

7.2.3.2 固有値が重解の場合の対角化

A, K, S 3 社のシェア争いで、遷移行列 A を次のように変えてみましょう：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{k+1} \\ \mathbf{k}_{k+1} \\ \mathbf{s}_{k+1} \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{k}_k \\ \mathbf{s}_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{s}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} (\%).$$

特性方程式 $|A - \lambda I| = 0$ は

$$\begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 - \lambda & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 8 - 10\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 7 - 10\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 7 - 10\lambda \end{vmatrix} = 0$$

で、 $x = 7 - 10\lambda$ とおくと、 $x = 1$ のとき 2 行と 3 行が等しくなるので $x = 1$ は解です。したがって、方程式は $x^2(x+1) - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3) = 0$ となつて、 $x = -3, 1$ に対応して $\lambda = \frac{7-x}{10} = 1, 0.6$ と定まります。0.6 は重解です。

固有ベクトル $\mathbf{p} = (p \ q \ r)^T \neq \mathbf{0}$ を求めましょう。固有値方程式 $(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ の拡大係数行列は、 $\lambda = 1, 0.6$ について、それぞれ、(10 倍した形で)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

です。 $\lambda = 1$ のとき、行変形から $\mathbf{p} \propto (2 \ 1 \ 1)^T$ であるのは容易にわかります。

問題は重解 $\lambda = 0.6$ の場合です。行変形をすると、拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

となるので、固有値方程式は、固有ベクトルを $(p \ q \ r)^T$ として、

$$p + q + r = 0$$

となります。この条件のもとで、 $(p \ q \ r)^T$ が固有値 0.6 の固有ベクトルであることは容易に確かめられます：

$$A\mathbf{p} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8p + 2q + 2r \\ p + 7q + r \\ p + q + 7r \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6p \\ 6q \\ 6r \end{pmatrix} = 0.6 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

さて、条件 $p + q + r = 0$ のもとで固有ベクトルを考えると、さらなる条件 $r = 0$ を付け加えて $p \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ としたり、また、 $p = 0$ として $p \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ともできます。対角化は固有ベクトルが線形独立であるかによっています。上の2ベクトルが線形独立であることを確認しましょう：

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ t - s \\ -t \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow s = t = 0.$$

このように固有値が重解であっても、線形独立な固有ベクトルを作ることが可能な場合もあります。

また、異なる固有値 1 と 0.6 に対応する 3 つの固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ も線形独立でないと対角化はできません。方程式

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

から $s = t = u = 0$ を導くのに、一般化が容易な方法があるので、それを使いましょう。 $(A - 0.6I)$ を左から掛けると、固有ベクトルに掛ける特殊性から

$$s(1 - 0.6) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t(0.6 - 0.6) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u(0.6 - 0.6) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となって、 t, u 項が消えますね。よって、 $s = 0$ が得られ、また先の議論より $t = u = 0$ 。よって、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は線形独立です。したがって、変換行列 P と P^{-1} は

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

のようにとれます。このとき、 $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$ で、 $A^n = PD^nP^{-1}$ です。 n が大きいとき、各社のシェアは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{k}_n \\ \mathbf{s}_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} (\%)$$

に近づきますね。

最後に, A が一般の n 次行列で, その特性方程式 $|A - \lambda I| = 0$ が重解をもつ場合の固有ベクトル全体について, 線形独立なものの個数に関する議論をしておきましょう. A の異なる固有値を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($m \leq n$), 対応する固有ベクトルを p_1, p_2, \dots, p_m とします. 固有値が重解 (多重解) の場合の固有ベクトルは一般に複数個あります.

A がエルミート行列 (実数のときは対称行列) ならば, §7.2.1.1 の終わりのところで示したように, 異なる固有値の固有ベクトルは直交し, したがって, それらは線形独立です.

A が一般の行列のときはどうでしょう. 方程式

$$t_1 p_1 + t_2 p_2 + \dots + t_m p_m = \mathbf{0} \quad (A p_i = \lambda_i p_i, \quad i \neq j \text{ のとき } \lambda_i \neq \lambda_j)$$

を考えます. ここで, $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_{m-1} I)$ を左から掛けます. すると, $(A - \lambda_i I)p_i = (\lambda_i - \lambda_i)p_i = \mathbf{0}$ だから, $t_m p_m$ 項以外は消えます. 固有ベクトルは $\mathbf{0}$ でないから, $t_m = 0$. 以下, 同様の議論をくり返すと, $t_{m-1} = \dots = t_1 = 0$ が得られ, 異なる固有値の固有ベクトルは線形独立であることがわかります.

また, 上の議論から, 固有値 λ_i に対する固有値方程式 $(A - \lambda_i I)x_i = \mathbf{0}$ の任意の解 x_i は λ_i でない固有値の固有ベクトルの線形結合では表されないことがわかります. 例えば,

$$x_1 = t_2 p_2 + t_3 p_3 + \dots + t_m p_m$$

とすると, $(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_m I)$ を掛けて, $x_1 = \mathbf{0}$ となります. これは矛盾ですね. 他の場合も同様です. このことは, 固有値 λ_i の固有ベクトル p_i (λ_i が重解なら, 一般に複数個ある) が表せる (基底となれる) のは固有値方程式 $(A - \lambda_i I)x_i = \mathbf{0}$ の一般解 (解空間 (\Leftrightarrow §5.2.3)) だけであることを意味します. 例えば, 先ほどの 3 社のシェア争いの問題で, 重解 0.6 についての固有値方程式 $(A - 0.6 I) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ は $p + q + r = 0$ に帰着し, $r = 0$ や $p = 0$ とおいて, 線形独立な固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られました. したがって, $p + q + r = 0$ を満たす任意の解 (一般解) は

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p + q + r = 0)$$

のように、2つの任意定数 s, t を含む形で表され、 $(A - 0.6I)\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解空間は固有値 0.6 の 2 つの固有ベクトルを基底とする 2 次元空間であることがわかります。0.6 は重解（多重度 2 の重解）ですから、解空間の次元（線形独立な固有ベクトルの個数）と特性方程式の重解の多重度が一致しましたね。一般に、 A の固有値 λ_i の固有値方程式 $Ap = \lambda_i p$ ($\Leftrightarrow (A - \lambda_i I)p = \mathbf{0}$) の解空間は A の固有値 λ_i の固有空間といわれます。

さて、一般の n 次行列 A の特性方程式 $|A - \lambda I| = 0$ は変数 λ の n 次方程式です。よって、代数学の基本定理（『 $\mathbb{F} + \alpha$ 』の §§2.4.3 および §10.3.3.3）によって、 n 個の解をもちます（ k 重解は k 個と数える）。したがって、もし重解がなければ、それぞれの固有値に対応して n 個の線形独立な固有ベクトルが存在し、 A は対角化が可能です。

重解がある場合はどうでしょうか。いくつか重解がある場合、その各々に対応する線形独立な固有ベクトルが重解の多重度だけ存在すると仮定すれば、全体としては n 個の線形独立な固有ベクトルが存在して対角化可能になります。その仮定は、残念ながら、すでに 2 次の A の特性方程式が重解をもつ場合に否定されます。§§7.2.2.3 の場合の $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ で確認しましょう。この場合、重解の固有値 $\lambda = 2$ が得られました。このとき、その固有ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ は、固有値方程式

$$\begin{pmatrix} 4-2 & -2 \\ 2 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p - 2q = 0 \\ 2p - 2q = 0 \end{cases}$$

より、唯一の固有ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ しかなく、対角化は不可能でした。このように、特性方程式が重解の場合、一般に、対応する線形独立な固有ベクトルが重解の多重度だけ存在せず、したがって、対角化ができない場合もあります。先に議論したビールのシェア争いの重解 0.6 の場合に、対応する線形独立な固有ベクトルが 2 つあったのは単なる幸運に過ぎません。

A の対角化ができない場合、変換行列 P をうまくとると、 $J = P^{-1}AP$ の形で対角成分には A の固有値が並ぶ上三角行列にできることが知られています（このテキストの守備範囲外です）。 J は「ジョルダン標準形」と呼ばれます。 J は割合容易に n 乗することができます。次の Q アンド A で、天下り式にその標準形の計算手続きを覚えましょう（理論的考察ではなく、雰囲気を感じて）

ます).

Q1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

- (1) A の固有値 λ を求めなさい.(重解です).
- (2) 固有ベクトル p_1 (一般解) を求めなさい.
- (3) (1) で求めた固有値 λ に対して

$$(A - \lambda I)p_2 = p_1$$

を満たすベクトル p_2 (一般解) を求めなさい.

- (4) $P = (p_1 \ p_2)$ とするとき, p_1, p_2 の任意定数によらずに,

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となることを示しなさい.

- (5) $J^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ を求めなさい. 答だけでよいとします.

Q2. 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

- (1) A の固有値を求めなさい. 単根を λ_1 , 重根を λ_2 とします.
- (2) 固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトル p_1, p_2 を求めなさい.
- (3) 重根 λ_2 の固有ベクトルがただ 1 つ p_2 のとき, p_2 に線形独立なベクトル p_3 を方程式 $(A - \lambda_2 I)p_3 = p_2$ によって求めなさい(方程式を満たすものならば任意でよい).
- (4) $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$ として, $J = P^{-1}AP$ を求めなさい.

Q3. 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

- (1) A の固有値 λ を求めなさい.(3重解です.それを λ_1 とします).
- (2) 固有ベクトル p_1 を求めなさい(任意定数は適当でよい). もし複数の線形独立な固有ベクトルが得られないときは, 方程式 $(A - \lambda_1 I)p_2 = p_1$, $(A - \lambda_1 I)p_3 = p_2$ を満たすベクトル p_2, p_3 を求めなさい(方程式を満たすなら何でもよい).
- (3) (2) の方程式を利用して, 3 ベクトル p_1, p_2, p_3 は線形独立であることを示しなさい.
- (4) 変換行列 $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$ を用いて A のジョルダン標準形 $J = P^{-1}AP$ を求めなさい.

A1. (1) 固有値方程式 $(A - \lambda I)p = \mathbf{0}$ において, 固有ベクトル $p \neq \mathbf{0}$ だから, $(A - \lambda I)^{-1}$ は存在せず, よって, 特性方程式 $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ が得られます. したがって, 固有値は重解 $\lambda = 2$.

(2) 固有値 2 に対する固有値方程式は $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} p_1 = \mathbf{0}$. $p_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと, $-2p + 2q = 0$. これから, 固有ベクトル $p_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c は任意定数).

(3) $p_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とします. すると,

$$(A - \lambda I)p_2 = p_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2p + 2q = c.$$

ここで, $c = 2s$ とおいても一般性を失わないから, $-p + q = s$. また, $p = t$ (任意定数) とおいても構わないから $q = s + t$. したがって, $p_2 = \begin{pmatrix} t \\ s+t \end{pmatrix}$ (ただし, $p_1 = 2s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として).

(4) $P = (p_1 \ p_2) = \begin{pmatrix} 2s & t \\ 2s & s+t \end{pmatrix}$ より, $P^{-1} = \frac{1}{2s^2} \begin{pmatrix} s+t & -t \\ -2s & 2s \end{pmatrix}$. よって,

$$J = P^{-1}AP = \frac{1}{2s^2} \begin{pmatrix} s+t & -t \\ -2s & 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s & t \\ 2s & s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

したがって, J は対角成分に固有値 2 が並び, 非対角成分が 1 の上 3 角行列ですね. (P の任意定数が結果に影響しないことは重要です).

(5) $J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$ などから, $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ が得られます. (証明が必要なときは数学的帰納法を用いる).

A2. (1) 特性方程式 $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$ より, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

(2) $\lambda_1 = 3$ の固有値方程式は $p_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とすると,

$$(A - \lambda_1 I)p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} p + 2q = 0 \\ r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 2$ の固有値方程式は $p_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ として,

$$(A - \lambda_2 I)p_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 0 \\ q - 2r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_2 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(3) $p_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とすると,

$$(A - \lambda_2 I)p_3 = p_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = c \\ q - 2r = -2c \end{cases}.$$

したがって, 例えば $c = 1, q = 0$ と選ぶと, $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすることができ
ます(どう選んでも構わない). p_2 と p_3 は線形独立であることに注意.

(4)

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{よって, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

と選ぶと,

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

参考: 逆行列の計算が苦手な人のための華麗な方法. ただし, 列基本
変形 (⇔ §§6.4.1) に類似の知識を要します.

固有値 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ の固有値方程式は, 固有ベクトルを p_1, p_2 と
して,

$$(A - \lambda_1 I)p_1 = \mathbf{0}, \quad (A - \lambda_2 I)p_2 = \mathbf{0}$$

でしたね. また, λ_2 が重解でも, その固有ベクトルが p_2 のみだったの
で, 方程式

$$(A - \lambda_2 I)p_3 = p_2$$

を課して, p_2 に線形独立なベクトル p_3 を用意しました. これらを,
 $Ap_i = \dots$ の形に書き換えてみると,

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1$$

$$Ap_2 = \lambda_2 p_2$$

$$Ap_3 = p_2 + \lambda_2 p_3$$

となります. さらに, これらをまとめると, 変換行列 P に対する方程式
の形に表すことができます:

$$\begin{aligned} AP &= A(p_1 \ p_2 \ p_3) = (Ap_1 \ Ap_2 \ Ap_3) \\ &= (\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ p_2 + \lambda_2 p_3). \end{aligned}$$

ここで、 $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$ と上式の最後の式を比較すると、最後の式の第1列は P の第1列を λ_1 倍したものであり、その第2列は P の第2列を λ_2 倍したもので、またその第3列は P の第2列と第3列の λ_2 倍を加えたものです。

このような列変形は、§§6.4.1 で学んだように、一連の基本行列(☞ 287 ページ) を右から掛けて得られます。練習しているうちに慣れますが、例えば、第3列だけの列変形を見たいときは

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = (\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ p p_1 + q p_2 + r p_3)$$

などを参考にすればよいでしょう。第1列だけ、第2列だけのときも同様です。これらのことから、

$$AP = (\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ p_2 + \lambda_2 p_3) = (p_1 \ p_2 \ p_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と表されることがわかりますね。最後に、 $P^{-1} = (p_1 \ p_2 \ p_3)^{-1}$ を左から掛けて、ジョルダンの標準形

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が得られます。

A3.(1) 特性方程式は

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3 = 0$$

だから、3重解 $\lambda = 2 = \lambda_1$ 。

(2) 固有値 $\lambda_1 = 2$ の固有値方程式は、固有値ベクトルを $p_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ として、

$$(A - \lambda_1 I)p_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 0 \\ r = 0. \end{cases}$$

よって, $p = c$ とおけば, $p_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (以下, $c = 1$ と選ぶ). 任意定数は c の 1 個だけだから, これに線形独立な固有ベクトルはありません. したがって, 方程式 $(A - \lambda_1 I)p_2 = p_1$, $(A - \lambda_1 I)p_3 = p_2$ を満たすベクトル p_2, p_3 を求めます. 途中の計算は君に任せますが, $p_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおくと, $p + q = 1, r = 0$. よって, $q = 0$ と選ぶと, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. このとき, p_3 も同様にして, $p + q = 2, r = 1$. したがって, $q = 0$ と選ぶと, $p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) p_1, p_2, p_3 の線形独立性を調べるために, 方程式

$$sp_1 + tp_2 + up_3 = \mathbf{0}$$

を考えます. $(A - \lambda_1 I)p_1 = \mathbf{0}$, $(A - \lambda_1 I)p_2 = p_1$, $(A - \lambda_1 I)p_3 = p_2$ を利用して, 左から $(A - \lambda_1 I)$ を掛けると,

$$tp_1 + up_2 = \mathbf{0}$$

が得られ, もう一度掛けると,

$$up_1 = \mathbf{0}$$

が得られます. これらから, 順次 $u = 0, t = 0, s = 0$ となるので, p_1, p_2, p_3 は線形独立です. 上の証明法は固有ベクトルの具体形によらないことに注意しましょう.

(4) 変換行列は

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{よって} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より, ジョルダンの標準形は

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

参考: 華麗な方法です.

$$\begin{aligned} AP &= A(p_1 \ p_2 \ p_3) = (Ap_1 \ Ap_2 \ Ap_3) \\ &= (\lambda_1 p_1 \ p_1 + \lambda_1 p_2 \ p_2 + \lambda_1 p_3) = (p_1 \ p_2 \ p_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$