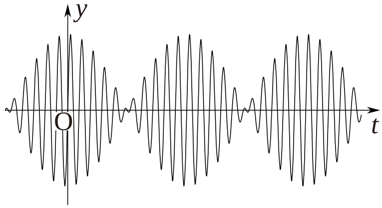
$y = \sin\omega t + \sin\omega' t$ のグラフを描いてその様子を見てみましょう．図では $\Delta\omega = \omega/10$ としてあります．図の特徴は，$\left|\sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t\right| \leqq 1$ だから，不等式



$$|\sin\omega t + \sin\omega' t| \leqq 2\left|\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$$

に現れています．このことは，グラフの各 t における関数値が $2\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ を $\sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t$ 倍した値であることからわかります．したがって，$\cos\frac{\Delta\omega t}{2} = 0$ となる時間のときに振動の大きさが絞(しぼ)られます．その合成音を聞いている人は“ウオーン・ウオーン”と大きな音と小さな音が交互にやって来るうなりと感じますね．

1.4.4.3　AM 放送

3 角関数のもう 1 つの話題は AM 放送についてです．音はマイクを通して電気信号に変えられ，電気回路の電圧として表されます．電気信号に変えられた音の振動数は「周波数」と呼ばれ，1 秒間当たりの周波数の単位が Hz（ヘルツ）です．人間の耳に聞こえる音は（耳の良い人で）16 Hz〜20 kHz（k(キロ) = 10^3）の範囲ですが，AM 放送では 200 Hz〜7.5 kHz に制限されていて，高音も低音も共にカットされます．

さて，電気信号になった音は AM 放送の送信機を通って電波（中波）になり，AM ラジオ受信機に届きます．その仕組みは用語 AM（Amplitude Modulation; 振幅変調）の意味からわかります．音の信号などを電波に載せて送ることを変調といい，特に電波の振幅に載せる方法が AM です．数式を用いて説明しましょう．音の信号を搬送する放送局の送信回路電圧を‘搬送波(はんそうは)’

$$v_{送}(t) = V_{送}\cos\omega_{送}t, \qquad \omega_{送} = 2\pi f_{送}$$

としましょう．$f_{送}$ は AM 放送局の周波数（530 kHz〜1605 kHz の範囲）で，関東地方の NHK 第一では 594 kHz です．振幅 $V_{送}$ はある正の定数です．これに載せる音信号 $v_{音}(t)$ のうち周波数が $f_{音}$ のものを

$$v_{音}(t) = V_{音}\cos\omega_{音}t, \qquad \omega_{音} = 2\pi f_{音}$$

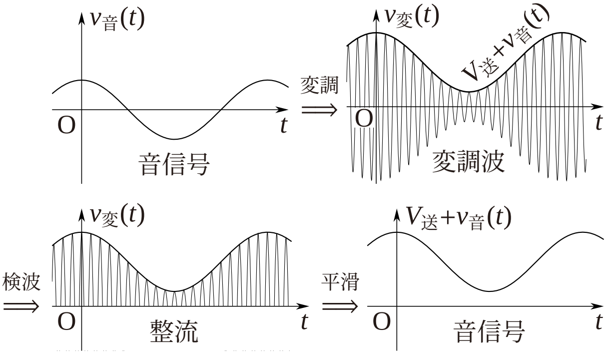
としましょう．実際の音信号は種々の $f_{\text{音}}$（200 Hz ≦ $f_{\text{音}}$ ≦ 7.5 kHz）のものを合成したもです．

搬送波 $v_{\text{送}}(t)$ の振幅 $V_{\text{送}}$ に音信号波 $v_{\text{音}}(t)$ を載せて変調するとは ‘ 変調波 ’

$$v_{\text{変}}(t) = (V_{\text{送}} + v_{\text{音}}(t)) \cos \omega_{\text{送}} t = (V_{\text{送}} + V_{\text{音}} \cos \omega_{\text{音}} t) \cos \omega_{\text{送}} t$$

を作ることです．変調波 $v_{\text{変}}(t)$ は搬送波で，振動部分 $\cos \omega_{\text{送}} t$ は変えずに，振幅部分 $V_{\text{送}}$ を $V_{\text{送}} + v_{\text{音}}(t)\ (> 0)$ で置き換えたものです．これは簡単な電気回路で作ることができ，安価な AM 無線機にも利用されています．

変調と受信による復調の様子を右図を用いて解説しましょう．音信号 $v_{\text{音}}(t)$ は放送局の高周波に乗って変調波 $v_{\text{変}}(t)$ になります．このとき $v_{\text{音}}(t)$ の形は，$\cos \omega_{\text{送}} t \leqq 1$ より，$v_{\text{変}}(t)$ に上から接する曲線 $V_{\text{送}} + v_{\text{音}}(t)$ として保持されます：



$$v_{\text{変}}(t) = (V_{\text{送}} + v_{\text{音}}(t)) \cos \omega_{\text{送}} t \leqq V_{\text{送}} + v_{\text{音}}(t).$$

変調波 $v_{\text{変}}(t)$ は電波として送信され，AM ラジオで同調されて復調されます（☞ §§7.3.2.2）．受信波は AM 放送の高周波を取り除くために整流されて正電圧（正電流）部分だけが取り出され，平滑化して変調波の高周波部分を取り除きます．このように送信波から元の信号を取り出すことを検波といいます．変調波を復調する電気回路は実に簡単で，鉱石ラジオの回路そのものです．

では，変調波からの問題です．変調波 $v_{\text{変}}(t) = (V_{\text{送}} + V_{\text{音}} \cos \omega_{\text{音}} t) \cos \omega_{\text{送}} t$ は，搬送波の周波数 $f_{\text{送}} = \omega_{\text{送}}/2\pi$ の波と音信号に由来する波の合成になっています．変調波はどんな周波数の波の合成であるか調べなさい．

ヒント：3 角関数の積和公式を使います．

解答：積和公式 $\cos \alpha \cos \beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$ より，

$$\begin{aligned} v_{変}(t) &= (V_{送} + V_{音}\cos\omega_{音}t)\cos\omega_{送}t \\ &= V_{送}\cos\omega_{送}t + \frac{V_{音}}{2}\{\cos(\omega_{送}+\omega_{音})t + \cos(\omega_{送}-\omega_{音})t\}. \end{aligned}$$

したがって，周波数 $f_{送}$ および $f_{送}+f_{音}$，$f_{送}-f_{音}$（$f_{音}=\omega_{音}/2\pi$）の波の合成となっていますね．

実際に放送局から送信される波は，$200\,\mathrm{Hz} \leqq f_{音} \leqq 7.5\,\mathrm{kHz}$ の範囲の種々の周波数の波を含むので，1 つの放送局は周波数が $f_{送}-7.5\,\mathrm{kHz}$ から $f_{送}+7.5\,\mathrm{kHz}$ の合成電波を送信しています．

なお，FM 放送の仕組みも用語 FM（Frequency Modulation; 周波数変調）からわかります．今度は搬送波 $v_{送}(t)=V_{送}\cos\omega_{送}t$ の角周波数 $\omega_{送}$ を音信号波 $v_{音}(t)=V_{音}\cos\omega_{音}t$ で変調します．変調波は

$$v_{変}(t) = V_{送}\cos(\omega_{送}+m\sin\omega_{音})t \qquad (m\ は定数)$$

の形です．周波数の変調は雑音の影響が少ないので, 高品質な復調ができます．

1.4.5　逆 3 角関数

§§1.3.3 で逆関数の一般的な議論をしました．3 角関数の逆関数を求めてみましょう．正弦関数 $y=\sin x$ の逆関数を求めるには，まず $y=\sin x$ の x と y を入れ換えます．この操作によって $x=\sin y$ が得られますが，それは $y=\sin x$ 上の全ての点 (x, y) を $y=x$ に対称な点 (y, x) に移したものです．$x=\sin y$ を y について解いたのが $y=\sin^{-1}x$ ですから, $y=\sin x$ の逆関数が事実上得られました．ただし，‘関数’というためには，どの x に対してもただ 1 つの関数値が対応することが必要です．そのためには，$y=\sin x$ が単射の条件 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin x_1 \neq \sin x_2$ を満たすように，$y=\sin x$ の定義域を $\frac{-\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ などと制限しておきます．