

の後に h を行い) ます。したがって、両者共に f, g, h の順で写像を行うのでそれらは一致し、そのことは合成写像の結合法則といわれます：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

実際、 X の任意の要素 x を用いて示すと

$$h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

となって確かに一致しますね。

1.7.2 置換

要素が有限な集合に対する写像の代表例として「置換」を議論しましょう。ここでは全単射写像の雛形としてとりあげますが、置換はそれ自身で重要な役割をもち、まもなく学ぶ「行列式」や上級学年で学ぶ「群論」の議論に不可欠です。我々は写像の範疇に囚われないで議論しましょう。後半の部分では、阿弥陀籤を利用して置換を楽しみましょう。

1.7.2.1 置換とは

自然数の集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ や n 次方程式の解の集合のように、有限個の要素からなる集合（有限集合）を考えます。要素が n 個の集合から自分自身への写像（つまり、変換）で全射かつ単射なものを n 文字の置換（ n 次の置換）といい、記号 σ や τ （関数でいえば、 f や g に対応）などで表されます。 n 文字の置換全体の集合は記号 S_n で表されます。

以下、我々は集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ の置換 σ を考えましょう。置換 σ が全射であるとは、 i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) の像 $\sigma(i)$ （関数値 $f(x_i)$ に対応）を考えたとき、 $\sigma(i)$ の集合 $\{\sigma(i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ が原像 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ に一致することです。また、単射であるとは、 $i \neq j$ のとき $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ となることです。よって、 $\sigma(i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) を順に 1 列に並べると、それは文字 $1, 2, 3, \dots, n$ の「順列」（ n 文字を 1 列に並べる並べ方の 1 つ）になります。例えば、 $i = 1, 2, 3, 4$ のとき、 $\sigma(i) = 2, 4, 1, 3$ など。

置換を表現する際には、像と原像の対応関係が全ての要素に対して明確になるように、次のような書き方があります：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

先ほどの例 $\sigma(i) = 2, 4, 1, 3$ なら、 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ です。対応関係さえ明確ならばよいので、並べ方の順番を変えてもよく、例えば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

などが成り立つとします。

特に、 n 文字のうちの 2 文字 (i, j としよう) のみを交換するような置換を互換といい、記号 $(i j)$ で表します：

$$(i j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

恒等写像 $1(x) = x$ に対応して、 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ のどの要素 i に対してもそれ自身に対応させる S_n における置換を恒等置換といい、記号 ι (イオタ) で表しましょう：

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

ここで練習問題です。問：3 文字 $\{1, 2, 3\}$ の置換は何通りあるか。また、そのうち互換を全て書き並べなさい。

答：置換の総数、つまり 3 文字の順列の総数は ${}_3P_3 = 3! = 6$ 通りありますね。また、互換は $(1 2), (1 3), (2 3)$ ですね (こちらは組み合わせで ${}_3C_2 = 3$ 通り)。

1.7.2.2 置換の積

合成写像 $g \circ f(x) = g(f(x))$ に対応して、 S_n に属する 2 つの置換 σ, τ の積 $\tau\sigma(i) = \tau \circ \sigma(i) = \tau(\sigma(i))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を考えることもできます：

$$\begin{aligned} \tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2 行目が積の正しい定義で，1 行目の積の計算ルールは次の通りです．3 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を例にとって説明しましょう．左側の τ の書き方を変更します：

$$\begin{aligned} \tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一般の場合も同様です．

上の例で，積の順序を変えた $\sigma\tau$ は $\tau\sigma$ に一致するでしょうか．

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \tau\sigma$$

ですから，一致しませんね．したがって，一般の n 文字の置換 σ, τ の積は交換法則を満たしません：

$$\sigma\tau \neq \tau\sigma.$$

練習問題です．問：4 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の積 $\tau\sigma$ を求めなさい．ヒントは不要でしょう．答： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ですね．

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して， $\tau\sigma = \iota$ かつ $\sigma\tau = \iota$ を満たす置換 τ はあるでしょうか．その条件は，写像 f でいうと $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbf{1}$ に当たります．よって， τ は σ の逆置換 σ^{-1} と表します． $\tau = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を見いだすのに時間はかからないでしょう．条件 $\tau\sigma = \sigma\tau = \iota$ ：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \iota$$

が成り立つことを確かめましょう．

一般の S_n の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ の逆置換 σ^{-1} は，上の例からわかるように， $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ ですね．それは，もちろん， σ^{-1} の定義式

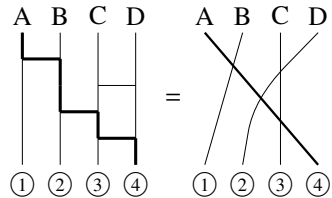
$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \iota$$

を満たしますね．

1.7.2.3 あみだくじ

置換の理論は一般にそう易しくはありません．置換を理解するために，我々は日本独特の^{あみだくじ}阿弥陀籤を活用しましょう．あみだくじは置換を視覚化し，置換の積の理解を助け，また置換が互換の積で表されることの理解に役立ちます．以下，置換とあみだくじの関係を議論しましょう．

右図のあみだくじでは A, B, C, D の 4 人がそれぞれ ④, ①, ③, ② 等の景品を引きました．4 人全員が異なる景品を引いてますね．



あみだくじの線の交わり方は必ず「または」一字路の形であり，「+」字路はありませんね．これが「出発点が違えば終着点も違う」

全単射の写像，つまり置換をもたらします．そのために，図中の任意の H 路を考えましょう．その横路—では縦路||が入れ替わると考えて—の長さを 0 にしてしまうと，H 路は立体交差する X 路と考えることができます．上図は直線や簡単な曲線で X 交差に直した例です．図の間の等号 = は両図が同じ置換を与えるという意味で用います．どんな複雑なあみだくじも X 交差の図にできます．逆に，1 つの置換に対応する X 交差図を描いておき，X 交差を H 路に替えると，あみだくじに直すことができます．

上の考察に基づいて，置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ をあみだくじで表してみよう：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

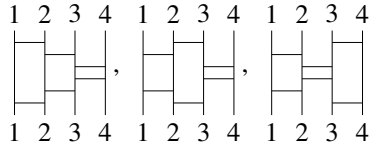
まず，置換の上下で対応する文字 i と $\sigma(i)$ を線で結んだ図を描ます．その「線」を以下「置換線」と呼ぶことにしましょう．次に，下側の文字の順列 3 1 4 2 を上側の順列 1 2 3 4 に並べ替えます．その結果，順列の変更は置換線の間の交わりに変換され，X 交差の図を与えます．X 交差を H 路に直すと置換 σ を表すあみだくじが完成します．途中の図でも置換線は i と $\sigma(i)$ を結ぶので，それらは同じ置換を表していると思えます．X 交差の図を正しく導くために，置換線は i から $\sigma(i)$ に常に「下降する」路としなければなりません．

上下の数字の並びを 2, 1, 4, 3 の順などにしても、同じ置換に対応します。交差の数、または横路の数が 3 で変化がないことに注意し

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} = \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ | & | & | & | \\ \hline | & | & | & | \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

ましょう。一般に、元のみだくじの横路の数が奇数（偶数）ならば、同じ置換を与えるのみだくじはどれも奇数（偶数）になります（§§1.7.2.6 偶置換・奇置換）。

ここで練習問題です。問：右の 3 つのみだくじが定めるのはどんな置換でしょうか。ヒントは不要でしょう。

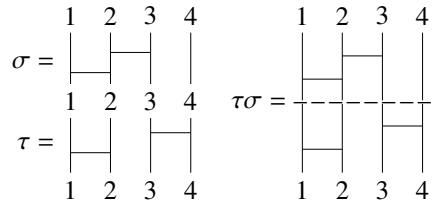


答：線をなぞってみるとわかりますね。

どれも 4 文字の恒等置換 $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ですね。これで、同じ置換を与えるのみだくじはたくさんあることが納得できるでしょう。どのくじの図も、上下の真ん中で横線を引いてみると、横線について上下対称になっていることに注意しましょう。

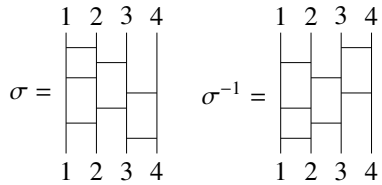
1.7.2.4 あみだくじによる置換の積

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の積 $\tau\sigma$ の計算をのみだくじでやってみましょう。まず、答が $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ であることを確認しておきましょう。右図の左側が σ と τ ののみだくじです。両者共、くじの上下の数が 1, 2, 3, 4 の順です。このために‘積 $\tau\sigma$ の計算は σ ののみだくじの下に τ のものをつなぐと積 $\tau\sigma$ ののみだくじになる’わけですが、したがって、右図の右側ののみだくじを用いて、先に計算した $\tau\sigma$ の値が確認されますね。



練習問題です。問：上で与えられた σ と τ の積 $\sigma\tau$ を求めなさい。ただし、のみだくじを用いること。ヒント： τ ののみだくじの下に σ のものをつなぎます。答： $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ですね。

さて,逆置換のあみだくじを考えましょ
う. 図の左側のあみだくじに対応する置
換は $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ですから, その逆置
換は $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
です. σ^{-1} を表すあみだくじを描きまし

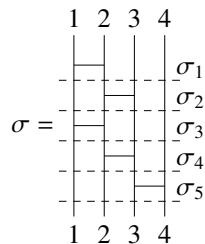


ょう. もちろん, 先に議論した X 交差を H 路に直す方法もありますが, こ
こでは σ のあみだくじを利用する方法を考えましょう. 例えば, $\sigma: 1 \mapsto 3$ だか
ら $\sigma^{-1}: 3 \mapsto 1$ です. これは σ のあみだくじでいうと, 下の 3 からくじを上
にたどって上の 1 に着くことを意味します. つまり, σ があみだくじを上から下
にたどるのに対して, σ^{-1} は (時間を逆転して) 下から上にたどると解釈でき
ます. したがって, σ^{-1} のあみだくじは σ のものを上下逆転してやれば得られ
ますね. σ と σ^{-1} のあみだくじをつなげると恒等置換 I を与える複雑なあみだ
くじになることを確かめましょう.

1.7.2.5 置換は互換の積で表される

置換は必ずあみだくじで表すことができました. また, 置換の積はそれら
を表すあみだくじをつないだあみだくじを作ることに対応しました. ということ
は, あみだくじを利用すると '1つの置換を分解して他の置換の積で表すこと
ができる' ということを意味します.

右の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を表すあみだくじで例解し
ましょう. あみだくじを破線で部分に切り分け, 各部分
 $\sigma_1 \sim \sigma_5$ は 1つの H 路だけを含むようにします. すると,
各部分は隣り合う文字の互換を表していますね:



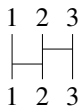
$$\sigma_1 = \sigma_3 = (1\ 2), \quad \sigma_2 = \sigma_4 = (2\ 3), \quad \sigma_5 = (3\ 4).$$

したがって, 置換 σ は隣り合う文字の互換の積で表されます:

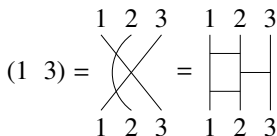
$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_5 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= (3\ 4)(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2). \end{aligned}$$

このように切り分けることはどんなあみだくじに対してもできますから、全ての置換は隣り合う文字の互換の積に分解できますね．以後、隣り合う文字の互換を‘隣接互換’と呼ぶことにしましょう．

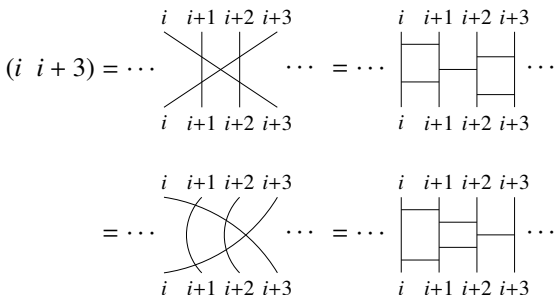
ここで練習問題です．問：3 文字の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を隣接互換の積に分解しなさい．ヒント：置換を最も簡単なあみだくじで表すには、上下に 1, 2, 3 を並べておいて、上の 1 と下の 2, 上の 2 と下の 3, 上の 3 と下の 1 を直線で結んでできる X 交差を H 路に直します．すると右図のあみだくじができます．したがって、答： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)(2\ 3)$ です．上側の H 路に対応する互換 (2 3) が積の右側にあることに注意．同じ置換を与えるあみだくじはいくらでもあります．



置換を隣接互換の積で表しましたが、一般の互換を同様に表すとどうなるでしょうか．右図は 3 文字の置換の互換 (1 3) を表す交差の図とあみだくじです．X 交差を H 路に直すとあみだくじです．互換 (1 3) は 3 個の隣接互換の積 (1 2)(2 3)(1 2) で表されました．



一般の互換と隣接互換の関係を見るために、 n 文字の置換の場合の互換 $(i\ i+3)$ で調べてみましょう．右の X 交差の図をあみだくじの図に直すと、2 通りのあみだくじが得られますね．それは X 交差図の置換線の



ちょっとした描き方の違いによります．上の図の置換線を連続的に変形して下の図のようにするとき、X 交差の数は変化しません．よって、どちらの場合も互換 $(i\ i+3)$ は 5 個の隣接互換の積で表されますね．一般の互換 $(i\ j)$ ($i < j$) に拡張するには図の下側のものを利用するほうがよさそうです．下側のあみだ

くじから類推して

$$(i \ j) = (i \ i+1)(i+1 \ i+2) \cdots (j-2 \ j-1)(j-1 \ j) \\ \times \{(j-2 \ j-1) \cdots (i+1 \ i+2)(i \ i+1)\}$$

が得られます(確かめましょう)。ただし、 $\times\{\cdots\}$ は右側から掛けるものとします。重要な結果：

一般の互換は奇数個の隣接互換の積で表すことができる

に注意しましょう。

練習です。互換(2 5)を隣接互換で表そう。答は

$$(2 \ 5) = (2 \ 3)(3 \ 4)(4 \ 5)(3 \ 4)(2 \ 3).$$

1.7.2.6 偶置換・奇置換

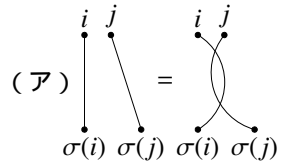
我々はX交差の図をあみだくじに直すことによって、任意の置換は互換の積で表されることを理解しました。そのとき、その置換を表すのに、互換を組み合わせて積を作る方法はいくらでもあります。よって、置換を互換に分解しても意味のある議論はできないと思われるでしょう。が、しかし、掛け合わせる互換の数が偶数か奇数かについては重要な定理があります：

置換を1つ定めて互換の積で表すとき、掛け合わせる互換の数は、互換の選び方によらずに、偶数か奇数に定まる。

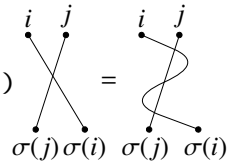
この定理はしばしば「置換の偶奇性の定理」と呼ばれ、いずれ学ぶ「行列式」の一般的な定義の際に重要な役割をもちます。我々はX交差の図を利用して偶奇が定まるメカニズムを議論しましょう。

まず、X交差の図においては、置換線は途中で上がり下がりしてはいけないので、自分と交わることはありません。次に、1つのX交差は必ず2本の置換線によって引き起こされるので、我々は2本の置換線についての関係を調べれば十分です(3本以上の置換線が1点で交差しないように、必要ならわずかに曲げておきます)。置換線を2本選んで直線にすると、それらは交わらないか交わるかのどちらかです。以下、この2通りの場合を調べましょう。

(ア) 直線で引いた 2 本の置換線が交わらない場合．右図のように文字 i, j を $\sigma(i), \sigma(j)$ に移す置換を考えます．置換線を連続的に曲げて交わるようにするとき，置換線の両端は固定されているために，2 箇所です，一般には偶数箇所です．したがって， \times 交差に対応する隣接互換は偶数個だけ変化します．



(イ) 直線で引いた 2 本の置換線が交わる場合．(ア) の場合と同様に置換線を連続的に曲げて交わるようにするとき，置換線の両端は固定されているために，3 箇所です，一般には奇数箇所です．したがって， \times 交差に対応する隣接互換の変化は，(ア) の場合と異なり，奇数個です．

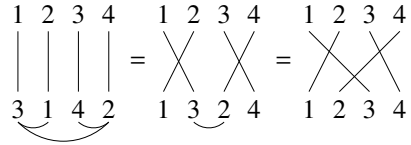


以上のことから，一般の n 文字の置換において，全ての置換線を描いたときも同様の議論が成り立ちます． n 個全ての置換線を引いたとき， \times 交差が全部で偶数個（奇数個）ならば，置換線を連続的に変形しても \times 交差の個数の偶奇は変わりません．したがって，1 つの置換が与えられたとき，それを表す n 文字の H 路の個数の偶奇は定まります．H 路は隣接互換に対応し，また一般の互換 $(i j)$ は奇数個の隣接互換で表されました．したがって，1 つの置換を互換の積で表すとその掛け合わされる個数は偶数か奇数かのどちらかに定まります．

1 つの置換が偶数個（奇数個）の互換の積で表されるとき，それは「偶置換」（「奇置換」）と呼ばれます．その偶奇性が行列式に現れる項の符号を決定するのに用いられます（[註] §6.3.3.1）．

行列式に応用する際に，置換の偶奇性の代わりに，順列の偶奇性という言い方をする場合もあります．どちらも同じことを言っているのです，簡単な例で翻訳しておきます．4 文字の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ の下側の文字の並び $(3 \ 1 \ 4 \ 2)$ は 4 文字の順列の 1 つになっています．このとき，数の大きさが逆転している並び方があります．3 と 1, 3 と 2, 4 と 2 の 3 組です．このような逆転を「転位」（転倒）といい，転位の個数 3 はこの順列の「転位数」（転倒数）といわれます．

この転位数はX交差図の交差数、つまりあみだくじのH路数に一致することがわかります。順列に対応する置換の図で説明しましょう。まず、3と1、4と2の転位を解消し



ようとしてそれらを交換すると、置換線が交わって2個のX交差が現れます。残っている3と2の転位を解消するとまたX交差ができますね。結局、3つの転位を解消すると3つのX交差が現れます。一般の場合には、 k 個の転位を解消すると k 個(厳密には $k + \text{偶数個}$)のX交差ができることがわかります。よって、転位数の偶奇はX交差数の偶奇に一致します。

順列 $(i \ j \ \dots \ k)$ の転位数が r のとき、 $(-1)^r$ をこの「順列の符号」といい、イプシロン $\varepsilon_{ij\dots k}$ で表します。例えば、 $\varepsilon_{3142} = (-1)^3 = -1$ です。

練習問題です。問： ε_{24153} を求めなさい。ヒント：2と1、4と1、4と3、5と3の間に転位があります。よって、転位数は4だから、答： $\varepsilon_{24153} = (-1)^4 = +1$ 。

1.7.2.7 置換と群

n 文字の置換は集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ から自分自身への全単射写像ですね。その置換全体の集合 S_n は $n!$ 個の要素からなります。置換の満たす3つの基本的性質を見てみましょう。

(1) 置換の積はまた置換であり、積についての結合法則が成り立つ。つまり S_n の任意の要素 σ, τ に対して $\tau \circ \sigma = \tau\sigma \in S_n$ が成り立ち、また、 ρ も S_n の要素のとき、

$$\rho(\tau\sigma) = (\rho\tau)\sigma$$

が成り立ちます。

(2) 恒等置換 ι がある。つまり S_n の任意の要素 σ に対して

$$\sigma\iota = \iota\sigma = \sigma$$

を満たす置換 ι が存在します。

(3) どの置換にも逆置換がある。つまり S_n の任意の要素 σ に対して

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \iota$$

を満たす置換 σ^{-1} が存在します。