注意すべきは，条件 1°）〜8°）のどれもがベクトルの和またはスカラー倍を含みますが，もしそれらが元のベクトル空間 V に属さなくなると 8 条件は意味をなしません．したがって，公理系の始めに述べられている‘ 前提条件 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ と $\lambda\boldsymbol{x} \in V$ が実は最も肝要な条件 ’です．これは，我々が出会う方程式の解の集合がベクトル空間かどうかという場合に，現実の問題として浮上してきます．

5.1.3　ベクトル空間と基底

5.1.3.1　*n* 次元数ベクトル空間

まず，条件 1°）〜 8°）は，平面ベクトル・空間ベクトルに共通する性質を抽出しているので，次元を定める条件を含みません．したがって，この 8 条件が通常の連立方程式のようにベクトル $\boldsymbol{x}$ の解を定めるとは考えにくいですね．そこで，次元を外からもち込んでみましょう．n 個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を成分とする ***n* 次元数ベクトル**（ここでは列ベクトルとします）

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ (= (x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)^T \text{ とも表す})$$

が条件 1°）〜 8°）を満たすかどうかを確認しましょう（右辺の行ベクトルの右肩の記号 T は行列に出てくる「転置行列」を表す記号です）．全ての実数の集合を $\mathbb{R}$ で表し，この数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ とします．任意の 2 つの n 次元列ベクトルを

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = (y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

として，ベクトルの相等，和，スカラー倍を以下のように定義します：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \cdots,\ x_n = y_n,$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \cdots,\, x_n + y_n)^T,$$

$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \cdots,\, \lambda x_n)^T \qquad (\lambda \text{は実数}).$$

このとき，ベクトルの和やスカラー倍は各成分で実数の和や実数の積で定義されるので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，$\lambda\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が成り立つのは明らかですね．成分で考えれば

よいので，公理的定義の条件は事実上 §§2.1.1 で議論した実数の交換・結合・分配の 3 法則などに還元できます．例えば，1°）の交換法則 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ は実数のそれ $x_i+y_i=y_i+x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ に還元され，成り立つことがわかります．したがって，n 次元数ベクトルが条件 1°）〜8°）を満たすことを示すのは簡単な練習問題です．（解説： 2°）は $(x_i+y_i)+z_i = x_i+(y_i+z_i)$ と同じだから成立．3°）は $x_i+0=x_i$ と同じです．4°）は $x_i+(-x_i)=0$ と同じね．5°）は $\lambda(x_i+y_i)=\lambda x_i+\lambda y_i$ と同じ．6°）は $(\lambda+\mu)x_i=\lambda x_i+\mu x_i$ と同じ．7°）は $(\lambda\mu)x_i=\lambda(\mu x_i)$ と同じ，8°）は $1x_i=x_i$ と同じです）．以上のことから，n 次元数ベクトル全体の集合 $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間（線形空間）であることが示されました．$\mathbb{R}^n$ を ***n* 次元数ベクトル空間** といいましょう．

上の例は公理的にベクトルを定める方法の雛形になっています：集合 V を設定し，その任意の要素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に和やスカラー倍などの必須な演算を定めます．このとき，条件 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$\lambda\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$ が満たされていることが絶対であり，このことを‘ 集合 V は加法とスカラー倍に関して **閉じている** ’といいます．そして，条件 1°）〜 8°）を満たすことが示されたならば，集合 V はベクトル空間であることが確定します．したがって，ベクトルの公理的定義によって定まるのは，V の個々の要素のベクトルというよりは，その全体の集合 V のほうであるといえるでしょう．

5.1.3.2　基底と次元

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を議論しましたが，n 次元ベクトルの n は任意の自然数で差し支えなく，1 次元ベクトルは実数，2・3 次元なら平面・空間ベクトルですね．もし $n \geqq 4$ のときは対応する現実の空間はありません．しかしながら，‘ 数学における次元 ’は本来‘ この世 ’の空間の次元とはまったく無関係で，数学では単に演算ができればよく，次元は変数や未知数などの個数などとすることができます．したがって，次元 n はしばしば非常に大きくなり，ときとして $n=\infty$ の場合もあります．

まもなく学ぶように，§§5.1.2 における‘ 公理が許すベクトル ’には関数も含まれます．そんなベクトルに対して，次元はどう考えればよいでしょうか．我々はベクトルの線形独立性を頼りにして‘ 数学的次元 ’を考えます．そのために，我々は「基底」という概念が必要です．

基底：ベクトル空間 V において，次の 2 条件を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ が存在するとき，$\{\boldsymbol{a}_k\}$ を V の **基底** といいます．
（ｉ）$\{\boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合によって V の任意のベクトルを表すことができる．
（ii）n 個の $\{\boldsymbol{a}_k\}$ は線形独立である（$\{\boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合は V のベクトルをただ 1 通りに（一意的に）表す）．このとき，V は n 次元であるといいます（V の基底はその選び方に依らずに n 個のベクトルからなります）．

まずは数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ で基底を例解しましょう．$\mathbb{R}^n$ には n 個の基本ベクトルがあり，それらは

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^T, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^T$$

ですね．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ をそれぞれ実数倍したものの和，つまりそれらの線形結合 $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ は，$\mathbb{R}^n$ の定義より

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

だから，条件（ｉ）を満たし，$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルは基本ベクトルの線形結合によって表されます．このとき，基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ は空間 $\mathbb{R}^n$ を **張る** または **生成する** といいます．条件（ii）が成り立つことは

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

からわかりますね．

以上の議論から，$\{\boldsymbol{e}_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，特に，それらは基本ベクトルなので **標準基底** と呼ばれます．これから，空間 $\mathbb{R}^n$ の次元は n であることがわかります（次元の定義の厳密な検証については，演習問題【4.1】（180 ページ），および 演習問題【6.6】（300 ページ）を参照しましょう）．

5.1.3.3　連続関数の空間

さて，連続関数も線形空間のベクトルと見なせることを示します．線形空間の概念が如何に広大で深遠であるかを凝視しましょう．簡単のために，区間 $I = (a, b)$（または $[a, b]$）で定義された実数値連続関数を考えます．§§1.7.1 で議論した一般化された関数つまり写像の記法を用います．写像の考え方に慣れていない人は，以下の議論は非常に重要なので，今一度読み返しましょう．

区間 I で定義された任意の実数値連続関数 f, g に対して，和 $f+g$ とスカラー倍 λf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad (\lambda \text{は実数})$$

で定義します．まず，この定義が何を意味するか，関数という観点から調べましょう．（解説しようかと思いましたが，やめて）練習問題にします．

ヒント：§§1.3.2 関数概念の一般化 1 を読み直せば簡単です．

答：関数 f はその定義域の各要素 x を関数値 $f(x)$ に移しますね．したがって，上の定義は‘和 $f+g$ は要素 x を関数値 $f(x)+g(x)$ に移し，スカラー倍 λf は要素 x を関数値 $\lambda f(x)$ に移す’と定めています．実数値連続関数の和とスカラー倍は同じく実数値連続関数になることに注意しておきます．

さて，第 3 の連続関数 h，および常に 0 になる「零関数」O ($O(x) = 0$) を用意すると，先に与えた関数の和とスカラー倍の定義に注意して，条件 1°）～8°）は以下のように書き表されます：

1°）$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$，2°）$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$，3°）$f(x) + O(x) = f(x)$（零元の存在），4°）$f(x) + (-f(x)) = O(x) = 0$（逆元の存在），5°）$\lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$，6°）$(\lambda + \mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$，7°）$(\lambda\mu) f(x) = \lambda(\mu f(x))$，8°）$1 f(x) = f(x)$．実数の和は実数，連続関数の和は連続関数であることに注意すると，1°）～8°）は全て満たされていますね．したがって，実数値連続関数の全体はベクトル空間であり，実数値連続関数はそのベクトルになります．ベクトルの条件なんて，ホント緩（ゆる）いんです．

5.1.3.4　多項式の空間と関数空間の基底

この章の始めにペアノが議論した多項式の作るベクトル空間とその基底の線形独立性を議論しましょう．定義域が全実数で実係数の n 次以下の多項式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

全体の集合を $\boldsymbol{P}_n$ としましょう．$\boldsymbol{P}_n$ の任意の多項式 P, Q は全実数で定義される実数値連続関数ですから，和 $P+Q$ は $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ で，スカラー倍 λP は $(\lambda P)(x) = \lambda P(x)$ によって定義されます．すると，多項式の和は多項式，多項式の定数倍も多項式ですから，$\boldsymbol{P}_n$ はベクトル空間となり，各多項式はそのベクトルとなりますね．

さて，$\boldsymbol{P}_n$ の基底は，直ぐわかるように，$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ の $n+1$ 個の単項式にとればよいでしょう．すると，それらの線形結合

$$t_n x^n + t_{n-1}x^{n-1} + \cdots + t_1 x + t_0 1$$

は基底の条件（ i ）（上の線形結合は $\boldsymbol{P}_n$ の任意のベクトルを表すことができる）を満たすのは自明ですね.

基底の条件（ii）（$1, x, x^2, \cdots, x^n$ は線形独立である）のほうはどうでしょうか．そのためには ‘ 関数の線形独立 ’ の定義から述べないとなりません：

> 関数の線形独立：定義域が D の 2 つの関数 f, g が，D で
>
> $$\text{恒等的に } sf(x) + tg(x) = 0 \ \Rightarrow\ s = t = 0$$
>
> が成り立つとき，f と g は **線形独立** であるといいます.
>
> 3 個以上の関数についても同様に定義します.

我々の扱う関数は，多項式がそうであるように，何回でも微分可能なものがほとんどです．そのような場合，‘ 恒等的 ’ の意味はきわめて大きく，微分した $sf'(x) + tg'(x) = 0$ も恒等的に成り立ちます：ある x について $sf(x) + tg(x) = 0$ が成り立つとき，$x + \varDelta x$ でも成り立つために（$sf(x + \varDelta x) + tg(x + \varDelta x) = 0$），導関数の定義 $f'(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$ に適用すると

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{sf(x + \varDelta x) - sf(x) + tg(x + \varDelta x) - tg(x)}{\varDelta x} = 0 \ \Leftrightarrow\ sf'(x) + tg'(x) = 0.$$

この技術を $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ が $\boldsymbol{P}_n$ の基底となるための条件（ii）：

$$\text{恒等的に } t_0 1 + t_1 x + \cdots + t_n x^n = 0 \ \Rightarrow\ t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$$

に応用しましょう．まず，左辺で $x = 0$ とおくと $t_0 = 0$ ですね．微分すると，$t_1 + 2t_2 x + \cdots + nt_n x^{n-1} = 0$ だから，$x = 0$ とおくと $t_1 = 0$．以下，微分しては $x = 0$ とおく作業を続けて，$t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$ が得られます．したがって，基底の条件（ i ），（ii）が満たされ，$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ は $\boldsymbol{P}_n$ の基底です.

多項式 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1$ をベクトルとして眺めるには，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{p}$ を（ちょっと気取った記号の）基底 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ の線形結合で表した，$\boldsymbol{p} = t_n\boldsymbol{x}_n + t_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1} + \cdots + t_2\boldsymbol{x}_2 + t_1\boldsymbol{x}_1$ と比較するのがよいでしょ

う．§§3.6.2 からわかるように，基底ベクトル $\boldsymbol{x}_k$ は $\mathbb{R}^n$ の座標軸を定め，ベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{x}_k$ の係数つまり座標を用いて $\boldsymbol{p} = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n)^T$ と表されます．多項式 $P(x)$ についても，ベクトル空間 $\boldsymbol{P}_n$ の基底 $\{x^k\}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ が空間の x^k 軸を定めると考えます．すると，$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1$ は‘座標’を用いて

$$P(x) = (a_0, a_1, \cdots, a_n)^T$$

のように表してもよいでしょう．

最後に，「関数空間」つまりベクトルの定義を満たす一般の関数の集合の基底についてコメントしておきましょう．例えば，ある区間 $I = (a, b)$ で定義された関数の空間 V_I を考えます．V_I の任意の関数 f は I の任意の x で関数値 $f(x)$ をもつので，関数空間 V_I は I で連続的な値に対して様々な値になる関数が集まった広大な空間です．したがって，そんな関数空間については，有限個の基底で済む多項式の空間 $\boldsymbol{P}_n$ とは異なり，一般には，その空間の関数を表すには無限個の基底を必要とするでしょう．実際にそうであり，そんな関数空間は‘無限次元空間’と呼ばれます．

そんな一例を紹介しましょう．両端が固定された弦，例えば，ピアノやギターの振動の様子は，「ニュートンの運動方程式」から導かれる「波動方程式」という微分方程式（両端固定の境界条件付）を解いて得られます．君たちもまもなくその方程式を解くことになるはずですが，その解は振動数が f_0 のいわゆる基本音とその倍音 kf_0 の波の「重ね合わせ」で表されます．具体的には，ある位置 x で計った弦の変位を $u(t)$ とすると，§§1.4.4 波の合成 で学んだように，振動数が明示された波の表式（☞ §§1.4.4.2）を用いて，「フーリエ級数」といわれる

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k f_0 t + b_k \sin 2\pi k f_0 t)$$

の形になります．この例は，この方程式の解全体の集合がベクトル空間をなし，任意の解は無限個の基底 $\{\cos 2\pi k f_0 t,\ \sin 2\pi k f_0 t\}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ の線形結合（重ね合わせ）で表されることを示しています．$\cos 2\pi k f_0 t$ や $\sin 2\pi k f_0 t$ は振動数が kf_0 の‘固有な波’を表すので，「固有関数」とか，ベクトル空間の基底として「固有ベクトル」といわれます．それらの線形独立性を示すのは §§5.4.3.1 の内積の議論まで待つのが得策でしょう．一般の音や光，例えばテ

レビの音声や映像は連続する振動数の波の和，つまりそれらの波の振動数についての積分（「フーリエ積分」），として表すことができます．

Q1．n 次以下の多項式全体が作るベクトル空間 $\boldsymbol{P}_n$ の基底は

$$\{\, p_k(x) \mid p_0(x) = 1,\ p_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

のように選べることを示しなさい．

Q2．$\{\cos x,\ \cos 2x,\ \sin x,\ \sin 2x\}$ は線形独立であることを示しなさい．

A1．集合の記号に惑わされないこと．$p_k(x)$ の線形結合を $\ell(x)$ と書くと

$$\begin{aligned}\ell(x) =& t_0 p_0(x) + t_1 p_1(x) + \cdots + t_{n-1} p_{n-1}(x) + t_n p_n(x)\\ =& (t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1} + t_n)1 + (t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n)x\\ & + \cdots + (t_{n-1} + t_n)x^{n-1} + t_n x^n\end{aligned}$$

のように表され，$\ell(x)$ は $\boldsymbol{P}_n$ の任意の多項式を表せます．これらの $p_k(x)$ が線形独立の条件

$$\text{恒等的に } \ell(x) = 0 \ \Rightarrow\ t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$$

を満たすのを見るには，まず，$\ell(x)$ を n 回微分して，$\ell^{(n)}(x) = t_n n! = 0$ より $t_n = 0$ を得ます．$t_n = 0$ を利用すると，$\ell^{(n-1)}(x) = t_{n-1}(n-1)! = 0$ より $t_{n-1} = 0$．以下同様に続けると全ての $t_k = 0$ が得られます．したがって，$\{p_k(x)\}$ は $\boldsymbol{P}_n$ の基底です．

A2．線形結合を $\ell(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\sin x + d\sin 2x$ と書くと，線形独立の条件は

$$\text{恒等的に } \ell(x) = 0 \ \Rightarrow\ a = b = c = d = 0$$

ですね．$\ell(x)$ を 3 回まで微分して $x = 0$ とおくと，

$$\ell(0) = a + b = 0, \qquad \ell'(0) = c + 2d = 0,$$
$$\ell^{(2)}(0) = -a - 4b = 0, \qquad \ell^{(3)}(0) = -c - 8d = 0.$$

これらから，$a = b = c = d = 0$ を得るので，$\{\cos x,\ \cos 2x,\ \sin x,\ \sin 2x\}$ は線形独立です．