§6.4　連立 1 次方程式と掃き出し法

一般の多元連立 1 次方程式を実際に解く場合，§§6.3.3.3 で議論されたクラメルの公式は，計算が膨大になり，現実的ではありません．また，元（未知数）の数と方程式の数が一致しない場合には，行列式を用いて解の様子を調べることはできません．この § では，多元連立 1 次方程式を解く最も初等的な方法，**掃き出し法**（消去法）を議論しましょう．掃き出す（どんどん消去する）のは，コンピュータが最も得意とし，彼にとっては 100 元の問題など朝飯前です．理論的には，解の存在条件やどんな解があるかに興味があります．

6.4.1　掃き出し法と係数行列

簡単な具体例から始めましょう．2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+4y=4 \\ x-\ \ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を掃き出していきましょう．その際に，係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に右辺の定数ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ を付け加えて作った **拡大係数行列** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$ を利用して手短に表しましょう．以下，連立方程式の **基本変形** と呼ばれる同値変形（記号 $\Longleftrightarrow$）を行います．

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x+4y=4 \\ x-\ \ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \\
\overset{1\,行\div 2}{\Longleftrightarrow}\ &\begin{cases} x+2y=2 \\ x-\ \ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \\
\overset{2\,行-1\,行}{\Longleftrightarrow}\ &\begin{cases} x+2y=2 \\ \quad -3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \\
\overset{2\,行\div(-3)}{\Longleftrightarrow}\ &\begin{cases} x+2y=2 \\ \qquad y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \\
\overset{1\,行-2\,行\times 2}{\Longleftrightarrow}\ &\begin{cases} x \qquad =4 \\ \qquad y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

基本変形は君たちが中学時代から知っている解法ですね．基本変形については，上で行った，（ i ）1 つの行（方程式の 1 つ）を定数倍すること，（ii）1 つの行を定数倍したものを他の行に加えることの外に，（iii）2 つの行を入れ換えること（2 つの方程式の順序を入れ換えること）があります．（ i ）〜（iii）は，行列でいえば行に関する基本変形なので，特に **行基本変形** といいます．

上の例で，拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$ は $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ に変形されました．上の行基本変形は拡大係数行列に係数行列の逆行列を左から掛けても得られます．実際，$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ を左から掛けてみると，$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ であり，

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

が成り立ちます．

上の考察は，また，行基本変形を利用して係数行列の逆行列が求められることを意味します．というのは，A の逆行列 A^{-1} があれば，それを A に左から掛けて，$A^{-1}A = I$ が成り立つからです．係数行列に単位行列を付け加えた拡大係数行列を用いて，上の例でやってみましょう：（第 i 行などの第を省略）

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1\text{行}\div 2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2\text{行}-1\text{行}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2\text{行}\div(-3)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right) \overset{1\text{行}-2\text{行}\times 2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right).$$

確かに，行基本変形によって係数行列の逆行列が求まりましたね．

さらに，上の結果は，行基本変形（ i ）〜（iii）の各々が行列によって表されることを示唆します．実際，

（ i ）i 行を c 倍する：$P_i(c)\times$
（ii）i 行に j 行の c 倍を加える：$P_{ij}(c)\times$　　（行基本変形）
（iii）i 行と j 行を入れ換える：$P_{ij}\times$

となる **基本行列** $P_i(c)$，$P_{ij}(c)$，P_{ij} を見つけることができます（記号 × は基本行列を左から掛けることを強調）．天下り式に書いてもよいのですが，これらの行列は重要な定理を証明するのに必要で，君たちにも慣れてほしいと思いま

す．そこで，2 次の場合に自分で見つける練習をしましょう．ヒントになる 4 つの積は

$$\mathrm{X}_1 : \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cp & cq \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cr & cs \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{X}_3 : \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cr & cs \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}_4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cp & cq \end{pmatrix}$$

です．X_1，X_2 から，

$$P_1(c) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

に気がついたかな．また，X_3，X_4 から，

$$P_{12} = P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ですね．$P_{12}(c)$, $P_{21}(c)$ はちょっと複雑ですが，単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を思い出すと，

$$P_{12}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

であることがわかります．それを確かめるのは練習問題にしましょう．基本行列は‘左から掛けたときに行基本変形になる’でしたね．

もし，これらの基本行列を右から掛けたらどうなるでしょう．どうなるか，実際にやってみましょう．

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} P_1(c) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cp & q \\ cr & s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} P_2(c) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & cq \\ r & cs \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} P_{12}(c) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q + cp \\ r & s + cr \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} P_{21}(c) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + cq & q \\ r + cs & s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} P_{12} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ s & r \end{pmatrix}.$$

今度は列の変形になりましたね．整理すると次のようになります：

（ i′ ）i 列を c 倍する：$\times P_i(c)$

（ii′）j 列に i 列の c 倍を加える：$\times P_{ij}(c)$　　（列基本変形）

（iii′）i 列と j 列を入れ換える：$\times P_{ij}$

これらを **列基本変形** といいましょう（記号 × は右から掛けることを強調）.

　また，基本行列は正則であり，逆行列は次のようになります：（練習問題にします）

$$P_i(c)^{-1} = P_i\left(\frac{1}{c}\right), \qquad P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c), \qquad P_{ij}^{-1} = P_{ij}.$$

　一般の基本行列を載せておきます．それらは 2 次の場合と同じ行基本変形（ i ）～（iii），列基本変形（ i′ ）～（iii′）を満たし，上と同じ形の逆行列をもちます：

$$P_i(c) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & O & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & O & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad (c \neq 0)$$

$$P_{ij}(c) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & O & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & O & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ j\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$P_{ij} = \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & & & & & & & & O & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & O & & & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ \\ \\ j\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

ここで，確認のための練習問題です．3 次の $P_{32}(c)$，P_{32} を求めなさい．

答：

$$P_{32}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{32} = P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本行列を（拡大）係数行列の右から掛ける場合もあるので，その意味を調べておきましょう．行列で書いた連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，係数行列 A にある基本行列 P を右から掛けたとき，それが実際に意味をもつのは方程式を同値変形する場合です．つまり，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff (AP)(P^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

A が 3 次行列で，

$$P_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (c \neq 0), \quad P_{12}(c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合を調べれば十分です．$P_2(c)^{-1} = P_2(1/c)$，$P_{12}(c)^{-1} = P_{12}(-c)$，$P_{12}^{-1} = P_{12}$ だから，$A = \left(a_{ij}\right)$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\left(AP_2(c)\right)\left(P_2(c)^{-1}\boldsymbol{x}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & ca_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ca_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ca_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y/c \\ z \end{pmatrix},$$

$$\left(AP_{12}(c)\right)\left(P_{12}(c)^{-1}\boldsymbol{x}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + ca_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ca_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ca_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - cy \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\left(AP_{12}\right)\left(P_{12}^{-1}\boldsymbol{x}\right) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

ですね（確かめよう）．これは，変数変換をして問題を解くことに当たります．このようなことは「固有値問題」でも起こります．

最後に，3 元連立方程式の問題です．次の方程式の解，および係数行列の逆行列を求めなさい．

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + z = 2 \\ \ \ x + \ \ y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

ヒント：拡大係数行列に，さらに単位行列を加えたものを使うとよいでしょう．

解答例：

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2 \\ 3\text{ 行}-1\text{ 行}\times 3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2\text{ 行}\leftrightarrow 3\text{ 行}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{2\text{ 行}\times(-1)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{1\text{ 行}-2\text{ 行} \\ 3\text{ 行}+2\text{ 行}\times 3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -11 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{3\text{ 行}\div 11}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/11 & 7/11 & -3/11 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{1\text{ 行}+3\text{ 行}\times 3 \\ 2\text{ 行}-3\text{ 行}\times 4}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3/11 & -1/11 & 2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4/11 & 5/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/11 & 7/11 & -3/11 \end{array}\right).$$

したがって，解は $x, y, z = 2, 1, -1$．係数行列の逆行列は $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

もう 1 題．2 元連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + (c^2 - 8)y = c \end{cases}$ の解の有無を c の値によって分類しなさい．

解答：

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + (c^2 - 8)y = c \end{cases} \overset{2\text{ 行}-1\text{ 行}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y = 3 \\ \phantom{x +{}} (c^2 - 9)y = c - 3 \end{cases}$$

において，$c^2 - 9 = (c-3)(c+3)$．したがって，$c = 3$ のとき，$x + y = 3$ を満たす任意の解．$c = -3$ のとき，解なし．$c \neq \pm 3$ のとき，ただ 1 通りの解．

6.4.2　連立 1 次方程式の解の構造

n 元 m 連立 1 次方程式（方程式が m 個連立のとき‘ m 連立 ’といおう）において，$m = n$ の場合には解を与えるクラメルの公式があり，解の様子がある程度わかります．しかしながら，この章の始めの議論や §5.2 の議論にもあるように，一般には $m \neq n$ の場合の解の構造を議論しなければなりません．例えば，§5.2 で議論された $x + y - z = 1$ や $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ は無数の解の組をもち，その構造は詳しく議論されました．また，次の 2 元 3 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ 2x - \ \ y = 3 \end{cases}$$

は，2 つの変数に対して方程式が 3 個ですから解がないように見えますが，第 1, 2 式の和が第 3 式であるために 1 組の解をもちます：

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ 2x - \ \ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2\text{行}-1\text{行} \\ 3\text{行}-1\text{行}\times 2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + \ y = 1 \\ \quad -3y = 1 \\ \quad -3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{3\text{行}-2\text{行}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + \ y = 1 \\ \quad -3y = 1 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

つまり，この連立方程式では，本当は 2 つの条件しかなく，第 3 式はないのと同じです．

以下，一般の n 元 m 連立 1 次方程式の解の構造を調べましょう．それは，その連立方程式の‘ 独立な条件式の個数 ’に依存します．その個数は以下で議論する行列の**階数**（**ランク**）によって明らかになります．

行列のランクを定義するために，一般の $m \times n$ 行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ を列ベクトル $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j} \ \ a_{2j} \ \ \cdots a_{mj})^T$ および 行ベクトル $\boldsymbol{a}'_i = (a_{i1} \ \ a_{i2} \ \ \cdots a_{in})$ で表しておきましょう：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{pmatrix}.$$

このとき，‘独立な条件式の個数’を最も適切に表すように，行列 A のランクを「行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}'_m$ の中で線形独立なものの最大個数」と定義しましょう．重要なことは，以下で示すように，行列 A のランクは「列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ の中で線形独立なものの最大個数」に一致し，かつ，以下の（ア）～（エ）で示すように，行列のランクは行列の行基本変形や列基本変形によって変化しません．ここでは，上の行・列ベクトルに対しても，線形独立なものの最大個数を‘ベクトルのランク’といいましょう．

（ア）行変形に対する列ベクトルのランク：一連の行基本変形は，対応する基本行列の積 P を用いて，

$$PA = P(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{a}_n) = (P\boldsymbol{a}_1 \ \ P\boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots P\boldsymbol{a}_n)$$

と表すことができます．$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ のランクと $P\boldsymbol{a}_1$，$P\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$P\boldsymbol{a}_n$ のランクが一致することをいうためには，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots, \boldsymbol{a}_r$ と $P\boldsymbol{a}_1$，$P\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$P\boldsymbol{a}_r$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ の線形独立（線形従属）が，任意の r に対して，一致することをいえば済みます．方程式

$$t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + t_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

に対して，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ が線形独立ならば解は $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$ のみ，線形従属ならば解は $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$ 以外のものもあります．今の場合，各基本行列およびその積は正則だから P はその逆行列 P^{-1} をもち，したがって，方程式

$$t_1P\boldsymbol{a}_1 + t_2P\boldsymbol{a}_2 + \cdots + t_rP\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0} \iff P(t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + t_r\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{0}$$

は方程式 $t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + t_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ に一致します．つまり，$P\boldsymbol{a}_1$，$P\boldsymbol{a}_2$，$\cdots, P\boldsymbol{a}_r$ と $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots, \boldsymbol{a}_r$ の線形独立（線形従属）は一致します．したがって，行変形によって列ベクトルのランクは変わりません．

（イ）列変形に対する行ベクトルのランク：（ア）の場合と同様に，一連の列基本変形は，対応する基本行列の積 Q を用いて，

$$AQ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 Q \\ \boldsymbol{a}'_2 Q \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m Q \end{pmatrix}$$

と表すことができます．（ア）の場合と同様に，$r = 1, 2, \cdots, m$ に対して

$$t_1\boldsymbol{a}'_1 Q + t_2\boldsymbol{a}'_2 Q + \cdots + t_r\boldsymbol{a}'_r Q = \boldsymbol{0} \iff t_1\boldsymbol{a}'_1 + t_2\boldsymbol{a}'_2 + \cdots + t_r\boldsymbol{a}'_r = \boldsymbol{0}$$

が成り立ち，列変形によって行ベクトルのランクは変わりません．

（ウ）列変形に対する列ベクトルのランク：一連の列基本変形によって，列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$（ランク r_a とする）が列ベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$（ランク r_b とする）になったとしましょう：$(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{a}_n)\, Q = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{b}_n)$．列変形ですから，各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で表されます：

$$\boldsymbol{b}_j = c_{j1}\boldsymbol{a}_1 + c_{j2}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{jn}\boldsymbol{a}_n \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

（例えば, 2 列の c 倍を 1 列に加える場合：$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n$）．したがって，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に含まれる線形独立なベクトルは高々 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ のランク r_a だから $r_b \leqq r_a$ が成り立ちます．また，このとき Q^{-1} が存在し，$(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \cdots \boldsymbol{b}_n)\, Q^{-1}$ が成り立つから，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は逆に $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ の線形結合で表されます．よって，上と同様の議論によって，$r_a \leqq r_b$．したがって，$r_b = r_a$ が成り立ち，列変形は列ベクトルのランクを変えません（線形独立とランクの関係の厳密な議論：☞【6.6】(3)（366 ページ））．

（エ）行変形に対する行ベクトルのランク：一連の行基本変形によって行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_m$ が行ベクトル $\boldsymbol{b}'_1$，$\boldsymbol{b}'_2, \cdots, \boldsymbol{b}'_m$ になったとします：$P(\boldsymbol{a}'_1 \ \boldsymbol{a}'_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}'_m)^T = (\boldsymbol{b}'_1 \ \boldsymbol{b}'_2 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)^T$．このとき，（ウ）と同様の議論が成り立ち，行変形は行ベクトルのランクを変えないことがわかります（これを示すのは練習問題にしましょう）．

以上の議論から，一連の行基本変形・列基本変形は行列 A の行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_m$ や列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ のランクを変えないことがわかりました．

次に，この結果から，それら両ベクトルのランクが一致することを示しましょう．$A=\left(a_{ij}\right)$ において，まず，$(1,1)$ 成分が 0 にならないように必要なら行（列）の入れ換えを行い，$(1,1)$ 成分が 1 となるように 1 行を割って得られる行列 $\left(b_{ij}\right)$ に変形しておいてから，次のように変形します：

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{k\text{ 行} - 1\text{ 行} \times b_{k1} \\ (k=2,\cdots,m) \\ l\text{ 列} - 1\text{ 列} \times b_{1l} \\ (l=2,\cdots,n)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

（変形に記号 $\longrightarrow$ を用いたのは，列変形は連立 1 次方程式の同値変形に対応しないためです）．上の変形を ‘ $(1,1)$ を要（かなめ）として 1 列と 1 行を掃き出す ’ といいましょう．次に，小行列

$$\begin{pmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

に上と同様の変形をくり返します．これを続けていくと，最後に，

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} (=R\text{ とおく})$$

の形に到達します．

上の基本変形で最後に得られる行列 R は「ランク標準形」といわれます．$R=\left(b_{ij}\right)$ として，その対角線上の 1 の個数を r としましょう．すると，R の列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ は列基本ベクトルかゼロベクトル：

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{e}_j & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \\ \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0} & (j=r+1,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

また，行ベクトル $\boldsymbol{b}'_i$ は行基本ベクトルかゼロベクトル：

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{e}_i^T & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \\ \boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{0}^T & (i=r+1,\ \cdots,\ m) \end{cases}$$

ですね．したがって，R の行ベクトル・列ベクトルのランクは共に r となって一致します．この r が元の行列 A のランクです．

掃き出し法によって連立 1 次方程式を解くには行変形を行います．n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の場合，拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ は一連の行基本変形によって

$$(A|\boldsymbol{b}) \iff \left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & \cdots & \cdots & & & & d_1 \\ & & c_{2j} & \cdots & & & d_2 \\ & & & \cdots & \cdots & & \vdots \\ & & & & c_{rk} & \cdots & d_r \\ & & & & & & d_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & O & & & & & d_m \end{array}\right) \left(= \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}'_r \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}'_m \end{pmatrix} \text{とおく} \right)$$

のようないわゆる **階段行列** の形に変形できます ($c_{11}, c_{2j}, \cdots, c_{rk} \neq 0$)．階段行列は，下の行ほど，左側に 0 が可能な限り連続して並ぶように行変形した行列です．この階段行列は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots \qquad\qquad \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2j}x_j + \cdots \qquad \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad c_{rk}x_k + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_m \end{cases}$$

に同値ですから，条件

$$d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_m = 0$$

が導かれます．もしこの条件が満たされないときは n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解はありません．満たされるとき ($\boldsymbol{c}'_{r+1} = \cdots = \boldsymbol{c}'_m = \boldsymbol{0}^T$) には，行ベクトル $\boldsymbol{c}'_1$, $\boldsymbol{c}'_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{c}'_r$ が線形独立になる（☞ 下の練習問題)，つまり，係数行列 A のランクと拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ のランクが共に r になります．この条件の下で $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもち，それがただ 1 組の解となるのは未知数の個数 n と独立な条件式の数 r が一致する場合であり，$r < n$ のときは条件不足のために無数の組の解をもちます．（$r > n$ の場合はありません．どうしてかな？)．

練習問題：行ベクトル $\boldsymbol{c}'_1,\ \boldsymbol{c}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}'_r$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}'_1 &= (c_{11}\ c_{12}\ \cdots \qquad\qquad \cdots\ c_{1n}) &\quad (c_{11} \neq 0) \\ \boldsymbol{c}'_i &= (0\ \cdots\ 0\ c_{ij_i}\ c_{i(j+1)_i}\ \cdots\ c_{in}) &\quad (c_{ij_i} \neq 0,\ j_{i-1} < j_i) \\ &\qquad\qquad\qquad (i = 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

は線形独立であることを示しなさい.

解答：ベクトル方程式

$$t_1\boldsymbol{c}'_1 + t_2\boldsymbol{c}'_2 + \cdots + t_i\boldsymbol{c}'_i + \cdots + t_r\boldsymbol{c}'_r = \boldsymbol{0}^T$$

において，両辺の第 1 列を比較すると，$t_1c_{11} = 0$ で，$c_{11} \neq 0$ だから，$t_1 = 0$. このとき，$c_{2k} = 0\ (k < j_2)$，$c_{2j_2} \neq 0$，$j_1 = 1 < j_2$ より，第 j_2 列は $t_2c_{2j_2} = 0$. よって，$t_2 = 0$. 以下同様にして，すべての $t_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, r)$. したがって，$\boldsymbol{c}'_1,\ \boldsymbol{c}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}'_r$ は線形独立ですね.

行列 A などのランクを記号 rank A などと書いて，以上の結果をまとめましょう：

> n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について，
> 解がただ 1 組存在するための必要十分条件は，
> $$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) = n,$$
> 解が無数組存在するための必要十分条件は，
> $$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\boldsymbol{b}) < n.$$

上で，$r < n$ のときは独立した条件が足りないために，解は一般に $n - r$ 個の任意定数（パラメータ）を含み（☞§§5.2.5 の例），そのような解を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の **一般解** といいます．任意定数に特定の数を代入した解を **特解**（特殊解）といいます．例えば，3 元 1 次方程式

$$x + y + z = 1 \iff (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

は変数の数 $n = 3$，$r = \operatorname{rank}(1\ 1\ 1) = 1$ です．したがって，独立な条件は 1 つしかないから，$n - r = 2$ 個の変数，例えば y, z はパラメータ s, t とでき，$x = 1 - s - t$ から，一般解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます．特解は，例えば $s = t = 0$ とおいて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得ます．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とおいた方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を **同次連立 1 次方程式** といいます．これに対し，元の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は **非同次連立 1 次方程式** といいます．n 元 m 連立 1 次同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は明らかに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という解があり，それを **自明解** といいます．自明解だけをもつ必要十分条件は $r = \operatorname{rank} A = n$ で，$r = \operatorname{rank} A < n$ の場合は自明でない解，つまり $n - r$ 個の任意定数を含む解をもちます．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の 2 つの解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の差 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ は，$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ より，同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解になります．このことは，非同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解 $\boldsymbol{x}$ はその 1 つの特解 $\boldsymbol{x}_0$ に同次形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解 $\boldsymbol{u}$（$\operatorname{rank} A = n$ のときは自明解）を付け加えて得られることを意味します：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} \qquad (A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}).$$

同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合 W，つまり **解空間**（☞§§5.2.3）

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

を考えましょう．§§5.2.3 ですでに学んだように，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の線形結合はまた解になるから，つまり $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ のとき

$$A(k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad （k, l \text{ は実数}）$$

が成り立つので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 W はベクトル空間になります．その一般解が $n - r$ 個の任意定数を含むとき ($r = \operatorname{rank} A$)，解は $n - r$ 個の線形独立なベクトルからなるので，解空間 W の次元は $n - r$ です：

$$\text{解空間 } W \text{ の次元} = n - \operatorname{rank} A.$$

例えば，上の 3 元 1 次方程式 $x + y + z = 1$ の同次形 $x + y + z = 0$ の一般解は，例えば，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とできます．このとき，$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は線形独立な解ベクトルであり，その線形結合はまた解であり，すべての解はその線形結合で表されるから解空間 W の基底（☞§§5.1.3.2）は $n-r=2$ 個の $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とできます.

n 元 m 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の $m\times n$ 行列 A を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像 f の表現行列と考えることもできます：$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$．このとき，$A\boldsymbol{x}$ の全体を A の像（イメージ，Image）と呼び，$\mathrm{Im}\,A$ で表します：

$$\mathrm{Im}\,A=\{A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^m \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\}.$$

$\mathrm{Im}\,A$ の次元 (dimension) を $\dim(\mathrm{Im}\,A)$ と表しましょう．それが A のランク（A の行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}'_m$ の中で線形独立なものの最大個数）です[9)]：

$$\dim(\mathrm{Im}\,A)=\mathrm{rank}\,A.$$

また，同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 W を A の **核**（カーネル，Kernel）と呼び，$\mathrm{Ker}\,A$ と書きます：

$$\mathrm{Ker}\,A=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\ (=W).$$

すると，定理「解空間 W の次元 $=n-\mathrm{rank}\,A$」は

$$\dim(\mathrm{Ker}\,A)=n-\mathrm{rank}\,A$$

と書かれ,「次元定理」と呼ばれます.

Q1．下の 4 つのベクトルの組は線形独立か従属か，調べなさい.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\3\\-5\\-9\end{pmatrix}$$

ヒント：4 ベクトルを列ベクトルとする行列のランクを調べるのが簡単.

Q2．下の連立方程式を解きなさい.

$$\begin{cases} x-2y+\ \ z=3\\ -2x+\ \ y+2z=a\\ 3x-3y-\ \ z=6\end{cases}$$

9) 演習問題【基底と次元】（☞180 ページ）で議論したように，次元を明確に定義するためには，‘ 次元は基底のとり方にはよらない ’ ことを証明する必要があります．準備が整ったので，一般的な証明をこの章の演習問題で行いましょう.

A1.　解答例.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&-1&-2&3\\3&-3&3&-5\\2&0&6&-9\end{pmatrix}\overset{\substack{2\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2\\3\text{ 行}-1\text{ 行}\times 3\\4\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2}}{\iff}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-5&-4&5\\0&-9&0&-2\\0&-4&4&-7\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{2\text{ 行}-4\text{ 行}\\3\text{ 行}-4\text{ 行}\times 2}}{\iff}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-8&12\\0&-1&-8&12\\0&-4&4&-7\end{pmatrix}\overset{\substack{3\text{ 行}-2\text{ 行}\\4\text{ 行}-2\text{ 行}\times 4}}{\iff}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-8&12\\0&0&0&0\\0&0&36&-55\end{pmatrix}$$

$$\overset{3\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}}{\iff}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-8&12\\0&0&36&-55\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

したがって，4 ベクトルのランクが $3(<4)$ より 4 ベクトルは線形従属.

A2.　解答例.

$$\text{予式}\iff\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\-2&1&2&a\\3&-3&-1&6\end{array}\right)\overset{\substack{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times 2\\3\text{ 行}-1\text{ 行}\times 3}}{\iff}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&-3&4&a+6\\0&3&-4&-3\end{array}\right)$$

$$\overset{2\text{ 行}+3\text{ 行}}{\iff}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&0&0&a+3\\0&3&-4&-3\end{array}\right)\overset{2\text{ 行}\leftrightarrow 3\text{ 行}/3}{\iff}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&1&-4/3&-1\\0&0&0&a+3\end{array}\right)$$

$$\overset{1\text{ 行}+2\text{ 行}\times 2}{\iff}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-5/3&1\\0&1&-4/3&-1\\0&0&0&a+3\end{array}\right)$$

したがって，$a\neq -3$ のとき，解なし．$a=-3$ のとき，$z=c$（任意定数）とすると，$y=\frac{4}{3}c-1,\ x=\frac{5}{3}c+1$.

章末問題

【6.1】n 次の単位行列 I と行列 $A,\ X,\ Y$ があり，関係

$$XA = I, \qquad AY = I$$

を満たします．次の問に答えなさい．

（1）$A,\ X,\ Y$ は共に n 次の正方行列であることを示しなさい．

ヒント：単位行列 I は $n \times n$ 型なので，$XA = I$ より，X は $n\times ?$ 型，A は $? \times n$ 型ですね．

（2）A は正則行列であることを示しなさい．

ヒント：行列式の定理 $|AB| = |A||B|$ を用いる．

（3）$X = Y = A^{-1}$ であることを示しなさい．

【6.2】A が n 次の正則行列のとき，

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \qquad (k \neq 0)$$

であることを示しなさい．

ヒント：逆行列の定義を用いるのが簡単かな．

【6.3】行列 $I - X$ が正則のとき，

$$\begin{aligned} I + X + X^2 + \cdots + X^n &= (I - X)^{-1}(I - X^{n+1}) \\ &= (I - X^{n+1})(I - X)^{-1} \qquad (n \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

が成り立つことを示しなさい．

ヒント：I と X は可換（交換可能）：$IX = XI$ ですね．

参考：この問題は来(きた)るべき‘ 行列のべき級数 ’を示唆しています．

【6.4】A が n 次の正方行列で，c が定数のとき，等式 $\det(cA) = c\det A$ の誤りを正しなさい．

ヒント：cA を成分表示すると・・・．

【6.5】座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$，$\mathrm{C}(x_3, y_3)$ を頂点とする 3 角形の面積は

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられることを示しなさい．

ヒント：3 角形の面積の公式（☞ §§3.8.2）と行列式の行についての展開式をうまく使おう．

【6.6】【ベクトル空間の次元は基底のとり方に依(よ)らないこと】

§§5.1.3.2 において，次元は基底を用いて定義されました：

ベクトル空間 V に n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ があり，

（i）$\{\boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合によって V の任意のベクトルを表すことができ，

（ii）（i）の表示はただ 1 通りである（$\{\boldsymbol{a}_k\}$ は線形独立である）．

このとき，$\{\boldsymbol{a}_k\}$ を V の **基底** といい，（V の他の基底を考えても，それは n 個のベクトルからなり）V は n 次元であるという．

もし，V の基底をなすベクトルの個数が一定でなかったら，次元そのものが定義できませんね．ここできちんと証明しましょう．

(1) ベクトル空間 V の 2 組の基底を $\{\boldsymbol{a}_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, r_a)$，および $\{\boldsymbol{b}_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, r_b)$ とします（基底ベクトルの個数は，ベクトルのランクの議論にも応用できるように，r_a, r_b とします）．このとき，V の任意のベクトルは $\{\boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合によっても $\{\boldsymbol{b}_k\}$ の線形結合によっても表されます．よって，V のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は $\{\boldsymbol{b}_k\}$ の線形結合で表されます：

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{k=1}^{r_b} a_{ik}\boldsymbol{b}_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, r_a)$$

と表しましょう．同様に，$\boldsymbol{b}_k$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の線形結合で表されます：

$$\boldsymbol{b}_k = \sum_{j=1}^{r_a} b_{kj}\boldsymbol{a}_j \qquad (k = 1, 2, \cdots, r_b).$$

さて，ここで問題です．行列 A, B を $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right)$ とするとき，A, B の型（行と列の数）を答えなさい．

(2) ここで，(1) の 2 つの式から $\boldsymbol{b}_k$ を消去すると，$\boldsymbol{a}_i$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の線形結合で表されます：

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{k=1}^{r_b} a_{ik} \sum_{j=1}^{r_a} b_{kj}\boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_b} a_{ik}b_{kj}\boldsymbol{a}_j.$$

さて問題です．$\boldsymbol{a}_i$ は $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の線形結合で表すと，‘（i）の表示はただ 1 通りである’ より，$\boldsymbol{a}_i = \sum_{k=1}^{r_a} \boldsymbol{a}_k\delta_{ki} (= \boldsymbol{a}_i)$ となります．これは $\sum_{k=1}^{r_b} a_{ik}b_{kj}$ にどんな条件を付加するでしょうか．また，行列の積 AB にどんな条件を付加するでしょうか．

（3）さて，本題の証明にとりかかりましょう．$r_a \times r_b$ 型の行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ を左・右基本変形してランク標準形 R にします：

$$A \longrightarrow PAQ = R = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & O & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & O & & & \end{pmatrix}}_{r_b\text{列}}\right\} r_a\text{行}.$$

このとき，$r_a = r_b$ が成り立たず，仮に $r_a > r_b$ だったとしましょう．すると，R の最後の行は 0 ばかりになります．そこで，r_a 次の行基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{r_a}^T = (0 \ \cdots \ 0\ 1)$ を用意すると，

$$\boldsymbol{e}_{r_a}^T PAQ = \boldsymbol{0}^T$$

が成り立ちますね．さて，問題です．P, Q は正則で，$AB = I_{r_a}$ に注意すると，矛盾する結果 $\boldsymbol{e}_{r_a}^T = \boldsymbol{0}^T$ が導かれ，したがって，仮定 $r_a > r_b$ が成り立たないことを示しなさい．

（4）（3）のランク標準形 R において，もし $r_a < r_b$ だったとすると，R の最後の列は 0 ばかりになり，r_b 次の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{r_b} = (0 \ \cdots \ 0\ 1)^T$ を用いて

$$PAQ\boldsymbol{e}_{r_b} = \boldsymbol{0}$$

が成り立ちますね．（3）の問題を参考にして，$\boldsymbol{e}_{r_b} = \boldsymbol{0}$ を導き，したがって，それを招いた仮定 $r_a < r_b$ が否定されることを示しなさい．

以上，（3)，（4）の議論から，仮定 $r_a > r_b$，$r_a < r_b$ が共に否定され，したがって $r_a = r_b$ となります．以上の結果から，ベクトル空間 V の基底をなすベクトルの数（ランク）は基底のとり方によらずに一定であることが証明されました．