2.4.3　オイラーの公式

複素数の極形式に現れた 3 角関数の複素式 $\cos\theta + i\sin\theta$ について，スイス生まれの天才数学者オイラー（Leonhard Euler，1707〜1783）は，1748 年の著書の中で，その式は θ の値に依らずに純虚数指数の指数関数 $e^{i\theta}$ に一致することを示しました（$e = 2.7182818\cdots$ は少し後で解説する重要な超越数）：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

この神秘的な恒等式は今では **オイラーの公式** と呼ばれ，特に $\theta = \pi$ のときは，しばしば数学における最も美しい定理と称される，**オイラーの等式** $e^{i\pi} = -1$ に導きます．

彼は，この公式の証明に関数の無限級数表示である「テイラー展開」を用い，3 角関数の展開と指数関数のそれを比較する方法で示しています（☞『$+\alpha$』の §13.4）．この方法は，厳密だが無限個の関数を扱うという，初心者にはいささか敷居が高いものです．そこで，我々は，高校レベルの微積分や指数法則の知識を用いる方法を模索し，実数 x の関数 $f(x) = \cos x + i\sin x$ が指数関数 e^{ix} と認定できるかどうかを探りましょう．この議論は複素指数関数 e^z を理解するための最初のステップになります．

我々は，実数領域で微分可能な実数関数について，以下の微分公式などを利用します：

関数の商の導関数の公式：$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,

合成関数の導関数の公式の一種：$\dfrac{d}{dx}f(ax) = a\dfrac{d\,f(ax)}{d(ax)} = a\,f'(ax)$,

3 角関数の導関数の公式：$\{\cos x\}' = -\sin x, \quad \{\sin x\}' = \cos x.$

導関数の等式 $f'(x) = g(x)$ は全ての x について成り立つ恒等式であることに注意します．したがって，$f'(x) = 0$ は $f(x) = C$（定数）を意味します．

さて，指数関数 a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$ はその導関数が自分に比例するという特徴：

$$\{a^x\}' = a^x \log_e a$$

があります．ここで，$e = 2.7182818\cdots$ は **自然対数の底** と呼ばれる重要な定数です．指数の底 a が e に等しいときは導関数が自分自身に等しいという著し

い特徴：

$$\{e^x\}' = e^x$$

があります．以上のことを踏まえて問題に当たりましょう．

さて，指数関数 e^{ax}（a は定数）の導関数は $\{e^{ax}\}' = \dfrac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$ に注意しておいて，関数

$$f(x) = \cos x + i\sin x$$

を考えましょう．その導関数は

$$f'(x) = -\sin x + i\cos x = i(\cos x + i\sin x) = if(x)$$

だから

$$f'(x) = if(x) \quad \text{つまり} \quad \{\cos x + i\sin x\}' = i(\cos x + i\sin x)$$

です．ここで，$\{e^{ax}\}' = ae^{ax}$ で形式的に $a = i$ とおいた虚数指数関数の導関数

$$\{e^{ix}\}' = ie^{ix}$$

を認めたとして，両者を比較してみましょう．$\cos x + i\sin x$ と e^{ix} の導関数はそれぞれ自分自身の i 倍であり，かつ $x = 0$ のときは共に 1 になるから，両者は一致する― $\cos x + i\sin x = e^{ix}$ ―ということになります．つまり，$\cos x + i\sin x$ は純虚数の指数をもつ指数関数であることを意味します．念のために，

$$F(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$$

とおいて確かめましょう．$F'(x) = 0$ はすぐ導かれて，$F(x) = C$．また $F(0) = 1$ だから，$F(x) = 1$．よって，再び $\cos x + i\sin x = e^{ix}$ が得られます．

しかしながら，$\cos x + i\sin x$ は e^{ix} である（指数関数と区別がつかない）と断定するにはまだまだ疑いが残るでしょう．そこで，我々はさらに慎重に議論しましょう．指数関数は指数法則を満たします．したがって，実数の場合の指数法則

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

を拡張し，底が e で純虚数指数の指数関数が満たすと期待される指数法則を考えてみましょう．実数指数の場合と比較すると，形式的には

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}, \qquad (e^{ix})^y = e^{ixy}, \qquad (e^{ic}e^{id})^x = e^{icx}e^{idx} \quad (c,\ d \text{ は実数})$$

です．これに対応するものを $f(x)$ で表すと，

$$f(x)f(y) = f(x+y), \quad f(x)^y = f(xy), \quad \{f(c)f(d)\}^x = f(cx)f(dx)$$

が‘期待される’指数法則です．これらの条件を精査し，$f(x) = \cos x + i\sin x$ が e^{ix} と同一視できるかどうかを調べましょう．

まず，第 1 の指数法則 $f(x)f(y) = f(x+y)$ は

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

ですが，これは加法定理より容易に示されます．

次に，$f(x)^y = f(xy)$ です．注意すべきことは，複素数の累乗（複素数)$^{\text{指数}}$ は，その定義が実数の累乗（実数)$^{\text{指数}}$ のものと異なるために，指数が整数でないときは（多くの値をもつ）多価になることです．我々は累乗が関係する指数法則を少しばかり修正して実数の場合の指数法則を一般化し，複素数の場合でも指数法則が成り立つようにしましょう．

$f(x)^y$ が累乗根の場合 $(y = 1/n)$ について解説すれば事情がわかります．実数の累乗根 $a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$ は 1 つの正数 $\sqrt[n]{a}$ を意味します．しかしながら，複素数の累乗根 $z^{\frac{1}{n}}$（$= w$ とおく）は n 次方程式 $w^n = z$ の解と定義され，異なる解が n 個現れます．実際，$z^{\frac{1}{n}}$ は，極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r = |z|, \theta = \arg z)$ および 1 の n 乗根 $1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ を用いると，

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\cdot 1^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

と表されます（n 乗して確かめよう）．このように，累乗根 $z^{\frac{1}{n}}$ では余分な偏角 $\dfrac{2k\pi}{n}$ が現れます．同様に，有理数乗 $z^{\frac{m}{n}}$ では付加的偏角 $2k\pi\dfrac{m}{n}$ が現れ，また，一般の実数乗 z^a では，a を有理数列 $\{a_n\}$ の極限と考えると（☞『$+\alpha$』の §§6.1.1.3），偏角 $2k\pi a$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ が現れます．

我々は，指数法則に現れる累乗は付加的偏角が付かない‘準実数的累乗’$\lfloor z^a \rfloor$（a は実数）：

$$\lfloor z^a \rfloor = r^a(\cos a\theta + i\sin a\theta) \qquad (r^a = |z^a|)$$

と定めましょう．すると，

$$\lfloor f(x)^y \rfloor = \lfloor(\cos x + i\sin x)^y\rfloor = \cos xy + i\sin xy = f(xy)$$

となって，$\lfloor f(x)^y \rfloor = f(xy)$ が成り立ちます．同様に，第 1 の指数法則に注意すると，$\lfloor \{f(c)f(d)\}^x \rfloor = f(cx)f(dx)$ も成り立ちます．

以上の議論から，$\cos x + i\sin x$ は‘準実数的指数法則’：

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}, \quad \lfloor (e^{ix})^y \rfloor = e^{ixy}, \quad \lfloor (e^{ic}e^{id})^x \rfloor = e^{icx}e^{idx}$$

を満たす指数関数 e^{ix} と同一視できるでしょう：$\cos x + i\sin x = e^{ix}$.

Q1．複素数 $z = x + iy$ に対して，関数 $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ を考えます．このとき，e^z は，z, w を複素数，a を実数として，指数法則

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad \lfloor (e^z)^a \rfloor = e^{az}, \quad \lfloor (e^z e^w)^a \rfloor = e^{az}e^{aw}$$

を満たすことを示しなさい．e^z を複素指数関数といいます．

Q2．$e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi = 1$（$n$ は整数）に注意して，複素指数関数の逆関数として複素対数関数を定義しましょう：

$$w = \log z \iff z = e^w \qquad （対数の底は\ e）.$$

z の極形式を $z = re^{i\theta}$ とするとき，$w = \log z$ を r, θ で表しなさい．
ヒント：$w = u + iv$（u, v は実数）とおいて $z = e^w$ の両辺を比較します．

A1．$w = u + iv$（u, v は実数）とすると，

$$e^z e^w = e^x e^{iy} e^u e^{iv} = e^{x+u} e^{i(y+v)} = e^{x+u+i(y+v)} = e^{z+w}.$$

よって，$e^z e^w = e^{z+w}$．また，

$$\lfloor (e^z)^a \rfloor = \lfloor (e^x e^{iy})^a \rfloor = e^{ax}e^{iay} = e^{a(x+iy)} = e^{az}.$$

よって，$\lfloor (e^z)^a \rfloor = e^{az}$．同様にして，$\lfloor (e^z e^w)^a \rfloor = e^{az}e^{aw}$ も成り立ちますね．

A2．

$$e^w = z \iff e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\theta} \iff e^u = r, \quad e^{iv} = e^{i\theta}.$$

したがって，$u = \log r$，および $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2n\pi)}$ に注意して，$v = \theta + 2n\pi$ が得られます（虚部は不定性が残ります）．したがって，

$$\log z = \log re^{i\theta} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

です．なお，このことを利用して，複素数の複素累乗関数は $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$（$\alpha$ は複素数）によって定義されます．