## 7.2.3　マルコフ過程

### 7.2.3.1　ビール業界のシェア争い

ビール業界の熾烈なシェア争いを例にとって解説しましょう．まず，簡単のために 2 社だけで考えます．A 社はある年（0 年とします）のシェア（市場占有率）$\mathbf{a}_0$ はわずか 10 %だったが，「スーパートロイ」を売り出したところ，これが大ヒットをかっ飛ばし，翌年以降からは自社の前年（$k$ 年）のシェア $\mathbf{a}_k$ の 9 割を確保し，ライバルの K 社のシェア $\mathbf{k}_k$ の 2 割を奪うようになった（もちろん架空の数字です）．これを式で表すと，0 年のシェアは $\mathbf{a}_0 = 10$ %，$\mathbf{k}_0 = 90$ %で，$k+1$ 年のシェアは $k$ 年の両者のシェアを用いて

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{k+1} = 0.9\,\mathbf{a}_k + 0.2\,\mathbf{k}_k \\ \mathbf{k}_{k+1} = 0.1\,\mathbf{a}_k + 0.8\,\mathbf{k}_k \end{cases}$$

と表されます．K 社の $k+1$ 年のシェアは $\mathbf{k}_{k+1} = (1-0.9)\,\mathbf{a}_k + (1-0.2)\,\mathbf{k}_k$ の意味です．例によって，この連立漸化式は

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{k}_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

のように行列を用いて表すことができます．

上の漸化式で，$k$ 年のシェアを一般化して‘ $k$ 年の状態 ’ということにすれば，$k$ 年より後の状態は $k$ 年の状態によって全て決まり，状態間の遷移（せんい）（移り変わり）は行列 $A$ の成分 $a_{ij}$ で $j$ 状態から $i$ 状態への遷移確率 $(0 \leqq a_{ij} \leqq 1)$ として表されます．状態の変動をこのようにモデル化することを **マルコフ過程** といい，特に上の例のように時間が離散的である場合を「マルコフ連鎖」といいます．上のシェアのような連鎖変動は‘ ブランドスイッチングモデル ’と呼ばれ，マルコフ連鎖の代表例です．マルコフ過程は，計量経済学において市場予測や景気変動解析に用いられ，また，気象予測のモデルや農作物収穫予測などにも広く用いられています．

さて，漸化式 $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k$ の解は $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ で与えられるから，$A$ を対角化して $A^n$ を計算すれば済みます．それは練習問題にしましょう．

略解：特性方程式 $\begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を解いて，固有値 $\lambda = 1, 0.7$．それらに対応する固有ベクトルを並べた変換行列は $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とできます．したがって，

$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$ より，$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+0.7^n & 2-2\cdot 0.7^n \\ 1-0.7^n & 1+2\cdot 0.7^n \end{pmatrix}$.
したがって，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{k}_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 10 \\ 90 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 200 - 170\cdot 0.7^n \\ 100 + 170\cdot 0.7^n \end{pmatrix}(\%).$$

ここまでが練習問題です．さて，答の特徴に注意しましょう．$n \to \infty$ のとき $0.7^n \to 0$ だから，始め 10 %に過ぎなかった A 社のシェアが何年かすると $200/3 \fallingdotseq 67$ %に近づく，つまり K 社の倍も売れることになります．A 社はこの予測を念頭において増産体制に入ることになります．

実は，ビール業界には S 社という大手がいます．今度は，この S 社を加えた 3 社のシェア争いを考えましょう．上で用いたのと同じ記号でシェア $\boldsymbol{x}_k$ や遷移行列 $A$ を表します：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{k+1} \\ \mathbf{k}_{k+1} \\ \mathbf{s}_{k+1} \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{k}_k \\ \mathbf{s}_k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{s}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix}(\%).$$

もちろん，上式の数値を現実の数値と思ってはいけません．
ここで確認の練習問題です．問：S 社のシェア $\mathbf{s}_{k+1}$ を前年の各社のシェアで表し，その変動を言葉で表しなさい．
答：$\mathbf{s}_{k+1} = 0.1\,\mathbf{a}_k + 0.1\,\mathbf{k}_k + 0.6\,\mathbf{s}_k$ ですね．したがって，S 社は，前年の A 社と K 社のシェアの 1 割を奪い，自社のシェアの 6 割を確保します．

解は $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ で与えられるので，3 次の行列 $A$ を対角化すれば済むのは 2 次の場合と同じです．固有値方程式 $A\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0})$ も同形だから，特性方程式も同じです：$|A - \lambda I| = 0$．$A$ の具体形を代入して

$$\begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 8-10\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 7-10\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 6-10\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$x = 7 - 10\lambda$ とおいて展開すると，$x(x^2-1) - 6x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3) = 0$ と，3 次方程式が解けて，$x = -3, 1, 2$ に対応して $\lambda = \dfrac{7-x}{10} = 1,\ 0.6,\ 0.5$ と定まります．

固有ベクトル $\boldsymbol{p} = (p\ \ q\ \ r)^T$ については，固有値方程式 $(A-\lambda I)\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ の（拡大）係数行列（☞§§6.4.1）を用いるのが便利です．それらは $\lambda = 1,\ 0.6,\ 0.5$ について，それぞれ，（10 倍した形で）

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

です．行変形を行うと，それぞれ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となりますね．よって，固有ベクトル $(p\ \ q\ \ r)^T$ の方程式は，それぞれ

$$\begin{cases} p - q - r = 0 \\ 2q - 3r = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} p + q = 0 \\ r = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} p = 0 \\ q + r = 0 \end{cases}$$

に帰着します．したがって，固有ベクトル $\boldsymbol{p}$，および変換行列 $P$ は

$$\boldsymbol{p} \propto \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とできますね（☞§§7.2.2.1）．固有ベクトルであることを確かめましょう．またこのとき，

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -5 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

であることを確かめましょう．また，

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.5^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

に注意して，$n$ が大きいとき，各社のシェア

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{k}_n \\ \mathbf{s}_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -5 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}(\%)$$

に近づきますね．A 社のシェアが 5 割を占める結果となりました．