5.2.3　同次線形方程式の解空間

前の §§ で議論したように，3 元の同次線形方程式 $x+y-z=0$ やその一般形 $ax+by+cz=0$ は，その解全体の集合を W とすると，任意の解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の線形結合 $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}$ がまた解になる，つまり，線形性「$\boldsymbol{x}\in W,\ \boldsymbol{y}\in W \Rightarrow k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in W$」が成り立ちました．この性質は W がベクトル空間であるための前提条件であり，§§5.1.2 の条件 1°）〜8°）も明らかに満たされます．したがって，解全体の集合 W はベクトル空間です．一般に，方程式の解の全体を幾何学的に捉（とら）えるとき，それを **解空間** といいますが，同次線形方程式の解空間はベクトル空間になります．

解空間の例として，同次線形方程式 $x+y-z=0$ の解空間を調べてみましょう．任意の解を

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\\s+t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

と表してみればわかります．つまり，$x+y-z=0$ は 3 次元空間上の平面の方程式を表し，上の解 $\boldsymbol{x}$ はそのパラメータ表示になっていますね（☞§§4.2.2）．実際，平面 $x+y-z=0$ の法線ベクトルは $(1,1,-1)^T$ であり，それは平面上の 2 ベクトル $(1,0,1)^T$ と $(0,1,1)^T$ に直交します．§§5.1.3.2 でベクトル空間の基底を議論しましたが，$(1,0,1)^T$ と $(0,1,1)^T$ は線形独立なベクトルであり，それらの線形結合は，係数 s, t を 2 つの任意定数として，任意の解を表すことができます．したがって，その 2 ベクトルは線形方程式 $x+y-z=0$ の解空間の基底です．以上の議論から，方程式 $x+y-z=0$ の解空間 W は 3 次元空間上の平面，つまり $\mathbb{R}^3$ の **部分空間**，として表されます：

$$W=\left\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-z=0\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

（ベクトル空間 V の部分集合 W が線形条件「$\boldsymbol{x}\in W,\ \boldsymbol{y}\in W \Rightarrow \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}\in W$」を満たすとき，$W$ は V の「部分空間」であるといいます）．

解空間の基底はまた方程式の解であり，そんな解は特に **基本解** と呼ばれます．今の場合，解空間は 2 次元なので，基本解は 2 個あり，任意の解は基本解の係数として 2 つの ‘ 任意定数を含む形 ’ で表されていますね．一般に，任意

定数を含む形で表される解は方程式の **一般解** と呼ばれます．線形方程式は，後で議論する「線形微分方程式」（☞§§5.3.2 ）も含めて，一般解で全ての解が尽きています（ある種の非線形微分方程式は一般解でない解ももちます）．

ここで，ちょっとした注意です：一般解の表し方は一通りではありません．例えば，上の方程式の一般解は，異なる基本解（基底）を用いて，$\boldsymbol{x} = (s+t, -t, s)^T$ などのように表すこともできます．

最後に練習問題です．同次線形方程式 $x - y = 0$ の解空間 W およびその基底（基本解）を求めなさい．ヒント：専門用語に惑わされないこと．
解答：2 変数の方程式なので一般解は $\boldsymbol{x} = (x, y)^T = (t, t)^T$（$t$ は任意の実数）などと表されます．解空間 W は

$$W = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - y = 0 \right\} \quad \text{または} \quad W = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

などの表現でよいでしょう．解空間の基底は，平面上の直線 $x - y = 0$ の方向ベクトル，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ですね．

5.2.4　同次線形方程式の一般解と非同次線形方程式

同次線形方程式の一般解は一般の線形方程式，つまり **非同次線形方程式** の一般解を議論するときに必須です．例として，3 元 1 次方程式

$$x + y - z = b \qquad (b \neq 0)$$

の一般解を調べましょう．

この非同次線形方程式の解を $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ と書くと，1 つの解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ は

$$\boldsymbol{x}_0 = (b, 0, 0)^T$$

とできます．このとき，$b = 0$ とおいて得られる同次線形方程式 $x + y - z = 0$ の 1 つの解 $(s_0, t_0, s_0 + t_0)^T$ を上の解に付け加えたものも解ですね：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (b, 0, 0)^T + (s_0, t_0, s_0 + t_0)^T \\ &= (b + s_0, t_0, s_0 + t_0)^T. \end{aligned}$$

実際，$x+y-z = (b+s_0)+t_0-(s_0+t_0) = b$ が成り立ちます．ここで，$p = b+s_0$，$q = t_0$，$r = s_0 + t_0$ とおくと，非同次線形方程式の 1 つの解 $\boldsymbol{x}_0$ は一般に

6.4.2　連立 1 次方程式の解の構造

n 元 m 連立 1 次方程式（方程式が m 個連立のとき‘ m 連立 ’といおう）において，$m = n$ の場合には解を与えるクラメルの公式があり，解の様子がある程度わかります．しかしながら，この章の始めの議論や §5.2 の議論にもあるように，一般には $m \neq n$ の場合の解の構造を議論しなければなりません．例えば，§5.2 で議論された $x + y - z = 1$ や $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ は無数の解の組をもち，その構造は詳しく議論されました．また，次の 2 元 3 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

は，2 つの変数に対して方程式が 3 個ですから解がないように見えますが，第 1, 2 式の和が第 3 式であるために 1 組の解をもちます：

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2\text{行}-1\text{行} \\ 3\text{行}-1\text{行}\times 2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y = 1 \\ -3y = 1 \\ -3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{3\text{行}-2\text{行}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y = 1 \\ -3y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

つまり，この連立方程式では，本当は 2 つの条件しかなく，第 3 式はないのと同じです．

以下，一般の n 元 m 連立 1 次方程式の解の構造を調べましょう．それは，その連立方程式の‘ 独立な条件式の個数 ’に依存します．その個数は以下で議論する行列の**階数**（**ランク**）によって明らかになります．

行列のランクを定義するために，一般の $m \times n$ 行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ を列ベクトル $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j} \ \ a_{2j} \ \ \cdots a_{mj})^T$ および 行ベクトル $\boldsymbol{a}'_i = (a_{i1} \ \ a_{i2} \ \ \cdots a_{in})$ で表しておきましょう：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{pmatrix}.$$

このとき，‘ 独立な条件式の個数 ’ を最も適切に表すように，行列 A のランクを「行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}'_m$ の中で線形独立なものの最大個数」と定義しましょう．重要なことは，以下で示すように，行列 A のランクは「列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ の中で線形独立なものの最大個数」に一致し，かつ，以下の（ア）〜（エ）で示すように，行列のランクは行列の行基本変形や列基本変形によって変化しません．ここでは，上の行・列ベクトルに対しても，線形独立なものの最大個数を ‘ ベクトルのランク ’ といいましょう．

（ア）行変形に対する列ベクトルのランク：一連の行基本変形は，対応する基本行列の積 P を用いて，

$$PA=P(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\boldsymbol{a}_n)=(P\boldsymbol{a}_1\ \ P\boldsymbol{a}_2\ \ \cdots P\boldsymbol{a}_n)$$

と表すことができます．$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ のランクと $P\boldsymbol{a}_1$，$P\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$P\boldsymbol{a}_n$ のランクが一致することをいうためには，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots,\boldsymbol{a}_r$ と $P\boldsymbol{a}_1$，$P\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$P\boldsymbol{a}_r$ $(r=1,2,\cdots,n)$ の線形独立（線形従属）が，任意の r に対して，一致することをいえば済みます．方程式

$$t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$$

に対して，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ が線形独立ならば解は $t_1=t_2=\cdots=t_r=0$ のみ，線形従属ならば解は $t_1=t_2=\cdots=t_r=0$ 以外のものもあります．今の場合，各基本行列およびその積は正則だから P はその逆行列 P^{-1} をもち，したがって，方程式

$$t_1P\boldsymbol{a}_1+t_2P\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_rP\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow\ P(t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_r\boldsymbol{a}_r)=\boldsymbol{0}$$

は方程式 $t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$ に一致します．つまり，$P\boldsymbol{a}_1$，$P\boldsymbol{a}_2$，$\cdots,P\boldsymbol{a}_r$ と $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots,\boldsymbol{a}_r$ の線形独立（線形従属）は一致します．したがって，行変形によって列ベクトルのランクは変わりません．

（イ）列変形に対する行ベクトルのランク：（ア）の場合と同様に，一連の列基本変形は，対応する基本行列の積 Q を用いて，

$$AQ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 Q \\ \boldsymbol{a}'_2 Q \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m Q \end{pmatrix}$$

と表すことができます．（ア）の場合と同様に，$r = 1, 2, \cdots, m$ に対して

$$t_1 \boldsymbol{a}'_1 Q + t_2 \boldsymbol{a}'_2 Q + \cdots + t_r \boldsymbol{a}'_r Q = \boldsymbol{0} \iff t_1 \boldsymbol{a}'_1 + t_2 \boldsymbol{a}'_2 + \cdots + t_r \boldsymbol{a}'_r = \boldsymbol{0}$$

が成り立ち，列変形によって行ベクトルのランクは変わりません．

（ウ）列変形に対する列ベクトルのランク：一連の列基本変形によって，列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$（ランク r_a とする）が列ベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$（ランク r_b とする）になったとしましょう：$(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{a}_n)\, Q = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{b}_n)$．列変形ですから，各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で表されます：

$$\boldsymbol{b}_j = c_{j1} \boldsymbol{a}_1 + c_{j2} \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{jn} \boldsymbol{a}_n \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

(例えば, 2 列の c 倍を 1 列に加える場合：$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n$)．したがって，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に含まれる線形独立なベクトルは高々 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ のランク r_a だから $r_b \leqq r_a$ が成り立ちます．また，このとき Q^{-1} が存在し，$(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{b}_n)\, Q^{-1}$ が成り立つから，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は逆に $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ の線形結合で表されます．よって，上と同様の議論によって，$r_a \leqq r_b$．したがって，$r_b = r_a$ が成り立ち，列変形は列ベクトルのランクを変えません（線形独立とランクの関係の厳密な議論：☞【6.6】(3)（366 ページ)).

（エ）行変形に対する行ベクトルのランク：一連の行基本変形によって行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_m$ が行ベクトル $\boldsymbol{b}'_1$，$\boldsymbol{b}'_2, \cdots, \boldsymbol{b}'_m$ になったとします：$P(\boldsymbol{a}'_1 \ \boldsymbol{a}'_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}'_m)^T = (\boldsymbol{b}'_1 \ \boldsymbol{b}'_2 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)^T$．このとき，（ウ）と同様の議論が成り立ち，行変形は行ベクトルのランクを変えないことがわかります（これを示すのは練習問題にしましょう).

以上の議論から，一連の行基本変形・列基本変形は行列 A の行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_m$ や列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ のランクを変えないことがわかりました．

次に，この結果から，それら両ベクトルのランクが一致することを示しましょう．$A = \left(a_{ij}\right)$ において，まず，(1, 1) 成分が 0 にならないように必要なら行（列）の入れ換えを行い，(1, 1) 成分が 1 となるように 1 行を割って得られる行列 $\left(b_{ij}\right)$ に変形しておいてから，次のように変形します：

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{k\text{ 行} - 1\text{ 行} \times b_{k1} \\ (k=2,\cdots,m) \\ l\text{ 列} - 1\text{ 列} \times b_{1l} \\ (l=2,\cdots,n)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

（変形に記号 $\longrightarrow$ を用いたのは，列変形は連立 1 次方程式の同値変形に対応しないためです）．上の変形を‘ (1, 1) を要（かなめ）として 1 列と 1 行を掃き出す ’といいましょう．次に，小行列

$$\begin{pmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

に上と同様の変形をくり返します．これを続けていくと，最後に，

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} (= R \text{ とおく})$$

の形に到達します．

上の基本変形で最後に得られる行列 R は「ランク標準形」といわれます．$R = \left(b_{ij}\right)$ として，その対角線上の 1 の個数を r としましょう．すると，R の列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ は列基本ベクトルかゼロベクトル：

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{e}_j & (j = 1, 2, \cdots, r) \\ \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0} & (j = r+1, \cdots, n) \end{cases}$$

また，行ベクトル $\boldsymbol{b}'_i$ は行基本ベクトルかゼロベクトル：

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{e}_i^T & (i = 1, 2, \cdots, r) \\ \boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{0}^T & (i = r+1, \cdots, m) \end{cases}$$

ですね．したがって，R の行ベクトル・列ベクトルのランクは共に r となって一致します．この r が元の行列 A のランクです．

掃き出し法によって連立 1 次方程式を解くには行変形を行います．n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の場合，拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ は一連の行基本変形によって

$$(A|\boldsymbol{b}) \iff \left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & \cdots & \cdots & & & & d_1 \\ & & c_{2j} & \cdots & & & d_2 \\ & & & \cdots & \cdots & & \vdots \\ & & & & c_{rk} & \cdots & d_r \\ & & & & & & d_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & O & & & & & d_m \end{array}\right) \left(= \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}'_r \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}'_m \end{pmatrix} \text{とおく}\right)$$

のようないわゆる **階段行列** の形に変形できます $(c_{11}, c_{2j}, \cdots, c_{rk} \neq 0)$．階段行列は，下の行ほど，左側に 0 が可能な限り連続して並ぶように行変形した行列です．この階段行列は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots \qquad\qquad \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2j}x_j + \cdots \qquad \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{rk}x_k + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = d_m \end{cases}$$

に同値ですから，条件

$$d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_m = 0$$

が導かれます．もしこの条件が満たされないときは n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解はありません．満たされるとき $(\boldsymbol{c}'_{r+1} = \cdots = \boldsymbol{c}'_m = \boldsymbol{0}^T)$ には，行ベクトル $\boldsymbol{c}'_1, \boldsymbol{c}'_2, \cdots, \boldsymbol{c}'_r$ が線形独立になる（☞ 下の練習問題），つまり，係数行列 A のランクと拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ のランクが共に r になります．この条件の下で $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもち，それがただ 1 組の解となるのは未知数の個数 n と独立な条件式の数 r が一致する場合であり，$r < n$ のときは条件不足のために無数の組の解をもちます．（$r > n$ の場合はありません．どうしてかな？）．

練習問題：行ベクトル $\boldsymbol{c}'_1,\ \boldsymbol{c}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}'_r$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}'_1 &= (c_{11}\ c_{12}\ \cdots \qquad\qquad \cdots\ c_{1n}) && (c_{11} \neq 0) \\ \boldsymbol{c}'_i &= (0\ \cdots\ 0\ c_{ij_i}\ c_{i(j+1)_i}\ \cdots\ c_{in}) && (c_{ij_i} \neq 0,\ j_{i-1} < j_i) \\ & \qquad\qquad (i = 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

は線形独立であることを示しなさい.

解答：ベクトル方程式

$$t_1\boldsymbol{c}'_1 + t_2\boldsymbol{c}'_2 + \cdots + t_i\boldsymbol{c}'_i + \cdots + t_r\boldsymbol{c}'_r = \boldsymbol{0}^T$$

において，両辺の第 1 列を比較すると，$t_1 c_{11} = 0$ で，$c_{11} \neq 0$ だから，$t_1 = 0$. このとき，$c_{2k} = 0\ (k < j_2)$，$c_{2j_2} \neq 0$，$j_1 = 1 < j_2$ より，第 j_2 列は $t_2 c_{2j_2} = 0$. よって，$t_2 = 0$. 以下同様にして，すべての $t_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, r)$. したがって，$\boldsymbol{c}'_1,\ \boldsymbol{c}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}'_r$ は線形独立ですね.

行列 A などのランクを記号 $\operatorname{rank} A$ などと書いて，以上の結果をまとめましょう：

> n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について，
> 解がただ 1 組存在するための必要十分条件は，
>
> $$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) = n,$$
>
> 解が無数組存在するための必要十分条件は，
>
> $$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) < n.$$

上で，$r < n$ のときは独立した条件が足りないために，解は一般に $n - r$ 個の任意定数（パラメータ）を含み（☞§§5.2.5 の例），そのような解を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の **一般解** といいます．任意定数に特定の数を代入した解を **特解**（特殊解）といいます．例えば，3 元 1 次方程式

$$x + y + z = 1 \iff (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

は変数の数 $n = 3$，$r = \operatorname{rank}(1\ 1\ 1) = 1$ です．したがって，独立な条件は 1 つしかないから，$n - r = 2$ 個の変数，例えば y, z はパラメータ s, t とでき，$x = 1 - s - t$ から，一般解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます．特解は，例えば $s = t = 0$ とおいて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得ます．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とおいた方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を **同次連立 1 次方程式** といいます．これに対し，元の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は **非同次連立 1 次方程式** といいます．n 元 m 連立 1 次同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は明らかに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という解があり，それを **自明解** といいます．自明解だけをもつ必要十分条件は $r = \operatorname{rank} A = n$ で，$r = \operatorname{rank} A < n$ の場合は自明でない解，つまり $n - r$ 個の任意定数を含む解をもちます．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の 2 つの解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の差 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ は，$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ より，同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解になります．このことは，非同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解 $\boldsymbol{x}$ はその 1 つの特解 $\boldsymbol{x}_0$ に同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解 $\boldsymbol{u}$（$\operatorname{rank} A = n$ のときは自明解）を付け加えて得られることを意味します：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} \qquad (A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}).$$

同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合 W，つまり **解空間**（☞§§5.2.3）

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

を考えましょう．§§5.2.3 ですでに学んだように，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の線形結合はまた解になるから，つまり $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ のとき

$$A(k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad （k, l \text{ は実数}）$$

が成り立つので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 W はベクトル空間になります．その一般解が $n - r$ 個の任意定数を含むとき ($r = \operatorname{rank} A$)，解は $n - r$ 個の線形独立なベクトルからなるので，解空間 W の次元は $n - r$ です：

$$\text{解空間 } W \text{ の次元} = n - \operatorname{rank} A.$$

例えば，上の 3 元 1 次方程式 $x + y + z = 1$ の同次形 $x + y + z = 0$ の一般解は，例えば，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とできます．このとき，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立な解ベクトルであり，その線形結合はまた解であり，すべての解はその線形結合で表されるから解空間 W の基底（☞§§5.1.3.2）は $n - r = 2$ 個の $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とできます．

n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の $m \times n$ 行列 A を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像 f の表現行列と考えることもできます：$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$．このとき，$A\boldsymbol{x}$ の全体を A の像（イメージ，Image）と呼び，$\mathrm{Im}\,A$ で表します：

$$\mathrm{Im}\,A = \{A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}.$$

$\mathrm{Im}\,A$ の次元 (dimension) を $\dim(\mathrm{Im}\,A)$ と表しましょう．それが A のランク（A の行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}'_m$ の中で線形独立なものの最大個数）です[9)]：

$$\dim(\mathrm{Im}\,A) = \mathrm{rank}\,A.$$

また，同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 W を A の **核**（カーネル，Kernel）と呼び，$\mathrm{Ker}\,A$ と書きます：

$$\mathrm{Ker}\,A = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \ (= W).$$

すると，定理「解空間 W の次元 $= n - \mathrm{rank}\,A$」は

$$\dim(\mathrm{Ker}\,A) = n - \mathrm{rank}\,A$$

と書かれ，「次元定理」と呼ばれます．

Q1．下の 4 つのベクトルの組は線形独立か従属か，調べなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ヒント：4 ベクトルを列ベクトルとする行列のランクを調べるのが簡単．

Q2．下の連立方程式を解きなさい．

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -2x + y + 2z = a \\ 3x - 3y - z = 6 \end{cases}$$

9) 演習問題【基底と次元】（☞180 ページ）で議論したように，次元を明確に定義するためには，‘ 次元は基底のとり方にはよらない ’ ことを証明する必要があります．準備が整ったので，一般的な証明をこの章の演習問題で行いましょう．