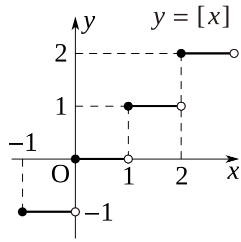
§1.3　関数概念の一般化（その 1）

関数の歴史とその概念の写像への一般化についてはこの章の始め（1 ページ）に述べました．写像への準備として，この § では変数 x，y を実数とする実関数 $y = f(x)$ に限定し，$f(x)$ の f を「関数」と見なす考え方を議論しましょう．その考え方は「合成関数」や「逆関数」を理解するときに重要であり，それに基づいて 3 角関数と逆 3 角関数，指数関数と対数関数を議論しましょう．

1.3.1　関数の拡張

今後，我々は 3 角関数・逆 3 角関数，指数・対数関数など多くの関数を議論します．それらの大半は，変数の式で表された ‘ 滑らかに変化する ’ 連続関数で，「解析関数」と呼ばれます．

分数関数 $y = \dfrac{a}{x-c}$ は，$x = c$ では定義できないのでそこで不連続になりますが，関数の定義域を $x = c$ を除く実数とすれば「不連続関数」と呼ばれる正当な関数になります．参考になる不連続関数はガウスの関数 $y = [\,x\,]$ です．記号 $[\,x\,]$ は，ガウス x と読み，「実数 x を超えない最大の整数」を意味します．したがって，$z \in \mathbb{Z}$，$0 \leqq q < 1$ のとき，



$$[\,z + q\,] = z$$

です（示しましょう）．この関数のグラフは階段状になっていることを確認しましょう．

また §1.1 の関数の定義から，関数は 1 個の式のみで表される必要はなく，定義域の異なる範囲では異なる式を用いて定義することも許されます．例えば「符号関数」と呼ばれる $\operatorname{sign} x$ は

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ \ \ 0 & (x = 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases}$$

で定義されます．

また §1.1 の定義によると，関数は必ずしも式で表す必要はありません．「ディリクレの関数」と呼ばれるいたるところ不連続な関数

$$\overset{\text{ファイ}}{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

なども数学理論に重要な関数として知られています．

さらに，関数の定義についてはその定義域として実数の範囲とするとは規定していません．したがって，定義域を自然数にとることもできます．例えば n を自然数として，

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

を n の **階乗** といいますが，$f(n) = n!$ を‘自然数の変数’n に対して定義された関数と見なすことができます．同様に，数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ も自然数 $\mathbb{N}$ を定義域とする関数 $f(n) = a_n$ と見なすこともできます．

1.3.2　関数概念の一般化 1

関数 $y = f(x) = 2x + 1$ を例として考えましょう．我々は，$f(x)$ は $2x + 1$ を表す‘便利な記号’であると見なしていますね．ここで，$f(x) = 2x + 1$ に対して集合論による新しい解釈をしてみましょう．まず，変数 x はいろいろな値をとれるのでその各々の値を考え，x を実数の集合 $\mathbb{R}$ の各々の要素と見なしましょう．すると，$2x + 1$ は，変数 x の式というよりは，各々の要素 x に対応する関数値と見なされます．よって，$2x + 1$ も x と同様に実数の集合 $\mathbb{R}$ の要素と見なされます．そう考えておいて，$f(x) = 2x + 1$ の‘f’は任意に定めた実数 x を 1 つの実数 $2x + 1$ に移す役割をもつと考えてみましょう．くだけた言い方をすると，f をカメラのレンズにたとえて，‘レンズ f’は被写体の‘点’x に作用して, それをフィルム上の‘点’$2x + 1$ に写すと考えるわけです．本当ですよ．実際，数学的には,‘f は実数 x を実数 $2x+1$ に **写像** する’といいます（事実，$2x + 1$ を x の **像** といい，x は **原像** または **逆像** といわれます）．より正確な表現をすると,‘f は実数の集合 $\mathbb{R}$ の任意の要素 x に実数の集合 $\mathbb{R}$ の 1 つの要素 $2x + 1$ を対応させる’といいます．f は x に $2x + 1$ を対応させる規則 :“2 倍して 1 を加えよ”を定めているわけです．

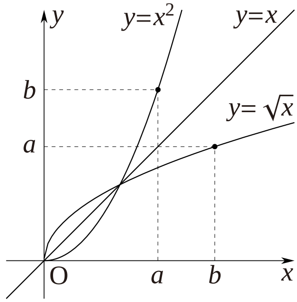
このような‘ レンズ f ’の役割を認めることにして，f を“ 関数 ”と呼ぶことにしましょう．すると，一般の $f(x)$ に対しては,“ 関数 f はその定義域の任意の実数 x を，その定める規則によって，1 つの実数 $f(x)$（関数値のこと）に移す（写像する）”ということができます．このとき,‘ x と $f(x)$ は実数の集合 $\mathbb{R}$ の要素である ’という認識が重要です.

なお，§1.7 で学びますが，x や $f(x)$ は**一般の集合の要素にまで拡張され**，そのとき f は“ 写像 ”と呼ばれます．特に，$f(x)$ の x がベクトルのとき，写像 f は我々が第 6 章で学ぶ「行列」によって表現されることを知るでしょう．さらに，x 自身が関数に拡張されると‘ f はある関数を別の関数に移す写像 ’になります．そんなものの中には，あけてビックリ玉手箱！,‘ 微分や積分の演算を行う写像 f ’があり，我々が学ぶのを待っています．それらの高度な写像は行列の奥にある「線形代数」の上級編で現れます．そのような高度な数学によって最先端の学問や技術は進歩し，現在我々は豊かな生活を享受しています.

1.3.3　逆関数

ここと次の §§ において，f を関数と見る考えに基づいて,「逆関数」および「合成関数」と呼ばれる関数を議論し，関数とその逆関数に関する重要な定理を導きましょう.

関数 $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ において，x に y を代入し同時に y に x を代入する，つまり x と y を交換してみましょう．この変換によって $x = y^2$ $(y \geqq 0)$ が得られます．y を x で表すと，$y \geqq 0$ だから，関数 $y = +\sqrt{x}$ が得られます．これは，x の値を定めると対応する y の値がただ 1 つ定まるので，確かに関数です.



関数 $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ と関数 $y = +\sqrt{x}$ のグラフを描いてみると，直線 $y = x$ に関して互いに対称になっていることがわかります．なぜかというと,‘ 変数 x と y を交換することは，x の値と y の値を全ての x，y に対して交換すること ’なので，グラフ上の任意の点 (a, b) が点 (b, a) に移されるからです．関数の言葉でいうと，$b = a^2$ $(a \geqq 0)$ が成り立つとき $a = \sqrt{b}$ で

すから，関数 $y = x^2$ が実数 a を実数 b に写像する（移す）とき，関数 $y = \sqrt{x}$ は，逆に，実数 b を実数 a に移します．このように関数 $y = \sqrt{x}$ は関数 $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ と逆の働きをします．

一般の関数 $y = f(x)$ についても同様のことがいえます．x と y を交換して得られる $x = f(y)$ において y を x で表したとして，それを $y = f^{-1}(x)$ と表記しましょう（$f^{-1}(x)$ は‘f インバース (inverse) x’と読みます．この表記法は数 a の逆数 $\frac{1}{a}$ を a^{-1} のように表すのと同種のものです）．単に表し方を変えただけなので，当然ながら

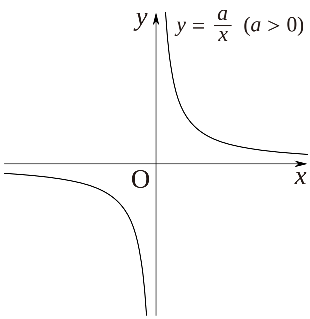
$$x = f(y) \;\Leftrightarrow\; y = f^{-1}(x)$$

が成立します．したがって，同様に

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y)$$

も成立します．$y = f^{-1}(x)$ が関数になるとき，それを関数 $y = f(x)$ の **逆関数** といいます．‘関数と逆関数のグラフは直線 $y = x$ に関して互いに対称’になります．関数の言葉を用いると，$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y)$ より，関数 f が実数 a を実数 $b = f(a)$ に移すとき，その逆関数 f^{-1} は，実数 b を実数 $a = f^{-1}(b)$ に移します．まもなく，我々は指数関数と対数関数が互いに逆関数になっていることを学ぶでしょう．

1 次関数 $y = -x + b$ や反比例の関数 $y = \frac{a}{x}$ は，x と y を取り替えてみればすぐわかるように，その逆関数に一致するので，グラフは直線 $y = x$ に関して対称になります．



なお，記号 f^{-1} は面白い記法で，数についての関係 $a^{-1} = \frac{1}{a}$，よって $a^{-1} \cdot a = 1$ を思い出させます．それは関数 f とその逆関数 f^{-1} が逆の働きをすることと密接に関係しています．そのことについては合成関数の後で議論しましょう．

最後に，逆関数はいつでも存在するとは限らないことに注意し，その存在条件を調べましょう．始めに議論した関数の例 $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ では逆関数 $y = +\sqrt{x}$ が存在しました．その理由を考えてみましょう．$y = x^2$ $(x \geqq 0)$ を x

について解くと $x = +\sqrt{y}$ ですから，各 y の値に対してただ 1 つの x の値が対応しています．したがって，$x = +\sqrt{y}$ において x と y を取り替えた‘逆関数’ $y = +\sqrt{x}$ が正しい関数になったわけです．これは $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ の定義域が $x \geqq 0$ であるためです．もし，定義域が実数全体の関数 $y = x^2$ ならば，x について解くと $x = \pm\sqrt{y}$ となり，同じ y の値（関数値）に対して 2 つの x の値が対応し，逆関数はありません．

一般の関数 $y = f(x)$ についても同様の議論ができます．$y = f(x)$ を x について解いて $x = f^{-1}(y)$ と表したとき，どの y の値（関数値）に対してもただ 1 つの x の値が対応するときのみ逆関数が存在します．つまり，逆関数が存在する条件は，定義域にある x_1，x_2 に対して「$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$」が成り立つ，または，同じことですが，対偶[5] をとって，

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{（単射）}$$

が成り立つことです．この条件は（集合論の用語で）**1 対 1 の写像** または **単射** といわれます．関数や写像の定義域を考慮したより厳密な議論は §1.7 で行いましょう．

Q1.（1）関数 $y = \dfrac{1}{x-1}$ $(x \in \mathbb{R},\ x \neq 1)$ の逆関数を求めなさい (※：$\pm\infty \notin \mathbb{R}$).

（2）さらにその逆関数は元の関数に戻ることを示しなさい．

Q2. 関数 $y = \sqrt{x-1}$ の逆関数を求めなさい．

A1.（1）$y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は $x = f(y)$ のことだから，求める逆関数は $x = \dfrac{1}{y-1}$ $(y \in \mathbb{R},\ y \neq 1)$，つまり，$y - 1 = \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$.

（2）逆関数の x と y を入れ換えると，$x - 1 = \dfrac{1}{y}$ $(y \in \mathbb{R},\ y \neq 0)$，つまり $y = \dfrac{1}{x-1}$ $(x \in \mathbb{R},\ x \neq 1)$ だから，元に戻りますね．

A2. 関数 $y = \sqrt{x-1}$ の（自然な）定義域は $x \geqq 1$ と考えます．x と y を入れ換えて（定義域についても同様），$x = \sqrt{y-1}$ $(y \geqq 1 \Leftrightarrow x \geqq 0)$．$y$ について解いて，答は $y = x^2 + 1$ $(x \geqq 0)$.

---

[5]「対偶」とは 命題 $p \Rightarrow q$ に対して 命題 $\bar{p} \Leftarrow \bar{q}$（つまり $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$）（$\bar{q}, \bar{p}$ は q, p の否定）を指し，命題とその対偶の真偽は必ず一致します（その証明は，『+α』の第 1 章で，ベン図を用いて丁寧になされています）.

1.3.4　合成関数

関数 $y = f(x)$ の x に $x - p$ を代入して得られる関数 $y = f(x - p)$ は，関数 $y = f(x)$ のグラフを x 方向に $+p$ だけ平行移動して得られるグラフに対応していますね（☞『$+\alpha$』第 3 章の一般的証明）．また，2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3$ で x に $x^2 - 1$ を代入すると 4 次関数 $y = (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) + 3$ が得られますね．一般に，関数 $y = f(x)$ の変数 x に関数 $g(x)$ を代入すると関数の関数

$$y = f(g(x))$$

が得られます．この新しい関数 $y = f(g(x))$ は関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を合わせて 1 つの関数を作ったわけですから，それを **合成関数** といいます．実際，合成関数 $y = f(g(x))$ は，関数 g が実数 x を実数 $g(x)$ に写像し，さらに関数 f が実数 $g(x)$ を実数 $f(g(x))$ に写像しています．

合成関数 $y = f(g(x))$ は，慣習上

$$y = f \circ g(x)$$

と表して，関数 f と g の合成関数といいます（$f \circ g$ は‘ f マル g ’と読んでよいでしょう）．何やら f と g の積 $f \cdot g$ みたくなってきましたが，形式的には積のように考えてよいことが以下の議論で示されます．逆関数と合成関数に関する 1 つの定理を導く形で話を進めていきましょう．

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)\,(\Leftrightarrow x = f(y))$ が存在するとしましょう．x は実数，y は x を逆関数 f^{-1} で写像した実数です．$y = f^{-1}(x)$ の両辺を関数 f でさらに写像しましょう：

$$f(y) = f \circ f^{-1}(x).$$

このとき，$x = f(y)$ が成立していますから，

$$x = f \circ f^{-1}(x)$$

が成り立ちます（$x = f(y)$ の y に $y = f^{-1}(x)$ を代入しても同じ）．したがって，上式の右辺は x を x に移す恒等関数 $\mathbf{1}(x) = x$ です：

$$f \circ f^{-1}(x) = \mathbf{1}(x).$$

同様に，$x = f(y)$ の両辺を f^{-1} でさらに写像して，

$$f^{-1} \circ f(y) = y\ (= \mathbf{1}(y))$$

が得られます（確かめましょう）．上式の等号は全ての y に対して成立します．よって，上式は恒等式なので，y を x に替えても構いません：$f^{-1} \circ f(x) = x$. さらに，恒等式のときは，変数を明示しない書き方ができます：$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}$. したがって，定理

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbf{1}$$

が成立します．この定理は，‘写像の逆写像は何もしない’ことを表しています．逆関数のところで，関数と逆関数が逆の働きをする（f が a を b に移すとき f^{-1} は b を a に移す）ことを知りましたが，そのことを表したのがこの定理です．ちょうど，数に成立する関係 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ の対応物になっています．逆関数の記号に f^{-1} を用いた理由がこれで納得できますね．

Q1．$f(x) = x - 1$，$g(x) = x^2$ とします．このとき，$g \circ f = f \circ g$ が成り立つかどうか調べなさい．

Q2．$f(x) = x^2\ (x \geqq 0)$，$g(x) = \sqrt{x}$ のとき，
（1）合成関数 $g \circ f(x)$ を求めなさい．（2）$f^{-1}(x)$ を求めなさい．

A1．注意：$f(\bullet)$ は $\bullet$ から 1 を引く，$g(\bullet)$ は $\bullet$ を 2 乗する，という規則です．

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2,$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1.$$

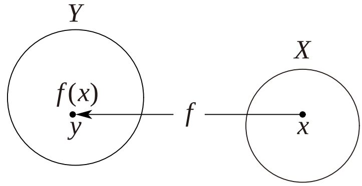
一致しませんね．一般に，関数の合成では交換法則が成り立ちません．

A2．（1）$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x\ (x \geqq 0)$.
よって，答は $g \circ f(x) = x\ (x \geqq 0)$.
（2）$g \circ f(x) = x = \mathbf{1}(x)$ より，$g \circ f = \mathbf{1}$．同様にして $f \circ g = \mathbf{1}$（確かめよう）．よって，g が f の逆関数となり，答は $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$.
　または，$y = x^2\ (x \geqq 0)$ で x と y を入れ換えて，$x = y^2\ (y \geqq 0)$．これを y について解いて，逆関数 $y = \sqrt{x}$ が得られます．

§1.7　関数概念の一般化（その 2）

1.7.1　写像

1.7.1.1　関数から写像へ



§§1.3.2 において，関数 $y = f(x)$ の新しい解釈のために集合の考え方を用いました．つまり，$f(x)$ の‘ f ’は実数の集合 $\mathbb{R}$ の要素 x を同じ集合 $\mathbb{R}$ の要素 $f(x)$ に写すレンズのような役割をもつと考えることができ，そこで f を改めて‘ 関数 ’と呼ぶことにしたわけです．このように考えると，関数の概念をさらに一般化することができます．すなわち，

‘ 関数は集合の要素を（一般には別の）集合の要素に写す ’，

または‘ 関数は集合の要素に集合の要素を対応させる ’

というより広い解釈が可能になります．そこで，関数を集合と関連づけるときは関数という代わりに **写像** という用語を用いることにしましょう（特に同じ集合の間の写像は **変換** と呼ばれます）．我々がとり扱う集合は，多くの場合，自然数や実数・平面や空間上の点・ベクトル等ですが，12 の約数・7 の倍数・3 年 B 組の生徒など，その集合が明確なもの，つまり，その要素がその集合に属すことが明確で，要素同士が互いに区別がつくものなら何でも構いません．例えば，20 才で決闘に散った天才ガロア（Evariste Galois，1811〜1832，フランス）は代数方程式の根号による可解性を調べる際に根の置換 (☞ §§1.7.2) を用いましたが，それは方程式の解の集合から同じ集合への「全単射」の写像です（全単射は次の §§ 逆写像 で解説します）．

写像 f が，集合 X の各要素 x に，f の定める規則で，（一般には，集合 X とは異なる）集合 Y のただ 1 つの要素 y を対応させるとき，y を f による x の **像** といい，そのことを $y = f(x)$ と表し（または，$f : x \mapsto y$，ときに $x \mapsto f(x)$ と表し）ます．そのとき，集合 X を写像 f の **定義域** といい，集合 Y を写像 f の **終域** といいます．この写像 f を“ X から Y への写像 ”といい，$f : X \to Y$ と表します．

1.7.1.2　逆写像

X の全ての要素に対する像全体の集合を $f(X)$ と書き，f による X の像または f の **値域** といいます．集合の記法 { 集合の要素|要素に対する条件 } を用いると，値域 $f(X)$ は

$$f(X) = \{y \,|\, y = f(x),\ x \in X\}\ \ (= \{ f(x) \,|\ x \in X\})$$

と表されます．一般に，写像 $f : X \to Y$ に対して値域 $f(X)$ は終域 Y の部分集合ですが，特に $f(X) = Y$（値域が終域に一致）が成り立つとき，f は **全射** であるといいます．

用語「全射」は，X の ‘ 点 ’ x から発射された光線が ‘ レンズ ’ f を通って Y の ‘ 点 ’ y に照射されるとき，x が X 上を隈（くま）無く動けば y も Y 上を隈無く動く，つまり Y は全て照射されることを表します．例えば，関数 $y = f(x) = 2x + 1$ は全実数 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像で，$f(x)$ の値域は全実数（x が全実数を動くとき，$2x + 1$ も全実数を動く）だから f は全射ですね．全射でない例としては，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $y = f(x) = x^2\ (\geqq 0)$ などがありますね．

§§1.3.3 で議論した逆関数の概念を一般化し，**逆写像** を考えましょう．写像 $f : X \to Y$ において要素 $x \in X$ の像を $y\ (= f(x) \in Y)$ としましょう．このとき，$y = f(x)$ を像としてもつ X の要素（つまり $f(x) = y$ を満たす全ての $x \in X$）を y の **逆像**（または **原像** ）といいます．すると，逆像は 1 つの要素とは必ずしも限らず，一般に集合 $\{x \in X \,|\ f(x) = y \in Y\}$ になりますね．その逆像を

$$f^{-1}(y)\ (= \{x \in X \,|\ f(x) = y \in Y\})$$

と表します．記号 $f^{-1}(y)$ は X の要素の集合ですが，それは写像 f の逆写像 f^{-1} の存在の有無とは直接の関係がないことに注意しましょう．

そのことに関するレッスンです．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $f(x) = \sin x$ のとき，逆像 $f^{-1}(0) = \{x \in X \,|\ f(x) = 0\}$ を求めなさい．答は，何のことはない，$\sin x = 0$ となる全ての実数 x ですから，$f^{-1}(0) = \{n\pi \,|\ n \in \mathbb{Z}\}$ ですね．

写像 $f : X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在する条件は「Y の各要素 y に対して $f(x) = y$ を満たす X の要素 x がただ 1 つ定まること」です．よって，（i）単射の条件：$x_1, x_2 \in X$，$f(x_1), f(x_2) \in Y$ のとき「$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$」

（または対偶をとって「$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$」）が必須です．さらに，$Y$ のどの要素 y に対しても $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する必要があるから，x が X を残らず動くとき y も Y 上を残らず動くこと，つまり（ii）全射の条件：‘値域 $f(X)$ が Y に一致すること’も必要です．単射と全射を合わせて **全単射** といい，これが‘逆写像が存在するための必要十分条件’になります．

1.7.1.3　合成写像と逆写像に関する定理

§§1.3.4 で議論した合成関数の概念を一般化して「合成写像」を考えましょう．写像 $f : X \to Y$ に続けて写像 $g : Y \to Z$ を行うと，X の要素 x は $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ の順で $X \to Y \to Z$ の要素に移されます．このような写像を f と g の **合成写像** $g \circ f : X \to Z$ といい，

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

によって定義されます．

特に，f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$，$f^{-1}(f(x)) = x$ が存在するときは，任意の集合 A に対して**恒等写像** を $\mathbf{1} : A \to A$，$\mathbf{1}(x) = x$ として，

$$f^{-1} \circ f(x) = \mathbf{1}(x)$$

が成り立ちます．このとき，x は X の任意の要素でよいので上式は恒等式であり，要素を明示しないで写像の性質として表します：

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}.$$

さらに，写像 $f : X \to Y$ において，$X = Y$ ならば（つまり，f が X 上の変換ならば）f^{-1} も X 上の変換で，

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbf{1}$$

が成り立ちますね．この定理は行列の章でも役立ちます．

行列の章で重要な定理をもう 1 つ．3 つの写像 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$，$h : Z \to W$ の合成：$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ を考えましょう．前者は合成写像 $g \circ f : X \to Z$ を行って（つまり f の後に g を行って）その後に h を行う合成写像です．後者は $f : X \to Y$ の後に合成写像 $h \circ g : Y \to W$ を行い（つまり g

の後に h を行い）ます．したがって，両者共に f, g, h の順で写像を行うのでそれらは一致し，そのことは合成写像の **結合法則** といわれます：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

実際，X の任意の要素 x を用いて示すと

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x))) \\ (h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

となって確かに一致しますね．

1.7.2　置換

要素が有限な集合に対する写像の代表例として「置換」を議論しましょう．ここでは全単射写像の雛(ひな)形としてとりあげますが，置換はそれ自身で重要な役割をもち，まもなく学ぶ「行列式」や上級学年で学ぶ「群論」の議論に不可欠です．我々は写像の範疇(はんちゅう)に囚われないで議論しましましょう．後半の部分では，阿弥陀籤(あみだくじ)を利用して置換を楽しみましょう．

1.7.2.1　置換とは

自然数の集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ や n 次方程式の解の集合のように，有限個の要素からなる集合（**有限集合**）を考えます．要素が n 個の集合から自分自身への写像（つまり，変換）で全射かつ単射なものを n 文字の **置換**（n 次の置換）といい，記号 σ(シグマ) や τ(タウ)（関数でいえば，f や g に対応）などで表されます．n 文字の置換全体の集合は記号 S_n で表されます．

以下，我々は集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の置換 σ を考えましょう．置換 σ が全射であるとは，i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ の像 $\sigma(i)$（関数値 $f(x_i)$ に対応）を考えたとき，$\sigma(i)$ の集合 $\{\sigma(i) \mid i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ が原像 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ に一致することですね．また，単射であるとは，$i \neq j$ のとき $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ となることですね．よって，$\sigma(i)$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ を順に 1 列に並べると，それは文字 $1, 2, 3, \cdots, n$ の「順列」（n 文字を 1 列に並べる並べ方の 1 つ）になります．例えば，$i = 1, 2, 3, 4$ のとき，$\sigma(i) = 2, 4, 1, 3$ など．