§6.3　一般の連立 1 次方程式

6.3.1　3 元連立 1 次方程式と 3 次の行列式

この章の始めに 2 元連立 1 次方程式の解を 2 次の行列式を用いて表しました．この §§ では 3 元連立 1 次方程式を解き，3 次の行列式を求めましょう．その際に直交するベクトルの内積は 0 であることを用います．まず，2 元連立方程式でその練習しましょう．

2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \iff x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

を考えます．最後の表式に注目しましょう．x の解を求めるには，ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ に直交するベクトル，例えば $\begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix}$ を両辺に内積して，y の項を消去すればよいですね：

$$\begin{aligned} x\,(d\ \ -b)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\,(d\ \ -b)\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = (d\ \ -b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &\iff (ad-bc)\,x = pd-qb \\ &\iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ここで，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ が 2 次の行列式です．y の解についても同様です．

3 元連立 1 次方程式[7)]も同様に式変形していきます：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\iff x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \text{ とおく}).$$

---

7) 各方程式は図形としては平面を表すので，3 元連立方程式の解は 3 つの平面の共有点になります．2 つの平面の共通部分が交線であるときは，交線と残りの平面との共有点（通常は交点）が解になります．交線と平面に共有点がない場合や交線すらできない場合は解がありません．2 つの平面が一致するときは残りの平面との共有点は直線か，無しか，平面全体ですね．

x の解を求めるには空間ベクトル $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルが必要です．そんなベクトルは，§§4.3.4.4 で学んだように，外積 $\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$ です．よって，

$$\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\\a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33}\\a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}\end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}\right)^T$$

を方程式の両辺に内積して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)x&=\left(a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}\right)x\\&=b_1\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\end{aligned}$$

が得られます．

　ここで，x の係数 $\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}$ と方程式の係数がなす行列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)$$

を比較してみましょう．2 次の行列式 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ は‘行や列を交換すると符号を変える’という性質

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

のように表すことができます．上式の 2 行目から，$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ は a_{11} と，係数行列 A で a_{11} を含む行と列を除いてできる小行列 $\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ の行列式 $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ と

の積と考えることができます．$a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ も同様に考えます．3 行目の符号因子 $(-1)^{i+j}$ は，見かけ上全ての項を和の形に表すためのもので，a_{11}，a_{21}，a_{31} が係数行列 A の $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$ 成分であることを利用しています．

上の $\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$ の表式はとても見通しがよいので，3 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\left(= \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) \right)$$

によって定義しましょう．すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x &= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \left(= \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) \right) \end{aligned}$$

となるので，x は 3 次の行列式を用いて表されます．

同様に，方程式 $x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ から，外積を用いて x, z の項を消すと y が，x, y の項を消すと z が得られます．

y を求める外積計算を練習問題にしましょう．方程式から x, z の項を消去した式を求めなさい（整理しなくてよい）．

答：

$$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \right)^T$$

を方程式に内積して，$\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1) y = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1)$，つまり

$$\left(a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \right) y = b_1\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$$

が得られます．

この式を整理すると，y の解も 3 次の行列式を用いて表すことができます．$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$ に注意すると

$$\left(a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}\right) y = b_1\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$$

より

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} b_1 & a_{13} & a_{11} \\ b_2 & a_{23} & a_{21} \\ b_3 & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

このとき，3 次の行列式を展開して整理し直すと，下の定理が得られます．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\qquad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$(\Leftrightarrow \ \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) = -\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_3 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)).$$

この定理は‘行列式の列を交換すると符号が変わる’ことを示しています．これを導くのは練習問題にしましょう．この定理を用いると，y および z の解は，係数行列 A の行列式 $|A| = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$ が 0 でないとき，

$$y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

と表すことができます．z の解を求めるのは練習問題ですね．

200 年以上も前に，日本が誇る江戸時代の数学者 関孝和 はこれらの結果を独力で見いだしたのでした．残念なことに，当時の日本にはこのような高度な数学を必要とする産業がまだなく，彼の研究を発展させる素地はありませんでした．