もう 1 題.

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

ヒント：数字の並び方に特徴がありますね．行または列の差を考えると, ・・・. 答は 0.

#### 6.3.3.3　高次行列の逆行列

$n$ 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

を考えます．次の列ベクトルや係数行列

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$$

を導入すると，上の方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}$$

のように表すことができます．以下，§§6.3.2 で行ったのと類似の方法で逆行列 $A^{-1}$ を求めます.

まず，$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}$ を利用して，行列式の方程式

$$\left| \boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{a}_k\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n \right| = \left| \boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n \right|$$

を考えます．直前の §§ で学んだ行列式の性質から,

$$\text{左辺} = x_j \left| \boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \boldsymbol{a}_j\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n \right| = x_j |A|$$

だから，$|A| \neq 0$ として，あっさりと，方程式の解

$$x_j = \frac{1}{|A|} \left| \boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \overset{j\,\text{列}}{\boldsymbol{b}}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n \right| \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

が得られます．これは **クラメルの公式** と呼ばれています.

次に，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ において，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ $(|A| \neq 0)$ とおくと，

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}\boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; x_j = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}_{jk}b_k \quad \left(\widetilde{A} = \left(\widetilde{A}_{ij}\right)\right)$$

が成り立ち，したがって，

$$(|A|x_j =)\ \sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}_{jk}b_k = \left|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \overset{j\text{ 列}}{\boldsymbol{b}}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\right|$$

が得られます．ここで，$n$ 次の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いると，

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\boldsymbol{e}_k$$

だから，

$$\left|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \overset{j\text{ 列}}{\boldsymbol{b}}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\right| = \sum_{k=1}^{n} b_k\left|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \overset{j\text{ 列}}{\boldsymbol{e}_k}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\right|$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}_{jk}b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k\left|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \overset{j\text{ 列}}{\boldsymbol{e}_k}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\right|$$

が得られます．ここで，$b_k$ は，$A^{-1}$ に無関係で，任意の値をとれるから，上式は各 $b_k$ について恒等式と見なせます．したがって，$k = i$ の場合を考えると，

$$\widetilde{A}_{ji} = \left|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \overset{j\text{ 列}}{\boldsymbol{e}_i}\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\right| (= A_{ij} \text{ とおく}) \qquad \text{【余因子】}$$

が成り立ちます．これは $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(\widetilde{A}_{ij}\right)$ が満たすべき条件（必要条件）です．$\widetilde{A} = \left(\widetilde{A}_{ij}\right)$ を $A$ の **余因子行列**，$A_{ij} = \widetilde{A}_{ji}$ を $A$ の $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **余因子** といいましょう．

さて，上で与えられた余因子（行列）を用いて，$A^{-1}A = I$ および $AA^{-1} = I$ が成り立つかどうかが問題です．まず，

$$A^{-1}A = I \Leftrightarrow \widetilde{A}A = |A|I \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = |A|\delta_{ij}$$

を確かめましょう．$A_{ki} = \left|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{i-1}\ \overset{i\text{ 列}}{\boldsymbol{e}_k}\ \boldsymbol{a}_{i+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\right|$，$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{a}_j$ だから，

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{array}{ccccccccc} & & & & i\text{ 列} & & & & \\ \Big| & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \Big| \end{array} = |A|\delta_{ij}$$

が確かに成り立ちますね（$i \neq j$ のとき，$i$ 列と $j$ 列が一致して消滅します）．

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}a_{kj} = A_{1j}a_{1j} + A_{2j}a_{2j} + \cdots + A_{nj}a_{nj}$$

を $|A|$ の第 $j$ 列についての「余因子展開」といいます．

次に，$AA^{-1} = I \Leftrightarrow A\widetilde{A} = |A|I \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = |A|\delta_{ij}$ を確かめましょう[8]．そのために，余因子

$$A_{jk} = \begin{array}{ccccccccc} & & & & k\text{ 列} & & & & \\ \Big| & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{a}_{k+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \Big| \end{array}$$

に‘お呪(まじな)い’をかけます．$k$ 列に $a_{jl}$ を掛け，各 $l$ 列 $(l \neq k)$ から引くと，$j$ 行は $k$ 列以外の成分が 0 になります．さらに，$j$ 行に $a_{mk}$ を掛け，各 $m$ 行 $(m \neq j)$ に加えると，$A_{jk}$ は $|A|$ で $j$ 行を $\boldsymbol{e}_k^T$ で置き換えたものになります：

$$A_{jk} = \begin{array}{c|ccccc|} & & & k\text{ 列} & & \\ & a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ j\text{ 行} & a_{j1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} & & k\text{ 列} & & \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} & & k\text{ 列} & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{array}.$$

ここで，簡略記号 $\boldsymbol{a}_i' = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$, $\boldsymbol{e}_k' = \boldsymbol{e}_k^T$，および，$|\cdots\ \cdots|^{\text{縦書}} = \left|\begin{matrix}\vdots \\ \vdots\end{matrix}\right|$ を用いると，

$$A_{jk} = \left|\boldsymbol{a}_1'\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}'\ \boldsymbol{e}_k'\ \boldsymbol{a}_{j+1}'\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n'\right|^{\text{縦書}}$$

のように表されます．このとき，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} &= \left|\boldsymbol{a}_1'\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}'\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{e}_k'\ \boldsymbol{a}_{j+1}'\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n'\right|^{\text{縦書}} \\ &= \left|\boldsymbol{a}_1'\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}'\ \boldsymbol{a}_i'\ \boldsymbol{a}_{j+1}'\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n'\right|^{\text{縦書}} \\ &= |A|\delta_{ij} \end{aligned}$$

---

8) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ は $A^{-1}A = I$ かつ $AA^{-1} = I$ を満たすものとして定義されましたが，$n$ 次の正則行列 $A$ については，定理：$A^{-1}A = I \Leftrightarrow AA^{-1} = I$ が成り立ち，したがって片方の条件で十分です．以下，前ページの【余因子】を用いた議論から，その定理が吟味されます．

が成り立ちます．したがって，$AA^{-1}=I$ も確かめられました（$\widetilde{A}A=|A|I \Leftrightarrow A\widetilde{A}=|A|I$ の確認に当たります）．したがって，$A$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在すれば，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=\frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^T \qquad (|A|\neq 0)$$

です．これも **クラメルの公式** と呼ばれます．なお，

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

を $|A|$ の第 $i$ 行についての「余因子展開」といいます．

　最後に，$n$ 次行列 $A$ の $(i,\ j)$ 余因子 $A_{ij}=\begin{array}{c} \scriptstyle j\text{ 列} \\ \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}\end{array}$ を，多くのテキストに載っているように，$n-1$ 次の行列式で表現しましょう．まず，$j$ 列を左隣の列と順次交換していき，$\boldsymbol{e}_i$ を第 1 列に移します：

$$A_{ij}=(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}.$$

このとき，$A_{ij}$ の行を詳しく書けば，

$$A_{ij}=(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}
0 & a_{11} & & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_{i-1\,1} & & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & & a_{i-1\,n} \\
1 & a_{i1} & & a_{i\,j-1} & a_{i\,j+1} & & a_{in} \\
0 & a_{i+1\,1} & & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & & a_{i+1\,n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_{n1} & & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

ですね．さらに，第 $i$ 行を，順次上の行と交換していって，第 1 行に移します：

$$A_{ij}=(-1)^{j-1}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix}
1 & a_{i1} & & a_{i\,j-1} & a_{i\,j+1} & & a_{in} \\
0 & a_{11} & & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_{i-1\,1} & & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & & a_{i-1\,n} \\
0 & a_{i+1\,1} & & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & & a_{i+1\,n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & a_{n1} & & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & & a_{nn}
\end{vmatrix}.$$

最後に，第 1 列についての余因子展開をすると，最終的に $A$ の $(i,\ j)$ 余因子は次のようになります：

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \left( = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ とおく} \right).$$

$A_{ij}$ で符号 $(-1)^{i+j}$ を除いた部分は，$|A|$ から第 $i$ 行と第 $j$ 列を除いた $n-1$ 次の行列式 $M_{ij}$ で，これを $|A|$ の $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **小行列式** といいます．

**Q**1．4 次の行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ の行列式 $|A|$ について，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ の項の符号を求めなさい．

ヒント：交差図 (☞§§6.3.3.1) を利用します．

**Q**2．次の行列式を因数分解しなさい．ヒント：君のお手並みを拝見しよう．

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$$

**Q**3．次の行列の逆行列をクラメルの公式に従って求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Q**4．$n$ 次行列 $A = \left(a_{ij}\right)$，$B = \left(b_{ij}\right)$ について，

$$|AB| = |A||B|$$

であることを，$n = 3$ の場合に，示しなさい．

ヒント：やや難．積 $AB$ を計算し，行列式の性質を駆使します．また，

$$\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1l} & a_{1m} \\ a_{2k} & a_{2l} & a_{2m} \\ a_{3k} & a_{3l} & a_{3m} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & (k,\ l,\ m \text{ のどれかが等しい}) \\ \varepsilon_{klm}|A| & (k,\ l,\ m \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の順列}). \end{cases}$$

例えば，$\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123} = -1$.

**A**1．交差数が 6 で，偶数だから符号は + ですね．