と表されます．この一般解 $\boldsymbol{x}$ は 1 次方程式 $x - y = 1$ の任意の解を表します．また $x - y = 1$ は 2 次元空間上の直線の方程式ですから，この一般解 $\boldsymbol{x}$ はその直線のパラメータ表示にもなっています．したがって，解空間 W は 2 次元空間上の直線 $\{(x, y)^T \mid x - y = 1\} = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{R} \right\}$ ですね．

5.2.5　1 次方程式と線形写像

連立 1 次方程式の解法の研究から「線形写像」の概念が生まれ，それは数学の広い分野に適用されていきました．また，物理学などに現れる応用上重要な「線形微分方程式」にも応用されました．線形写像の詳しい議論は第 6 章 行列と線形変換 で行います．以下，線形写像へのイントロダクションです．

5.2.5.1　3 元 1 次方程式（非連立）と線形写像

まず，3 元 1 次方程式（非同次線形方程式）

$$x + y - z = b \qquad (b \neq 0)$$

から議論します．この方程式の 3 変数を成分とするベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ に対して，それを左辺の同次 1 次式 $x + y - z$ に導く $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への写像 f：

$$f(\boldsymbol{x}) = f((x, y, z)^T) = x + y - z$$

を考えましょう．このとき，元の非同次方程式は $f(\boldsymbol{x}) = b$ で与えられ，$\boldsymbol{x}$ が未知のベクトルになります．その一般解 $\boldsymbol{x}$ は，前の §§ で調べたように，1 つの特解，例えば $\boldsymbol{x}_0 = (b, 0, 0)^T$ と，対応する同次方程式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ の一般解，例えば $\boldsymbol{u} = (s, t, s + t)^T$ の和で与えられます．実際，解であることは容易にわかります：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}) = f((s + b, t, s + t)^T) \\ &= (s + b) + t - (s + t) \\ &= b. \end{aligned}$$

さて，方程式から離れて，この写像の特徴を調べましょう．$\mathbb{R}^3$ の任意の 2 ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$，$\boldsymbol{y} = (u, v, w)^T$ を考えると，和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ の写像について，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f((x + u, y + v, z + w)^T) = (x + u) + (y + v) - (z + w) \\ &= (x + y - z) + (u + v - w) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立ちます．また，$\boldsymbol{x}$ の実数倍 $k\boldsymbol{x}$ の写像について，

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) = f(k(x, y, z)^T) &= f((kx, ky, kz)^T) \\ &= kx + ky - kz = k(x + y - z) \\ &= kf(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

も成り立ちます．

この 2 つの性質は写像 f が $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ を同次 1 次式に移す場合に得られます．それを確かめるのを練習問題にしましょう．ヒント：写像を具体的に

$$f(\boldsymbol{x}) = f((x, y, z)^T) = ax + by + cz \qquad (a, b, c \text{ は定数})$$

と書くとよいでしょう．

解答：ベクトル $\boldsymbol{y} = (u, v, w)^T$ を用意すると，ベクトルの和に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f((x + u, y + v, z + w)^T) = a(x + u) + b(y + v) + c(z + w) \\ &= (ax + by + cz) + (au + bv + cw) \\ &= f((x, y, z)^T) + f((u, v, w)^T) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立ちます．また，ベクトルのスカラー倍に対して

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) &= f((kx, ky, kz)^T) = akx + bky + ckz \\ &= k(ax + by + cz) \\ &= k f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

も成り立ちます．

ただし，写像が $\boldsymbol{x}$ を非同次 1 次式に移す場合にはこの性質は得られません．そのことを示す練習問題として，写像

$$f(\boldsymbol{x}) = x + y - z + c \qquad （定数 c \neq 0）$$

でスカラー倍の場合 $f(k\boldsymbol{x})$ を調べなさい．ヒントは不要ですね．

解答：

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) &= f((kx, ky, kz)^T) = kx + ky - kz + c \\ &= k(x + y - z + c) - kc + c \\ &= k f(\boldsymbol{x}) + c(1 - k) \\ &\neq k f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ですから成り立ちませんね．

また，写像 f が

$$f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y - z$$

のように，2 次以上の項を含む場合も上の 2 つの性質は得られません．これを示すことも練習問題にします．

解答：

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}) = f((kx, ky, kz)^T) &= (kx)^2 + ky - kz \\ &= k(x^2 + y - z) + k(k-1)x^2 \\ &= k f(\boldsymbol{x}) + k(k-1)x^2 \\ &\neq k f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ですから成り立ちませんね．

というわけで，写像に対して上の 2 つの性質が成り立つ条件はかなり厳しいといえます．しかしながら，これらの性質は非常に重要で，これを一般化して得られる

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ \quad f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) \quad (\lambda \text{ はスカラー}) \end{cases} \qquad \text{（線形性）}$$

を満たす写像 f を一般に **線形写像** といい，両性質はあわせて f の **線形性** と呼ばれます．

線形性は「行列」や「同次線形微分方程式」に現れます．ここでは，行列に関係する部分にちょっと触れておきましょう．先ほどの線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = x + y - z$ は，ベクトルの内積を用いて，

$$f(\boldsymbol{x}) = x + y - z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

のように表されます．この表式 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$ をじっと眺めると，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot$ は写像 f を具体的に表現しているかのように見えます．より応用が広くなるように，行ベクトル $(a\ b\ c)$ を導入して，列ベクトルとの積を

$$(a\ b\ c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

のように定めます．すると，$f(\boldsymbol{x}) = x + y - z$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = (1\ 1\ \ -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z$$

と表され，‘ f は行ベクトル $(1\ 1\ \ -1)$ で表現された ’ と考えられますね.

5.2.5.2　3 元連立 1 次方程式と線形写像

3 元連立 1 次方程式，例えば,

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

をベクトル方程式

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として表すと，左辺のベクトルは写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{x}) = f((x, y, z)^T) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

の場合であると解釈できます.

この写像が線形写像であることは，$\boldsymbol{y} = (u, v, w)^T$ とすると,

$$\begin{aligned} f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) &= f((\lambda x + \mu u, \lambda y + \mu v, \lambda z + \mu w)^T) \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu u) + (\lambda y + \mu v) - (\lambda z + \mu w) \\ (\lambda x + \mu u) - (\lambda y + \mu v) - (\lambda z + \mu w) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u + v - w \\ u - v - w \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立つことからわかります．線形写像となる理由は，君たちも読めていると思いますが，上の写像がベクトルを ‘ 同次 1 次式を成分とするベクトル ’ に移す写像だからですね.

非同次方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の特解 $\boldsymbol{x}_0$ は $(1, 0, 0)^T$ でよいでしょう．その同次方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の一般解 $\boldsymbol{u}$ は，$x + y - z = 0$，$x - y - z = 0$ だから，$\boldsymbol{u} = (s, 0, s)^T$ となり，したがって，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一般解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されます．これは 3 次元空間の直線であり，その全体集合が $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解空間です．この解空間は 1 次元で，その基底（基本解）は $(1, 0, 1)^T$ ですね．

なお，一般の同次線形方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ については，その解空間 $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ はベクトル空間であり，その基底は方程式の線形独立な解からなります．このとき，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解空間は線形写像 f の「核」（カーネル）といわれます．

さて，この線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y-z \end{pmatrix}$ をうまく表現することを考えましょう．右辺を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ との積の形に表せたら成功です．実際，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}$$

のように，積を定義する形で 2 行 3 列の **行列** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ を導入できます（上式と同類の積表現を，1855 年の論文で，ケーリー（Arthur Cayley，1821〜1895，イギリス）がすでに用いています）．すると，

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

のように表すことができ，線形写像 f は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ によって表現されます．その表現を

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

と書き，この行列を線形写像 f の **表現行列** といいます．

以上の例からわかるように，連立 1 次方程式が n 元で，m 個の方程式からなるときは線形写像を表現する m 行 n 列の行列を定義することができ，行列の一般的理論を展開することができます．それを行うのが第 6 章であり，そこでは行列を用いて線形写像（特に，同じ集合に写像する 線形変換）に関する多くの知識を学びます．