ）をある物理定数，i を虚数単位として，

$$\begin{cases} s_x s_y - s_y s_x = i\hbar s_z \\ s_y s_z - s_z s_y = i\hbar s_x \\ s_z s_x - s_x s_z = i\hbar s_y \end{cases} \qquad \text{（交換関係）}$$

を満たすことが知られています．

こんな奇妙なものは，したがって，行列のような非可換なもので表現するしかありません（いったんある表現がなされると，その表現を用いて理論が正しく展開されます）．上の交換関係を満たす 1 つの表現行列は次のものです：

$$s_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad s_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad s_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

まず，これらが（交換関係）を満たすのを確かめておきましょう．

さて，$s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は特別な役割を担うように定められています．217 ページの脚注で固有値・固有ベクトル[5]に触れましたが，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が s_z の固有ベクトルになるように，つまり，電子の自転軸が z 軸方向のとき，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は右回り状態を，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は左回り状態を表すように定めてあります：

$$s_z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

s_z の固有値が $\pm\frac{\hbar}{2}$ であることは暗算で確かめられますね．

上の議論を線形代数の言葉で整理しましょう．上の固有ベクトルからわかるように，電子のスピン角運動量の状態を表す空間は，ベクトルの成分数より 2 次元で，s_y との積によって複素ベクトルを含むから，複素 2 次元空間（$\mathbb{C}_S^2$ と表そう）ですね．よって，スピン角運動量演算子は $\mathbb{C}_S^2$ 上の変換ということになります．固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，線形独立で，その線形結合は $\mathbb{C}_S^2$ の任意のベクトルを表せるので，$\mathbb{C}_S^2$ の基底です（これを示すのは後の練習問題で）．したがって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 以外に s_z の固有ベクトルはなく（☞ 練習問題），固有値は $\pm\frac{\hbar}{2}$ の 2 つのみです．したがって，電子が自転していない状態やより高速で回転している状態はありません．

ここで，2 つの行列

$$s_x \pm is_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えます．これらは，係数を除けば，先の §§6.1.3.3 に出てきた零因子ですね．したがって，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は固有値が $-\frac{\hbar}{2}$ の状態から $+\frac{\hbar}{2}$ の状態に $\hbar$ だけ上げ，また $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は同様に固有値を $\hbar$ だけ下げます．そこで，さらに $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に適用すれば固有値 $+\frac{3\hbar}{2}$ の状態が得られるのでしょうか．もしそうなら固有状態は 2 つだけという条件に反します．実際には暗算で

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

[5] 線形変換 $f : A$ に対して，方程式 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ を満たす定数 λ を A の固有値といい，$\vec{x}(\neq \vec{0})$ を固有値 λ の固有ベクトルといいます．

がわかり，結果の $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から固有値 $+\dfrac{3\hbar}{2}$ の状態は存在しないことが確かめられますね．同様に $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から $-\dfrac{3\hbar}{2}$ の状態がないことも確かめられます．

予告した練習問題です．

問（1）：$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{C}_S^2$ の基底であることを示しなさい．

ヒント：§§5.1.3.2 で基底の定義を確認しよう．

解答：（ｉ）$\mathbb{C}_S^2$ の任意のベクトル $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$（$\alpha, \beta$ は複素数）は

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の線形結合で表されます．また，（ii）方程式

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

において，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は直交するから，両辺に $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を内積して，$\beta(0\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\beta=0$ が得られます．同様に，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を内積して，$\alpha(1\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha=0$ を得ます．したがって，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は線形独立です．以上，（ｉ），（ii）の議論より，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{C}_S^2$ の基底です．

問（2）：（1）が成り立つとき，$\mathbb{C}_S^2$ のベクトル $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$（ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に比例しないように，$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$）は s_z の固有ベクトルにはなり得ないことを示しなさい．

ヒント：$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ と表されますね（固有ベクトルの線形結合！）．

解答：両辺に s_z を掛けると，

$$\begin{aligned}s_z\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}&=\alpha\, s_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\, s_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\alpha\,\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\beta\,\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix}\nparallel\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\qquad(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)\end{aligned}$$

だから，$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ は s_z の固有ベクトルにはなりません．これは，（正しくは，異なる固有値をもつ）固有ベクトルの線形結合は固有ベクトルではないことを意味します．その対偶を考えると，異なる固有値をもつ固有ベクトルは線形独立であることがわかります．

6.1.3.5　行列の累乗とケーリー・ハミルトンの定理

任意の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その‘2 次の’多項式

$$f(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)I$$

を計算してみましょう．$f(A)=(A-aI)(A-dI)-bcI$ と変形しておくと少し簡単になるでしょう．なんと，零行列 O になりましたね：

$$f(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=O.$$

この事実は **ケーリー・ハミルトンの定理** として知られています．

ケーリー・ハミルトンの定理は，任意の 2×2 行列 A に対して，

$$A^2=(a+d)A-(ad-bc)I$$

が成り立つ，つまり A の‘2 次の’項 A^2 は A の 1 次式で表されることを意味します．同様に，上の等式をくり返して用いると，A^n $(n=3,\ 4,\cdots)$ もやはり A の 1 次式で表されますね．したがって，‘行列の多項式には次数の概念が基本的にない’のです．

次数をもち込むためには，例えば上の多項式に対して，始めに実数 x の 2 次の多項式

$$f(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$$

を用意しておいて，その x を行列 A で置き換え，定数項に単位行列 I をつけた

$$f(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)I$$

を A の 2 次の多項式 $f(A)$ と定義します．一般の行列の多項式を定義するときも，同様に，実数の多項式から出発します．

$f(x)$ については

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-(a+d)x+(ad-bc) \\ &=(x-a)(x-d)-bc=(a-x)(d-x)-bc \\ &=\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

のように 2 次の行列式で表され，さらに $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ だから

$$f(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$
$$= |A - xI|$$

と表されることに注意しておきましょう．

n 次の正方行列 A に対しても，n 次の行列式を用いて，$f(x) = |A - xI|$ が定義でき，その行列式を展開して定理 $f(A) = O$ が得られます．それらは行列の理論において重要な役割を演じます．

さて，任意の高次の行列の多項式 $F(A)$ を A の 1 次以下の式で表す簡単な方法を示しましょう．行列の多項式 $F(A)$ に対応する x の多項式 $F(x)$ を 2 次の多項式 $f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ で割り，その商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ としましょう：

$$F(x) = f(x)Q(x) + R(x).$$

ここで x を A で置き換えると，ケーリー・ハミルトンの定理より $f(A) = O$ だから

$$F(A) = R(A)$$

が成立します．$f(x)$ は 2 次なので $R(x)$ は 1 次以下，よって $R(A)$ も A の 1 次以下の式になります．

問題をやるとよくわかります．問：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき A^6 を求めなさい．

ヒント：$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ と $f(x)$ が因数分解されることを利用します．

解答：$F(x) = x^6$ とおいて，$F(x)$ を $f(x)$ で割り，商を $Q(x)$，余りを $R(x) = px+q$ とすると

$$F(x) = x^6 = (x+1)(x-3)Q(x) + px + q.$$

したがって，$F(-1) = (-1)^6 = -p + q$，$F(3) = 3^6 = 3p + q$ より，$p = \frac{3^6 - 1}{4}$，$q = \frac{3^6 + 3}{4}$ が得られます．したがって，答は

$$A^6 = pA + qI = \frac{3^6 - 1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3^6 + 3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^6 + 1 & 3^6 - 1 \\ 3^6 - 1 & 3^6 + 1 \end{pmatrix}$$

ですね．

6.1.3.6　逆行列

実数 a の逆数 a^{-1} に当たるものは行列の演算でも考えることができます．積の交換則 $AB = BA$ が成立しないことに注意して，

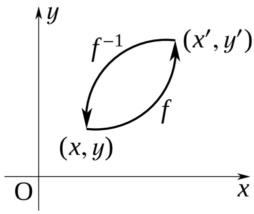
$$AX = I \quad かつ \quad XA = I$$

を満たす X が存在するとき，それを行列 A の **逆行列** と定義し，A^{-1} で表しましょう．したがって，

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

が成り立つ行列 A^{-1} が A の逆行列です．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と成分表示して，その逆行列 A^{-1} を求めましょう．A^{-1} を $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ などと成分表示して条件 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ に代入し，成分を決めるのはかなり骨が折れます．そこで，逆行列 A^{-1} が存在するとして，それが満たす条件つまり必要条件から A^{-1} を求めて，それが十分条件を満たすかどうかを調べることにしましょう．



求める必要条件は線形変換 $f : A$ とその逆変換 $f^{-1} : A^{-1}$ を考えると得られます．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

としましょう．そこで，A を成分表示しておいて，A から A^{-1} を導きましょう．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases}$$

だから，最後の連立方程式を x, y について解くと

$$x = \frac{x'd - y'b}{ad - bc}, \quad y = \frac{ay' - cx'}{ad - bc} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} x'd - y'b \\ ay' - cx' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が得られます．これを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と比較すると

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad のとき \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であることがわかります．

ここで，上の A^{-1} は必要条件から得られたので注意が必要です．まず，$ad-bc=0$ ならば 0 で割ることになるので，その場合には A の逆行列 A^{-1} は存在しません．$ad-bc$ は行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の **行列式** (determinant) と呼ばれ，$\det(A)$ や $|A|$ または $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ などで表されます．A の逆行列がないのは A が零行列 O である場合とは限らないので注意が必要です．なお，行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するとき A は **正則** であるといいます．

次に，上で得られた A^{-1} が逆行列の定義 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ を満たすことを確かめなければなりません．練習問題として実際に計算してみましょう．確かに満たすことが確認できますね．よって，正しい逆行列 A^{-1} は，必要条件から得られたもののうち，$\det(A)\neq 0$ なものですね．

ここで，逆行列に関する 2 つの定理

$$(A^{-1})^{-1}=A, \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

を示すのを練習問題としましょう．証明方法は何通りもあります．
前者の意味は明らかですね．$A^{-1}A=AA^{-1}=I$ は ‘ A^{-1} の逆行列は A である ’ と読み取れますね．
後者は，線形変換 $f:A$, $g:B$ の合成変換 $f\circ g:AB$ によって，点 P が $\mathrm{P}\xrightarrow{g}\mathrm{Q}\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ と移されたとしたら，その逆変換 $(f\circ g)^{-1}$ は $\mathrm{P}\xleftarrow{g^{-1}}\mathrm{Q}\xleftarrow{f^{-1}}\mathrm{R}$ と移す変換 $g^{-1}\circ f^{-1}$ であることを述べています：$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

ついでに，行列式の積の定理

$$|AB|=|A||B|$$

も練習問題にしましょう．
ヒント：A, B を成分表示して計算するしか方法なし：$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$.
補助定理

$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix},$$

および

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} ap & b \\ cp & d \end{vmatrix}=p\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & br \\ c & dr \end{vmatrix}=r\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

を使うと少し楽（証明してから使おう）.

方針：$|AB|$ を $|A||B| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$ にもっていこう．

答：

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{vmatrix}$$

において補助定理を使うと，

$$\begin{aligned}
|AB| = \begin{vmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ap & ar+bs \\ cp & cr+ds \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bq & ar+bs \\ dq & cr+ds \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} ap & ar \\ cp & cr \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ap & bs \\ cp & ds \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bq & ar \\ dq & cr \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bq & bs \\ dq & ds \end{vmatrix} \\
&= \quad 0 \quad + ps\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + qr\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + \quad 0 \\
&= ps\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - qr\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}(ps-qr) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} \\
&= |A||B|.
\end{aligned}$$

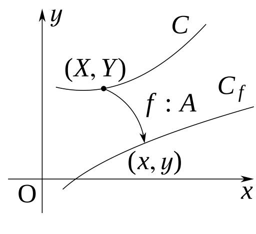
（証明終）

以上の 3 つの定理 $(A^{-1})^{-1} = A$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，$|AB| = |A||B|$ は，2×2 行列で示しましたが，一般の n 次の正方行列でも成り立ちます．

6.1.4　平面の線形変換と図形

平面の線形変換によって図形はどのように変換されるのでしょうか．図形の方程式や線形変換の面積比などを議論しましょう．

6.1.4.1　逆行列と図形の線形変換



逆行列の応用として，平面図形の線形変換を議論しましょう（もちろん，逆変換がある場合です）．曲線 C の方程式が $F(x, y) = 0$ と表されるとき，位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いてそれを

$$C : F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

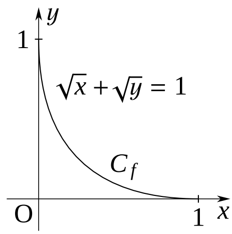
と表すことにしましょう．曲線 C が線形変換 $f : A$ によって曲線 C_f に移されたとします．f によって，点 (X, Y) が点 (x, y) に移ったとすると（このこ

とは $f:(X,Y)\mapsto(x,y)$ と表されます)，C の方程式は，$F\left(\binom{X}{Y}\right)=0$，または，$\binom{X}{Y}=A^{-1}\binom{x}{y}$ の関係によって，$F\left(A^{-1}\binom{x}{y}\right)=0$ で表されます．このとき，その $\binom{x}{y}$ は C_f 上の点 (x,y) に対応する位置ベクトルです．したがって，その方程式は曲線 C_f 上の点に対する方程式，つまり C_f を表す方程式になります：

$$C_f : F\left(A^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)=0.$$

よって，曲線 $C:F\left(\binom{x}{y}\right)=0$ を線形変換 $f:A$ によって移された曲線 C_f の方程式は，$F\left(\binom{x}{y}\right)=0$ の $\binom{x}{y}$ を単に $A^{-1}\binom{x}{y}$ で置き換えればよいことになります．このことを C の元の表現 $F(x,y)=0$ に戻していうと，$F(x,y)=0$ の変数 $x,\ y$ を $A^{-1}\binom{x}{y}$ の $x,\ y$ 成分でそれぞれ置き換えると，$f:A$ で変換された曲線 C_f の方程式が得られるというわけです．

手頃な演習問題をしておきましょう．問：放物線



$$C: y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\qquad\left(|\,x\,|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を原点の周りに -45° 回転すると，曲線

$$C_f:\ \sqrt{x}+\ \sqrt{y}=1$$

になることを示しなさい．この話題は『$+\alpha$』でもとりあげました．

ヒント：-45° 回転する変換は，§§6.1.1.2 で議論した，$f_{-45^\circ}:R_{-45^\circ}$ ですね．変換をした後で，式を整理するのに汗を流してもらいます．C の条件 $|\,x\,|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に注意します．$f_{-45^\circ}:(X,Y)\mapsto(x,y)$ とすると，$f^{-1}_{-45^\circ}:R^{-1}_{-45^\circ}=R_{+45^\circ}$ で，先の C の方程式は $C:Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}X^2+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\left(|\,X\,|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と表されます．このとき，$C_f:\ \sqrt{x}+\ \sqrt{y}=1$ は $\sqrt{x},\ \sqrt{y}$ を含むので，$x\geqq 0, y\geqq 0$ を導く必要があります（試験に強くなる一寸（ちょっと）した小技です）．

解答：

$$R_{+45^\circ}=\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

だから，

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=R_{+45^\circ}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}.$$

よって，$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$，$Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ です．これを $C:Y=\frac{\sqrt{2}}{2}X^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$ $(|X|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}})$ に代入して C_f の方程式を得ます．整理して，

$$C_f : 2(x+y)=(x-y)^2+1 \qquad (|x-y|\leqq 1)$$

となります．

$x\geqq 0, y\geqq 0$ はこの式から導出されます．$(x-y)^2+1$ を $(x-y+1)^2-2(x-y)$ とか $(x-y-1)^2+2(x-y)$ などと変形することに気づくと，

$$4x=(x-y+1)^2\geqq 0, \qquad 4y=(x-y-1)^2\geqq 0$$

が得られます．最後に，条件 $|x-y|\leqq 1$ に注意を払うと，上式より

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) &= |x-y+1|+|x-y-1| \\ &= +(x-y+1)-(x-y-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

したがって，C_f の方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ が得られます．

なお，線形変換 $f:A$ の逆変換が存在しない場合についてコメントしておきましょう．$f:(X,Y)\mapsto(x,y)$，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ で $ad-bc=0$ とします．

（あ）$A=O$ のとき，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$ だから，f は全ての点を原点 O に移します．これは原点にブラックホールを造るような変換ですね．

（い）$A\neq O$ のとき，A の成分のどれかは 0 でなく，$a\neq 0$ としても議論の一般性は失われません．$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aX+bY\\cX+dY\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{cases} cx=acX+bcY \\ ay=acX+adY \end{cases} \Rightarrow \ cx-ay=(bc-ad)Y=0$$

だから，全ての点は原点を通る直線 $y=\frac{c}{a}x$ 上に移されます（つまり，ぺしゃんこに潰（つぶ）されるわけです）．

例として，$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ の場合に，先の練習問題の放物線 $C:Y=\frac{\sqrt{2}}{2}X^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$ $(|X|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}})$ に適用してみましょう．$x=X$，$y=X$，$|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となりますから，C 上の点 (X,Y) は，Y によらずに，点 (X,X) $(|X|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}})$ に移されます．

6.1.4.2　行列式と線形変換の面積比

平面上の線形変換における 2 次の行列式の意味を考えます.

まず, 線形変換によって, 一般に, ‘ 平行な直線は平行な直線に移る ’ことを示しましょう．線形変換を $f:(X,Y)\mapsto(x,y)$ として，変換行列を $f:A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とします．この変換によって，方向ベクトル $\vec{\ell}$ の直線 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\vec{a}+t\vec{\ell}$（☞§§3.3.3）は図形

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\vec{a}+tA\vec{\ell}$$

に移ります．これは $A\vec{\ell}$ が $\vec{0}$ でない限り直線を表します．したがって，方向ベクトルが同じ直線は一般に変換後も共通の方向ベクトルをもつ直線になります.

次に，単位正方形 $0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ の 2 辺は単位ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で表され，それは上の変換によって（つぶれない限りは）$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ を 2 辺とする平行四辺形に移されます（$A=\left(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right)$ に注意）．その面積は $|ad-bc|=|\det A|$ となります（計算は下の練習問題に残しておきます）．したがって，‘ 線形変換 $f:A$ によって，面積は $|\det A|$ 倍される ’ ことになります．この結果は，平面を小さな格子状に切り分けて考えるとわかるように，一般の図形の面積も $|\det A|$ 倍されることを示しています.

練習問題．ベクトル $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ が作る平行四辺形の面積 S を求めなさい.

ヒント：§§3.8.4 の点と直線の距離の公式を使うのがスマート．または，$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ を空間ベクトル $\begin{pmatrix}a\\c\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\\0\end{pmatrix}$ に昇格させると，§§4.3.4.4 の外積計算が使えます.

解法 1：点 (b,d) から直線 $y=\frac{c}{a}x$（つまり，$cx-ay=0$）に下ろした垂線の長さは $\frac{|cb-ad|}{\sqrt{c^2+a^2}}$ だから,

$$S=\left|\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\right|\cdot\frac{|cb-ad|}{\sqrt{c^2+a^2}}=|ad-bc|.$$

解法 2：ベクトル $\begin{pmatrix}a\\c\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\\0\end{pmatrix}$ の外積の大きさはそれらが作る平行四辺形の面積 S に等しいから,

$$S=\left|\begin{pmatrix}a\\c\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b\\d\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\ad-bc\end{pmatrix}\right|=|ad-bc|.$$

Q1. 列ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を表すのに，行ベクトル $(a\ \ b)$ の右肩に記号 T をつけたもの $(a\ \ b)^T$ で表しました．T は行と列を入れ換える記号で「転置記号」といいます．行列についても，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として，

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

のように行と列を入れ換えてできる行列を A の **転置行列** といいます．$m \times n$ 行列においても同様に定義します．では問題です．

2 次の正方行列 $A,\ B$ で，定理

$$(AB)^T = B^T A^T$$

を示しなさい．ヒント：行列を成分表示します．この定理は，一般の行列 $A,\ B$ に対しても，積 AB が定義できる場合には成り立ちます．

Q2. 直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ を $+60°$ 回転して得られる直線の方程式を求めなさい．

A1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ と成分表示すると，

$$AB = \begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}, \quad \text{よって} \quad (AB)^T = \begin{pmatrix} ap+bq & cp+dq \\ ar+bs & cr+ds \end{pmatrix}.$$

一方，

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qb & pc+qd \\ ra+sb & rc+sd \end{pmatrix} = (AB)^T.$$

これで示されましたね．

A2. §§6.1.4.1 で学んだとおりです．$R_{60°}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の $x,\ y$ 成分を直線の方程式 $x - \sqrt{3}y = 0$ の $x,\ y$ 成分にそれぞれ代入するだけです．

$$R_{60°}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{-60°}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + y \end{pmatrix}$$

より，求める方程式は

$$\frac{x + \sqrt{3}y}{2} - \sqrt{3}\frac{-\sqrt{3}x + y}{2} = 0, \quad \text{よって} \quad x = 0$$

となりますね．（元の直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ は x 軸から $+30°$ 傾いています）．

§6.2　行列の一般化

行列の次数を 2 次から 3 次，$\cdots, n$ 次と一般化しましょう．その次数は対象としている問題の未知数や変数の個数を意味します．

6.2.1　連立 1 次方程式と行列

2 元連立 1 次方程式 $ax + by = p$，$cx + dy = q$ は，この章の始めに述べたように（☞ 232 ページ），性質 $\binom{a}{c} = \binom{b}{d} \Leftrightarrow a = b,\ c = d$ を活用して，行列とベクトルの積を含む形で表されました：

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を上の連立 1 次方程式の **係数行列** といい，その逆行列 A^{-1} があるときは，$A^{-1}A = I$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} pd - qb \\ aq - cp \end{pmatrix}$$

と正しい解が得られます．このことは，x, y が単なる未知数であってもそれらを並べてベクトルとして扱うことができ，行列の演算方法に従って計算できることを意味します．

後々の一般的議論のために，A^{-1} が存在しないことと方程式の不能や不定との関係を調べておきましょう．連立方程式 $\begin{cases} ax + by = p \cdots ① \\ cx + dy = q \cdots ② \end{cases}$ の解を 2 直線①, ②の交点（正しくは 共有点）と見なすのがわかりやすいでしょう．不能の場合は①, ②が平行 2 直線になるから $a : c = b : d \Leftrightarrow ad - bc = 0$（$A^{-1}$ なし）であり，不定の場合は，①, ②が一致するから，$a : c = b : d = p : q$ なので，$ad - bc = 0$ に加えて $\begin{pmatrix} pd - qb \\ aq - cp \end{pmatrix} = \vec{0}$ も成り立ちます．

上の行列演算や方程式の不能や不定を連立方程式の形で述べておきましょう．簡単のために，$a, b, c, d \neq 0$ として，① $\times\, d$ = ③, ② $\times\, b$ = ④，および

①×c = ⑤, ②×a = ⑥ を作ります．すると，③ − ④ = ⑦ と ⑥ − ⑤ = ⑧ で連立したことに当たります：

$$\begin{cases} ax+by=p & \cdots ① \\ cx+dy=q & \cdots ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} adx+bdy=pd & \cdots ③ \\ bcx+bdy=qb & \cdots ④ \end{cases} \\ \begin{cases} acx+bcy=cp & \cdots ⑤ \\ acx+ady=aq & \cdots ⑥ \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (ad-bc)x+0y=pd-qb & \cdots ⑦ \\ 0x+(ad-bc)y=aq-cp & \cdots ⑧. \end{cases}$$

⑦と⑧から，$ad-bc \neq 0$ のときは行列計算の結果に一致し，$ad-bc=0$ のときは，右辺 $\neq 0$ に対応して不能 ($0x+0y \neq 0 \Leftarrow$ ①,②が平行 2 直線)，また，右辺 $=0$ に対応して不定 ($0x+0y=0 \Leftarrow$ ①,②が一致) になりますね．一般の高次連立 1 次方程式の解の有無については，我々はいずれ行列の「階数」（ランク）という概念を用いて議論することになります．

さて，同じ係数をもつ 2 組の連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \quad \begin{cases} az+bw=r \\ cz+dw=s \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

を考えます．前の §§ で注意したように，行列と行列の積に関する特徴

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

を逆手にとると，この 2 組の連立方程式は 1 つの行列の方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

にまとめることができ，係数行列の逆行列を左から掛けて正しい解が得られます．このことから，行列はベクトルを並べたものと解釈でき，また,‘ ベクトルは行列の特別な場合 ’ と見なすこともできます．

また，一般に不定な解をもつ 2 元 1 次方程式 $ax+by=p$ を

$$(a \ \ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=p$$

と表したとき，ベクトル $\binom{x}{y}$ を特別な行列と見なしたわけですから，行ベクトル $(a \ \ b)$ も行列と見なしましょう．

また，一般には不能な連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \\ ex+fy=r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ ex+fy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad を \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad と表し，$$

3 行 2 列の行列なども考えることができます．左辺の行列とベクトルの積の計算方法は明らかでしょう．

3 つの方程式を連立して一般に 1 組の解をもつ場合は 3 元の方程式

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

ですね．今度は 3 行 3 列の行列が現れました．

6.2.2　一般の行列

6.2.2.1　*m* 行 *n* 列の行列

前の §§ の議論から，一般の m 行 n 列の行列 $(m,\ n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考えることは意味がありそうです．行列の成分の数が多いときは，第 i 行，第 j 列にある $(i,\ j)$ 成分を a_{ij} などと 2 重の添字をつけて表すのが便利です．すると m 行 n 列の行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように表すことができます．ただし，いつでもこのように表すのは不便なので，$(i,\ j)$ 成分で代表させて，

$$A = \left(a_{ij}\right)$$

のように表したりします．

m 行 n 列の行列を簡単のために $\boldsymbol{m \times n}$ **行列** といい，特に行と列が等しい $n \times n$ 行列を $\boldsymbol{n}$ **次の正方行列**（簡略して「n 次行列」）といいます．また，$m \times 1$ 行列は「m 次の列ベクトル」，$1 \times n$ 行列は「n 次の行ベクトル」といいます．

さて，2×2 行列で成立した演算を一般の行列に拡張して定義しましょう．

行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ の全ての成分を p 倍して得られる行列を pA で表します：

$$A = \left(a_{ij}\right) \quad \text{のとき} \quad pA = \left(pa_{ij}\right).$$

2 つの行列 A, B が共に $m \times n$ 行列のとき，行列 A, B は **同じ型** であるといいます．同じ $m \times n$ 型の行列 $A = \left(a_{ij}\right)$，$B = \left(b_{ij}\right)$ の対応する成分が全て等しいとき，A, B は等しいといい，$A = B$ で表します：

$$A = B \ \Leftrightarrow \ a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1,\ 2, \cdots, m, \quad j = 1,\ 2, \cdots, n).$$

同じ型の 2 つの行列 A, B の対応する成分の和を成分とする行列を A と B の和といい，$A + B$ と書きます：

$$A = \left(a_{ij}\right),\ B = \left(b_{ij}\right) \quad \text{のとき} \quad A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right).$$

なお，同じ型の行列 A, B の差 $A - B$ は和 $A + (-1)B$ で定めます．

6.2.2.2　行列の積

行列の積については，前の §§ で見たように，同じ型の正方行列の積の場合でなくても定義できます．方程式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = p$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = p$$

と表して，行ベクトルと列ベクトルの積を導入しましょう．この積はベクトルの内積に当たります．この行ベクトル，列ベクトルはそれぞれ $1 \times n$，$n \times 1$ 型の行列ですね．

行列 $A = \left(a_{ij}\right)$，$B = \left(b_{ij}\right)$ の積 AB は，A, B がそれぞれ $m \times n$ 型，$n \times l$ 型の行列のとき定義できます：積 AB が表す行列を $C = \left(c_{ij}\right)$ として

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \vdots & b_{nl} \end{pmatrix} = C = \left(c_{ij}\right),$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

のように定義しましょう．このとき $C = AB$ は $m \times l$ 型の行列になります．この行列の積の定義はこれまで議論してきたものをそのまま一般化したものになっていますね．

行列 A, B の積 $AB = C$ の $(i,\ j)$ 成分 c_{ij} は多くの項の和になっています．こんな場合には和を表す記号 $\overset{\text{シグマ}}{\Sigma}$ を用いるのが便利です[6]．この記号を用いると $m \times n$ 型の行列 A と $n \times l$ 型の行列 B の積は

$$AB = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

のように表されます．

では，ここで練習です．次の積を求めなさい．

$$\text{（i）}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{（ii）}\quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

ヒント：（i）2×3 行列と 3×2 行列の積ですから 2×2 行列になりますね．（ii）列ベクトルは 3×1 行列，行ベクトルは 1×3 行列ですから，積は 3×3 行列ですね．

答：

$$\text{（i）}\quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \text{（ii）}\quad \begin{pmatrix} pa & pb & pc \\ qa & qb & qc \\ ra & rb & rc \end{pmatrix}.$$

---

[6] Σ はギリシャ文字でローマ字の S に当たります．英語の Sum（和）の意味で Σ を使います．すでに断らずに使っていますが，この章では高級な使い方をしますので，きちっと定義しておきます．整数の変数 k に対して，k の式 $f(k)$（例えば，$f(k) = k^2$，または $f(k) = a_k$ など）が与えられたとき

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \begin{cases} f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n) & (m < n) \\ f(m) & (m = n) \end{cases}$$

と定めます（$m > n$ のときは定義されません）．

6.2.2.3　行列の演算法則

行列の和・実数倍・積の定義から得られる演算法則をまとめて列挙します．

和について

$$A+B=B+A, \qquad (A+B)+C=A+(B+C).$$

実数倍について

$$(p+q)A=pA+qA, \qquad p(A+B)=pA+pB, \qquad p(qA)=(pq)A.$$

積について

$$(AB)C=A(BC), \qquad A(B+C)=AB+AC,$$

$$(A+B)C=AC+BC, \qquad p(AB)=(pA)B=A(pB).$$

このうち，積に関する結合法則 $(AB)C=A(BC)$ を除くと容易なので，それらの証明は君たちに任せます．$(AB)C=A(BC)$ を示すのに，A, B, C を成分表示しておいて，それらの積の行列を直接求めるのはいくら何でも無謀ですから，Σ をうまく活用しましょう．ただし，3 つの行列の積ですから 2 重の Σ が現れます．

証明に先立って，計算に必要な公式を導いておきましょう．

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1+x_2+\cdots+x_n, \qquad \sum_{l=1}^{n} x_l = x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

$$\text{よって}\quad \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{l=1}^{n} x_l.$$

つまり，Σ の変数は整数であれば何でもよいわけです．次に，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(ax_k+by_k) &= (ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)+\cdots+(ax_n+by_n)\\ &= (ax_1+ax_2+\cdots+ax_n)+(by_1+by_2+\cdots+by_n)=\sum_{k=1}^{n} ax_k+\sum_{k=1}^{n} by_k\\ &= a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+b(y_1+y_2+\cdots+y_n)=a\sum_{k=1}^{n} x_k+b\sum_{k=1}^{n} y_k.\end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad \sum_{k=1}^{n}(ax_k+by_k)=\sum_{k=1}^{n} ax_k+\sum_{k=1}^{n} by_k=a\sum_{k=1}^{n} x_k+b\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

注意すべきは

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k y_l + x_k y_m) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_l + \sum_{k=1}^{n} x_k y_m = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) y_l + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) y_m$$

です．k と l, m が無関係なので，y_l, y_m は x_k に対して定数です.

では，$(AB)C = A(BC)$ を示しましょう．$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$，$C = (c_{ij})$ をそれぞれ $m\times p$，$p\times q$，$q\times n$ 行列としましょう．積の行列 AB，BC の $(i,\ j)$ 成分を表すのに記号 $(AB)_{ij}$，$(BC)_{ij}$ も用いましょう：

$$AB = \left((AB)_{ij}\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right), \qquad BC = \left((BC)_{ij}\right) = \left(\sum_{l=1}^{q} b_{il} c_{lj}\right),$$

$$\text{また,} \qquad (AB)_{il} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl}, \qquad (BC)_{kj} = \sum_{l=1}^{q} b_{kl} c_{lj}.$$

これで準備ができました．$A(BC)$ から $(AB)C$ を導きます.

$$\begin{aligned}
A(BC) &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,(BC)_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{kl} c_{lj}\right)\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + \cdots + b_{kq}c_{qj})\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{k1}c_{1j} + a_{ik}b_{k2}c_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kq}c_{qj})\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k1}c_{1j} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k2}c_{2j} + \cdots + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kq}c_{qj}\right) \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kq}\right)c_{qj}\right) \\
&= \left((AB)_{i1}c_{1j} + (AB)_{i2}c_{2j} + \cdots + (AB)_{iq}c_{qj}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{q} (AB)_{ik} c_{kj}\right) = (AB)C\,.
\end{aligned}$$

これで，$(AB)C = A(BC)$ が示されましたね.

Q1. 合成写像と行列の積

（1）$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への 2 つの線形写像 $f : A$, $g : B$ が一致することは，$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ として，

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \iff A\vec{x} = B\vec{x}$$

が成り立つことを意味します．このとき，$A = B$ であることを $m = n = 3$ の場合に示しなさい．ヒント：$A\vec{x} = B\vec{x}$ は任意の $\vec{x}$ について成り立つ恒等式です．$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，手間が少し和(やわ)らぐでしょう．

（2_a）2 つの線形写像 $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{l'}$ があるとき，それらの合成写像 $f \circ g(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$ を定義したい．そのとき，l, m, n, l' に付与される条件は何かな．

（2_b）（2_a）で $f : A$, $g : B$ とします．このとき，$f \circ g : AB$, つまり合成写像 $f \circ g$ の表現行列は f, g の表現行列の積 AB で表されることを $l = m = n = 3$ の場合に示しなさい．ヒント：§§6.1.3.3 の議論を参考にしましょう．数式を簡潔に書きたいときは次のようにするとよいでしょう．列ベクトル $\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix}$ を用いると $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ と表されます．同様に，行ベクトル $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3})$ を用いると $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$ と表されます．

Q2. 興味ある行列

（1_a）対角成分以外は 0 の正方行列を **対角行列** といいます．3 次の対角行列 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ を 3 次の正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ の左から掛けたもの DA と右から掛けたもの AD を求めなさい．（答だけでよい）．

（1_b）n 次の対角行列の積を議論するために **クロネッカーのデルタ** と呼ばれる便利な記号を導入しましょう：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

この記号を用いると，(i, i) 成分が λ_i の対角行列を $D = \left(d_{ij}\right)$ と書くと，$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ と表されます．D を n 次の対角行列とするとき，n 次行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ との積 DA, AD はどんな行列になるかを述べなさい．

ヒント：$\left(a_{ij}\right)\left(b_{ij}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)$, $\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$ ですね．

（2_a）3 次の行列 $E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ と 3 次行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ との積 $E_{32}A$, AE_{32} を求めなさい．（答だけでよい）．

（2_b）$E_{ab} = \left(e_{ij}\right) = \left(\delta_{ia}\delta_{bj}\right)$ を n 次の正方行列とするとき，n 次行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ との積 DA, AD はどんな行列になるかを述べなさい．

ヒント：E_{ab} は a 行 b 列成分のみが 1 で，残りは全て 0 の行列ですね．

A1.　（1）$A = \left(a_{ij}\right)$，$B = \left(b_{ij}\right)$ $(i,\ j = 1, 2, 3)$ とすると，$\left(a_{ij}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ などに注意して，

$$A\vec{x} = B\vec{x} \ \Leftrightarrow\ x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

と表されます．x, y, z についての恒等式であることに注意すると，$y = z = 0$ とおいて $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$ が得られます．同様にして，$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$. したがって，$A$, B の全ての成分が一致するから，$A = B$ が成り立ちます．A, B が一般の $m \times n$ 行列の場合も同様です．

（2_a）写像は $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{l'}$，$f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ の順で行われるので，$l' = l$ が必要ですね．このとき，$f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ です．

（2_b）$f \circ g(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = A(B\vec{x})$ において，

$$\begin{aligned} B\vec{x} &= \left(b_{ij}\right)\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} \\ &= x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2 + z\boldsymbol{b}_3 \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} A(B\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}(x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2 + z\boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1x + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2y + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3z \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1x + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2y + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3z \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1x + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2y + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (AB)\vec{x}. \end{aligned}$$

したがって，‘ $f : A$, $g : B$ のとき $f \circ g(\vec{x}) = (AB)\vec{x}$ だから，$f \circ g : AB$ ’ です．実は，行列の積はこのことが成り立つように定義されたのです．一般の線形写像 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$，$f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ の場合も同様に示されます．

A2.　(1$_a$)

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23} \\ \lambda_1 a_{31} & \lambda_2 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix}$$

(1$_b$)

$$DA = \left(d_{ij}\right)\left(a_{ij}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} a_{kj}\right) = \left(\lambda_i a_{ij}\right).$$

したがって，$A = \left(a_{ij}\right)$ が $\left(\lambda_i a_{ij}\right)$ になったわけですから，D を A の左から掛けると，A の i 行は λ_i 倍されます．

　また，

$$AD = \left(a_{ij}\right)\left(d_{ij}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k \delta_{kj}\right) = \left(a_{ij}\lambda_j\right).$$

今度は $AD = \left(a_{ij}\lambda_j\right)$ だから，D を A の右から掛けると，A の j 行は λ_j 倍されます．

(2$_a$)

$$E_{32}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$AE_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

(2$_b$)

$$E_{ab}A = \left(\delta_{ia}\delta_{bj}\right)\left(a_{ij}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ia}\delta_{bk}a_{kj}\right) = \left(\delta_{ia}a_{bj}\right).$$

したがって，E_{ab} を A の左から掛けたものは，δ_{ia} より a 行のみが 0 でなく，a_{bj} よりその行に A の b 行の成分が並ぶ，つまり，A の b 行の成分が a 行に移され，元の成分は全て消されます．また，

$$AE_{ab} = \left(a_{ij}\right)\left(\delta_{ia}\delta_{bj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{ka}\delta_{bj}\right) = \left(a_{ia}\delta_{bj}\right)$$

より，AE_{ab} は b 列のみに A の a 列成分 a_{ia} が並ぶ，つまり，A の a 列成分が b 列に移されて，元の成分は全て消滅します．