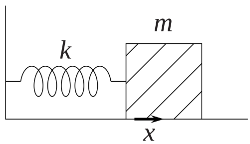
# §7.3　線形微分方程式と固有値

線形微分方程式を連立方程式にして解きます．したがって，行列の対角化に伴う固有値が現れます．始めに，バネで結んだ重りの運動を考えます（摩擦がある場合とない場合）．次に，それと形式的に同型の電気回路（*LCR* 回路）を扱います．このとき，オイラーの公式（☞§§2.4.3）で有名な純虚数指数の指数関数 $e^{ix}$ が現れます．この指数関数は大学数学では非常に重要なので，かなり丁寧な説明を加えます．これらの話題では，強制振動を付加すると「共振」という現象が起こる場合があります．共振は，*LC* 回路で起これば，AM ラジオの選局（同調）に応用され，また，バネ振動で起これば，地震の破壊メカニズムの解明に役立ちます．最後に，固有値が重解になるときに共振が起こるようなバネ振動の地震モデルを議論します．

## 7.3.1　バネ振動

### 7.3.1.1　摩擦がないときのバネ振動




バネが伸縮する振動運動の様子を調べることから始めましょう．バネは，自然の長さ（自然長）から伸ばしたり縮めたりすると元の自然長に戻ろうとする力が働き，その力の大きさは，伸縮が小さいとき，その伸び・縮みの長さに比例することが知られています（フックの法則）．今，壁のある平らで摩擦のない床面に質量 $m$ の重りをおき，バネは重りと壁に結ばれているとしましょう．バネが自然長になっているときの重りの位置を基準に考え，基準の位置からの重りの変位を $x$ としましょう．バネが伸びているとき $x > 0$，縮んでいるとき $x < 0$ です．このとき，重りに働くバネの力 $F_{\text{バネ}}$ は，$x > 0$ のとき縮む力，$x < 0$ のとき伸びる力で

$$F_{\text{バネ}} = -kx \qquad (k > 0)$$

と表され，比例定数 $k$ は「バネ定数」といいバネの強さを表します．

さて，ニュートンの運動方程式（☞§§5.3.1.1）は，今の場合，力が一方向に働くバネなので，$x = x(t)$ として

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \iff \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \qquad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

となります．$\omega_0$ は，運動方程式を解いたとき，振動の角振動数（☞§§1.4.4.3）になります．この微分方程式を解く[2] わけですが，きっちりしたやり方は『$+\alpha$』の §§14.9.3.1 を見てもらうことにして，ここでは §§5.3.2.1 の処方で行いましょう．2 回微分して自分と反対符号になる関数：$x''(t) = -x(t)$ は 3 角関数のみであることが知られています：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sin t = \cos t \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\sin t = -\sin t, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\cos t = -\sin t \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\cos t = -\cos t. \end{cases}$$

また，合成関数の微分公式（☞『$+\alpha$』の §§12.5.1）

$$y = g(t) \text{ のとき} \quad \frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dt} \quad \left(\overset{\text{意味}}{=} \frac{df(g(t))}{dg(t)}\frac{dg(t)}{dt}\right)$$

より，

$$\frac{d\sin(\omega_0 t + \delta)}{dt} = \omega_0\cos(\omega_0 t + \delta), \quad \frac{d\cos(\omega_0 t + \delta)}{dt} = -\omega_0\sin(\omega_0 t + \delta)$$

が得られます．したがって，$x''(t) = -\omega_0^2 x(t)$ を満たす一般解は，2 回積分するから 2 個の積分定数（任意定数）を含み，$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \delta)$ とか，あるいは加法定理を用いて

$$x(t) = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t$$

と表されます．任意定数 $A$, $\delta$ または $a$, $b$ は（始めの位置 $x(0)$ や初速度 $x'(0)$ などを定める）初期条件によって決まります．例えば，$x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ とすると，$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t$ ですね．

---

[2] 変数 $x$ の未知関数 $y = y(x)$ とその導関数 $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ の 1 次の項からなる定数係数の微分方程式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

を $n$ 階の **定数係数線形微分方程式** といいます．定数項 $b$ がないときはその同次形といいます．この微分方程式は $n$ 個の任意定数（積分定数）を含む解をもち，それを **一般解** といいます．一般解の任意定数に特定の値を代入して得られる個々の解を **特解**（**特殊解**）といいます．我々のものは，未知の変位 $x(t)$（$t$ は時刻）に対する 2 階の定数係数同次線形微分方程式です．

### 7.3.1.2　摩擦があるときのバネ振動

重りと床面との間には，実際には，摩擦があります．実験によると，摩擦は重りの速度 $v(t) = x'(t)$ に比例し反対向きなので，摩擦力 $F_{摩擦}$ は

$$F_{摩擦} = -bv \quad (b > 0)$$

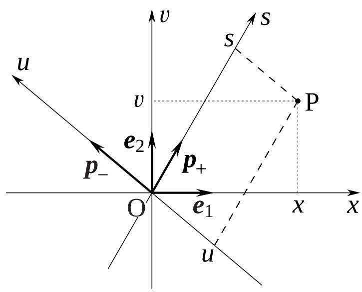
の形で表すことができます．したがって，重りに働く力全体は $F_{バネ} + F_{摩擦}$ であり，ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv \iff \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\mu v \qquad \left(2\mu = \frac{b}{m}\right)$$

と表されます（ここでは $\mu$ を減衰係数といいましょう）．我々はこの微分方程式を解くのに，$\frac{dx}{dt} = v$，$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ であることを用いて連立方程式の形になおし，対角化の方法を利用しましょう：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = v \\ \dfrac{d}{dt}v = -\omega_0^2 x - 2\mu v \end{cases} \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

以下，定数行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，$A$ を対角化するわけですが，ベクトル $\binom{x}{v}$ が絡んでくるので，対角化は $\binom{x}{v}$ の基底を変換するという意味をもちます．そこで，復習を兼ねて，基底の変換から入りましょう．




$\binom{x}{v}$ の基底は $\binom{x}{v} = x\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2$ より標準基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ ですね．よって，$\binom{x}{v}$ が位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2$$

です．このとき，標準基底から基底 $\boldsymbol{p}_+ = P\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{p}_- = P\boldsymbol{e}_2$ へ変換する，つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\boldsymbol{p}_+ + u\,\boldsymbol{p}_- = sP\boldsymbol{e}_1 + uP\boldsymbol{e}_2 = sP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + uP\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

のように表すとき

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

です．変換行列 $P$ は

$$(\boldsymbol{p}_+ \ \ \boldsymbol{p}_-) = (P\boldsymbol{e}_1 \ \ P\boldsymbol{e}_2) = P(\boldsymbol{e}_1 \ \ \boldsymbol{e}_2) = PI = P, \qquad \text{よって} \qquad P = (\boldsymbol{p}_+ \ \ \boldsymbol{p}_-)$$

となり，基底を並べた行列になります．基底 $\boldsymbol{p}_+$，$\boldsymbol{p}_-$ は，いうまでもなく，$A$ の固有ベクトル $A\boldsymbol{p}_+ = \lambda_+\boldsymbol{p}_+$，$A\boldsymbol{p}_- = \lambda_-\boldsymbol{p}_-$ にとります．ここで，$\lambda_\pm$ は固有値方程式 $A\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$ $(\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0})$ から得られる特性方程式 $|A - \lambda I| = 0$ の解です．

さて，特性方程式を解き，固有ベクトルを求めましょう．

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

より，固有値は

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \ \ (= \lambda_\pm \text{ とおく})$$

と定まります．したがって，固有値 $\lambda_\pm$ の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_\pm = \binom{p}{q} \neq \boldsymbol{0}$ は固有値方程式

$$(A - \lambda_\pm I)\boldsymbol{p}_\pm = \begin{pmatrix} -\lambda_\pm & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu - \lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \iff -\lambda_\pm p + q = 0$$

より，$\boldsymbol{p}_\pm = \binom{p}{q} \propto \binom{1}{\lambda_\pm}$，したがって，

$$P = (\boldsymbol{p}_+ \ \ \boldsymbol{p}_-) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

が成り立ちます．

対角化すると微分方程式が簡単に解けることは，基底の変換式 $\binom{x}{v} = P\binom{s}{u}$ からわかります．$P$ は定数行列で，$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} as + bu \\ cs + du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as'(t) + bu'(t) \\ cs'(t) + du'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}P\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = P\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

が成り立つので，$\binom{x}{v} = P\binom{s}{u}$ より

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \iff P\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$
$$\iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ s \\ \lambda_- u \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{d}{dt}s = \lambda_+ s \\ \dfrac{d}{dt}u = \lambda_- u. \end{cases}$$

上の議論から，対角化して得られる座標 $s, u$ の微分方程式は個々の変数に分離され，また各々は‘ 微分すると自分に比例 ’しますね．そんな関数は指数関数だけであることが知られています．自然対数の底 $e$（☞§§2.4.3）を用いると，

$$\frac{d}{dt}a^t = a^t \log_e a, \qquad \frac{d}{dt}e^t = e^t, \qquad \frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

です．指数の底 $a$ は，底の変換公式 $a = e^{\log_e a}$ によって，$e$ にできるので，今後は底は $e$ としましょう．したがって，$s'(t) = \lambda_+ s(t)$，$u'(t) = \lambda_- u(t)$ の解は

$$s(t) = a e^{\lambda_+ t}, \qquad u(t) = b e^{\lambda_- t} \quad (a, b \text{ は任意定数})$$

と表されます．

ここでちょっと脱線して，特性方程式 $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$ と元の微分方程式を 2 階の定数係数微分方程式として表したもの

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

の関係を見てみましょう．この微分方程式が指数関数形の特解 $x = e^{\lambda t}$ をもつと仮定して代入してみると，

$$\frac{d^2e^{\lambda t}}{dt^2} + 2\mu\frac{de^{\lambda t}}{dt} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

となって，特性方程式が得られ，$\lambda = \lambda_\pm$ のとき解になります．通常は，このような議論を経て，定数係数微分方程式の一般解が得られます．定数係数線形微分方程式の場合に得られた $\lambda$ の方程式も「特性方程式」と呼ばれます．両方の

特性方程式が一致したのは，$v = \frac{dx}{dt}$ とおいて，$x, v$ に対する 1 階の定数係数連立微分方程式に変換したためです[3)]．

さて，固有値で表された解に戻りましょう．今までの結果を代入して

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^{\lambda_+ t} \\ be^{\lambda_- t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t} \\ a\lambda_+ e^{\lambda_+ t} + b\lambda_- e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

が得られます．これが一般解です．この解は，記号 $\exp x = e^x$ を用いると

$$e^{\lambda_\pm t} = \exp\left(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\right)t$$

ですから，バネの重りの変位 $x(t) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t}$ をみると，重りは摩擦によって, 振動せずに減衰することを表しています．それは $\mu - \omega_0 > 0$ の場合, つまり摩擦がとても大きい場合です．そこが問題です．摩擦が小さくて $\mu - \omega_0 < 0$ の場合の解は表せないのでしょうか．その場合，形式的には $(0 >)\,\mu^2 - \omega_0^2 = -\omega^2$ とおいて，オイラーの公式（☞§§2.4.3）を用いると，

$$e^{\lambda_\pm t} = e^{(-\mu \pm i\omega)t} = e^{-\mu t}e^{\pm i\omega t} \qquad \left(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\right)$$
$$= e^{-\mu t}(\cos\omega t \pm i\sin\omega t)$$

と表されます．このとき，重りの変位は

$$x(t) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t}$$
$$= e^{-\mu t}\{(a+b)\cos\omega t + i(a-b)\sin\omega t\}$$

となって，この解は振動しながら減衰します．ただし，虚数部分があります．

---

3) 微分記号 $\frac{d}{dt}$ を微分演算子（☞§§5.3.2.2）と見なすと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \tfrac{d}{dt}I)\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu - \frac{d}{dt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成り立ちます．ここで，特解 $x = e^{\lambda t}$ を代入すると，

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成り立ち，$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ より行列式の特性方程式が得られます．一般の $y = y(x)$ の $n$ 階の定数係数同次線形微分方程式においても，$y_k = y^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ とおくと，元の微分方程式を $y, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ についての 1 階の $n$ 連立定数係数同次線形微分方程式に直すことができます．これをベクトル方程式にして，上のような変形を行い，特解 $y = e^{\lambda x}$ を代入すると，行列の特性方程式と元の $n$ 階の微分方程式の特性方程式が一致します．

心配にはおよびません．ここで，$x(0) = x_0$，$v(0) = x'(0) = 0$ などの初期条件（他の初期条件でも構いません）を課して，任意定数 $a, b$ を定めてみましょう．$v(0) = a\lambda_+ + b\lambda_-$，$\lambda_\pm = -\mu \pm i\omega$ より

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = a + b \\ v(0) = 0 = -\mu(a+b) + i\omega(a-b) \end{cases}$$

のような条件がつき，それを解いて

$$a = \frac{x_0}{2} - i\frac{\mu x_0}{2\omega}, \quad b = \frac{x_0}{2} + i\frac{\mu x_0}{2\omega}$$

のように定まります．つまり，解に虚数が現れたときは，躊躇（ちゅうちょ）なく，任意定数（積分定数）を複素数に拡張すればよいわけです（微分・積分では，虚数単位 $i$ は単なる定数扱いなので，実数と複素数の区別はありません）．ここに，実数を複素数に拡張したとき，そのご褒美として，**物事を統一的に扱う**ことが許された数学の真髄が現れていると考えましょう．以上の議論から，最終的に，初期条件 $x(0) = x_0$，$v(0) = 0$ を満たす実数解

$$x(t) = x_0 e^{-\mu t}\{\cos\omega t + \frac{\mu}{\omega}\sin\omega t\}$$

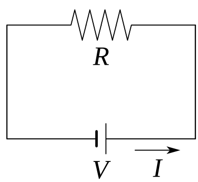
が得られます．初期条件が正しく満たされていることを確認しよう．

## 7.3.2　電気回路

バネの振動問題と同等な微分方程式になる電気回路問題を議論しましょう．電池や交流電源が非同次項として現れます．

### 7.3.2.1　*LCR* 回路

電気回路を考えましょう．回路についての「キルヒホッフの第 2 法則」を正しく理解するために，「電位」の話から始めます．“ 水は高きから低きに流れる ” わけですが，‘ 高き ’ とは重力の位置エネルギーが高い所という意味です．電流もやはり高きから低きに流れますが，その高さは電気的位置エネルギー，つまり，電位で表されます．起電力 $V$ の電池は電位を $V$ だけ高くし，それに抵抗 $R$ の豆電球をつけて回路にする

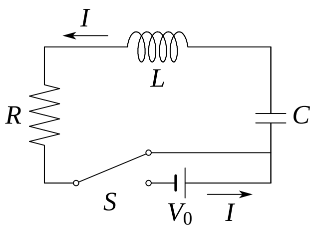


と，豆電球には $V$ の大きさの電圧（＝電位差）がかかり，$I = V/R$ の電流が流れて豆電球が点灯し，その結果電位が $V = RI$ だけ下がります．つまり，電池の－極での電位を仮に 0 とすると，電池の＋極では電位は $V$ に上がり，豆電球を過ぎるとまた電位は 0 に下がります．このように，‘回路を一周したあとは電位が元の電位に戻り，電位の変化は一周すると結局 0 になります’．これがキルヒホッフの第 2 法則です．式で表すと，上の豆電球回路については

$$V - RI = 0$$

となります．電圧（電位差）は，電位の変化量の大きさで定義されているので，正の量であることに注意しましょう．

プラスの電気とマイナスの電気は引き合うのを利用して，2 枚の電極版を向かい合わせにした構造の「コンデンサー」という部品があります．コンデンサーに溜まる電荷 $Q$ は加えられた電圧 $V$ に比例し，比例定数を $C$ とすると，$Q = CV$ です．$C$ が大きいほど電気は多く蓄えられるので，$C$ を「静電容量」といい，コンデンサーを表す記号に使われます．式 $Q = CV$ は，容量が $C$ のコンデンサーに電荷が $Q$ だけ蓄えられたとき，コンデンサーに加えられた電圧は $V = Q/C$ であることも表します．




また，導線をぐるぐると螺旋状に巻いたコイルには面白い性質があります．コイルに流れる電流 $I$ が変化すると，コイルはその変化に逆らうような（正・負の）起電力 $V$ を生じさせるのです．それを式で表すと，電流 $I$ の変化は時間的変化率 $\frac{dI}{dt}$ で表され，比例定数の大きさを $L$ とすると，$V = -L\frac{dI}{dt}$ のようになります．したがって，電流 $I$ が増加（減少）するとコイルの起電力は負（正）となって，電流が変化しないように起電力が働きます．起電力の大きさに比例する定数 $L$ は「インダクタンス」といわれます．

右上図のような，コイル $L$・抵抗 $R$・コンデンサー $C$ が直列でつながっている回路を $LCR$ 回路といいます．はじめスイッチ $S$ が起電力 $V_0$ の電池につながっていたとして，キルヒホッフの第 2 法則を考えましょう．電位は，電池の－極では 0 として，＋極では $V_0$，コンデンサー $C$ によって $Q/C$ だけ下がり，コイル $L$ によって $-L\frac{dI}{dt}$ だけ変化し，抵抗で $RI$ だけ下がって電池の－極

まで一周し，0 に戻ります．したがって，電位の変化量は 0：

$$V_0 - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0.$$

ここで，スイッチ $S$ を電池から図のように切り換え，電流 $I$ は電荷 $Q$ の時間的変化率であること：$I = \frac{dQ}{dt}$（電荷の微小変化量 $= \Delta Q = I\Delta t =$ 微少電流量の両辺を $\Delta t$ で割り，極限をとる）を用いると，$Q$ についての 2 階の定数係数同次線形微分方程式

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

が得られます．両辺を $L$ で割り，$2\mu = R/L$，$\omega_0^2 = 1/LC$ とおくと

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\mu\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$$

となり，これは前の §§7.3.1.2 のバネの変位 $x$ の微分方程式に一致します．よって，解き方も同じで，$\mu < \omega_0$ のとき，初期条件 $Q(0) = Q_0$，$I(0) = 0$ のもとで解くのを宿題にしましょう．

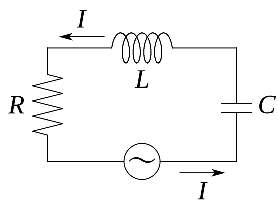
答：記号を変えれば，答はすでに 344 ページに載っています．$x$ を $Q$ に書き換えて，

$$Q(t) = Q_0 e^{-\mu t}\{\cos\omega t + \frac{\mu}{\omega}\sin\omega t\}$$

$$\text{ただし}\quad \mu = \frac{R}{2L},\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{R^2}{4}}.$$

### 7.3.2.2　*LC* 回路と共振

我々は，次に（ちょっと脱線して）交流電源付きの $LCR$ 回路を議論しましょう．複素数を用いた取り扱いが便利です．右図の $LCR$ 回路で，交流電源が $V_0\cos\omega_{交}t$ の電位変化を与えるとき，キルヒホッフの第 2 法則は




$$V_0\cos\omega_{交}t - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{d^2Q}{dt^2} + 2\mu\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = v_0\cos\omega_{交}t$$

$$\text{ただし}\quad 2\mu = R/L,\ \omega_0^2 = 1/LC,\ v_0 = V_0/L$$

と表されます．これは $Q = Q(t)$ についての 2 階の定数係数非同次線形微分方程式ですね．この非同次形線形方程式の一般解は，§§5.2.4 で議論したように，非同次形の 1 つの特解に同次形の一般解を加えたものになります（非同次形の解が $Q_1$，$Q_2$ と 2 通りに表されて，それらは特解が異なるとします．$Q_1$，$Q_2$ の満たす微分方程式を書き下し，それらの差をとると非同次項は消えます．したがって，$Q_1$ と $Q_2$ の違いは同次形の解の違いだけなので，同次形の一般解を $Q_1$，$Q_2$ に付け加えると両者は共に非同次形の一般解になります）．

同次形の一般解は前の §§ の議論で得られています:

$$Q_{\text{同}}(t) = a\,e^{\lambda_+ t} + b\,e^{\lambda_- t} \qquad (\lambda_\pm = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}).$$

よって，非同次形の特解を探しましょう．時間がたつと，$Q(t)$ は交流電源の角振動数 $\omega_{\text{交}}$ で振動することが期待されるので，特解は

$$Q_{\text{特}}(t) = a_1 \cos \omega_{\text{交}} t + b_1 \sin \omega_{\text{交}} t$$

の形と推測して，微分方程式に代入します．定数 $a_1$，$b_1$ が定まれば特解です．元の形の

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega_{\text{交}} t$$

に代入して，$a_1$，$b_1$ を定めるのは演習問題とします．計算力が必要かな．

特解を求める簡単な方法はないでしょうか．あります．$Q(t)$ を複素数 $Q_{\text{複}}(t)$ に拡張するのです：$Q_{\text{複}}(t) = Q(t) + iQ_{\text{虚}}(t)$．実部 $Q(t)$ は元の方程式を，$iQ_{\text{虚}}(t)$ は架空の方程式

$$L\frac{d^2 iQ_{\text{虚}}(t)}{dt^2} + R\frac{diQ_{\text{虚}}(t)}{dt} + \frac{iQ_{\text{虚}}(t)}{C} = V_0\, i \sin \omega_{\text{交}} t$$

を満たすとすると，$Q_{\text{複}}(t)$ は

$$L\frac{d^2 Q_{\text{複}}(t)}{dt^2} + R\frac{dQ_{\text{複}}(t)}{dt} + \frac{Q_{\text{複}}(t)}{C} = V_0 e^{i\omega_{\text{交}} t}$$

を満たしますね．この方程式の実部が $Q(t)$ です：$Q(t) = \mathrm{Re}\, Q_{\text{複}}(t)$．$Q_{\text{複}}(t)$ の特解を

$$Q_{\text{複}}(t) = c e^{i\omega_{\text{交}} t}$$

とできるのが自慢です．実際，微分方程式に代入すると，

$$\Big(-L\omega_{交}^2 + iR\omega_{交} + \frac{1}{C}\Big)ce^{i\omega_{交}t} = V_0 e^{i\omega_{交}t} \Leftrightarrow \ c = \frac{V_0}{-L\omega_{交}^2 + iR\omega_{交} + \frac{1}{C}}$$

と $c$ が定まり，よって，

$$Q_{複}(t) = ce^{i\omega_{交}t} = \frac{V_0 e^{i\omega_{交}t}}{-L\omega_{交}^2 + iR\omega_{交} + \frac{1}{C}}$$

となります．この式の実部をとると $Q(t)$ の特解 $Q_{特}(t)$ が得られますが，我々はそれを電流 $I = \frac{dQ}{dt}$ で行いましょう．

$$\begin{aligned} I_{複}(t) &= \frac{i\omega_{交}V_0 e^{i\omega_{交}t}}{-L\omega_{交}^2 + iR + \frac{1}{C}} = \frac{V_0 e^{i\omega_{交}t}}{R + i\Big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\Big)} \\ &= \frac{V_0\Big(R - i\big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\big)\Big)}{R^2 + \Big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\Big)^2}(\cos\omega_{交}t + i\sin\omega_{交}t) \end{aligned}$$

の実部をとって，

$$I_{特}(t) = \frac{V_0}{R^2 + \Big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\Big)^2}\Big(R\cos\omega_{交}t + \big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\big)\sin\omega_{交}t\Big)$$

が得られます．ここで，

$$Z = R + i\Big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\Big), \quad \text{よって} \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \Big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\Big)^2}$$

とすると，

$$R = |Z|\cos\phi, \qquad L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}} = |Z|\sin\phi$$

とおけるから（☞§§1.4.3 の 3 角関数の合成則），最終的に

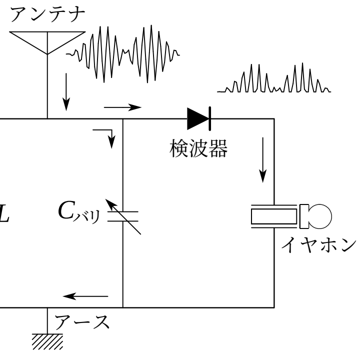
$$\begin{aligned} I_{特}(t) &= \frac{V_0|Z|}{R^2 + \Big(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\Big)^2}(\cos\phi\cos\omega_{交}t + \sin\phi\sin\omega_{交}t) \\ &= \frac{V_0}{|Z|}\cos(\omega_{交}t - \phi) \end{aligned}$$

のように表されます．$|Z|$ は「インピーダンス」，$Z$ は「複素インピーダンス」といわれ，交流回路理論において重要な役割を果たします．

さて, 興味ある話題に移りましょう．それはAMラジオの受信の仕組みです．交流電源の $LCR$ 回路を議論してきて, 交流の角振動数 $\omega_{交}$ に依存する電流 $I_{特}(t)$ が微分方程式の特解として得られました．$I_{特}(t)$ は $|Z| = \left|R + i(L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}})\right|$ に反比例しています．特に，抵抗 $R$ が無視できるほど小さい $LC$ 回路では

$$I_{特}(t) = \frac{V_0}{\left|L\omega_{交} - \frac{1}{C\omega_{交}}\right|}\cos(\omega_{交}t - \phi)$$

となります．このとき，もし $L\omega_{交} = \frac{1}{C\omega_{交}} \Leftrightarrow LC\omega_{交}^2 = 1$ ならば，$|I_{特}(t)|$ はきわめて大きくなりますね．このような現象は $LC$ 回路の **共振**（**同調**）といわれます．この共振は‘子供の乗っているブランコをタイミングよく押して，最終的に大きく振らすのと同じ’ものです．




この $LC$ 回路共振の原理が知られたのは，まもなく20世紀になる，1898年のことでした．1906年にはもうAM放送が始まりました．AM放送の仕組みは§§1.4.4.3で議論しました．そこで述べられていた鉱石ラジオの受信同調回路をここでとりあげましょう．

右図のような $LC$ 回路にアンテナをつけます．アンテナには各局からの変調波 $v_{変}(t) = (V_{送} + v_{音}(t))\cos\omega_{送}t$ が受信され（☞§§1.4.4.3），これが微弱な交流電源になります．一方，コンデンサーは，ダイアル（回転式のつまみ）で静電容量 $C_{バリ}$ が可変な，いわゆるバリコン (variable condenser) にしてあります．このとき，共振の条件は $LC_{バリ}\,\omega_{送}^2 = 1$ ですね．$L$ を適当に固定すると，$C_{バリ}$ をうまく調節して，角周波数

$$\omega_{送} = \frac{1}{\sqrt{LC_{バリ}}}$$

に共振します．したがって，受信 $LC$ 回路はその搬送波を送信した放送局に対応する変調波 $v_{変}$ だけを増幅します．これが選局です．増幅された電流は鉱石を利用した検波器で整流されてイヤホンに導かれ，圧電効果を利用して音信号に戻されます．不要な高周波はアースで流します．