

目次

第 1 章	数	1
§1.1	数直線	4
§1.2	自然数・整数・有理数	6
§1.3	数学の論理	7
1.3.1	演算の公理	7
1.3.2	演算の公理の意味	10
1.3.3	命題と証明	12
§1.4	基本公式の導出	14
1.4.1	移項の公式	14
1.4.2	負数が関係する公式	15
1.4.2.1	マイナスのマイナスはプラス	15
1.4.2.2	負×負は正	15
§1.5	数学の論理構造	17
1.5.1	無限大 ∞ は数でない	17
1.5.2	$1 + 1 = 2$?	20
1.5.3	現代数学の公理	22
1.5.3.1	ペアノの公理系	23
1.5.3.2	公理主義	26
§1.6	集合	28
1.6.1	集合	28
1.6.2	真理集合と対偶	29

§1.7	2進法	32
§1.8	実数の小数表示	34
1.8.1	有理数の性質	34
1.8.2	循環小数でない無限小数	36
§1.9	実数の連続性	37
1.9.1	有理数と無理数の特徴	38
1.9.2	実数の新たな定義	40
§1.10	整数の性質	41
1.10.1	自然数の因数分解	41
1.10.1.1	約数・倍数・素数	41
1.10.1.2	素因数分解の一意性	42
1.10.1.3	公約数・公倍数	44
1.10.2	整数の割り算	45
1.10.2.1	ユークリッドの互除法	46
1.10.2.2	合同式	47
1.10.3	整数論の基本定理	50
§1.11	素数を利用した暗号	53
1.11.1	フェルマーの小定理	53
1.11.2	RSA 公開鍵暗号	56
第2章	方程式	58
§2.1	未知数・変数	59
2.1.1	未知数・変数の導入	59
2.1.2	文字の変数化	60
§2.2	2次方程式	61
2.2.1	方程式の解の定義と解法	61
2.2.2	一般の2次方程式の解	62
§2.3	虚数	63
2.3.1	判別式が負の解	63
2.3.2	カルダノの公式と虚数のパラドックス	66

§2.4	因数定理	68
2.4.1	整式の割り算	69
2.4.2	剰余定理・因数定理	70
2.4.3	n 次方程式と代数学の基本定理	71
第 3 章	関数とグラフ	74
§3.1	関数の定義	75
§3.2	実数と点の 1 対 1 対応と座標軸	76
§3.3	1 次関数・2 次関数のグラフ	78
3.3.1	グラフは点の集合	78
3.3.2	直線	81
§3.4	2 次関数のグラフの平行移動	82
3.4.1	放物線の丸み	83
3.4.2	平行移動	83
§3.5	方程式・不等式のグラフ解法	85
3.5.1	方程式のグラフ解法	85
3.5.2	不等式のグラフ解法	88
§3.6	図形の変換	89
3.6.1	平行移動	89
3.6.1.1	関数のグラフの平行移動	89
3.6.1.2	図形の変換の意味付け	90
3.6.2	種々の変換と対称性	91
3.6.2.1	倍変換	92
3.6.2.2	y 軸対称性	92
§3.7	関数の概念の発展	93
3.7.1	関数の拡張	93
3.7.2	関数概念の拡張	94
3.7.2.1	逆関数	95
3.7.2.2	合成関数	96
3.7.2.3	写像	98

第 4 章	三角関数	100
§4.1	三角関数の定義	101
4.1.1	余弦関数・正弦関数	101
4.1.2	正接関数	105
4.1.3	弧度法	106
§4.2	三角関数の相互関係	107
§4.3	三角関数のグラフ	110
§4.4	余弦定理・正弦定理	112
4.4.1	余弦定理	112
4.4.2	正弦定理と三角形の面積	113
§4.5	加法定理	116
4.5.1	加法定理	116
4.5.2	倍角・半角の公式と積和・和積公式	118
4.5.3	三角関数の合成	119
4.5.3.1	三角関数の合成	119
4.5.3.2	和積公式の応用	121
第 5 章	平面図形とその方程式	123
§5.1	曲線の方程式	124
5.1.1	放物線と直線	124
5.1.2	円の方程式	128
5.1.3	円と直線，直線のパラメータ表示	130
5.1.3.1	円と直線の相対的位置関係	130
5.1.3.2	円の接線の方程式	131
5.1.3.3	2 円の交点を通る直線や円	132
5.1.3.4	点と直線の距離の公式と直線のパラメータ表示	134
5.1.4	アポロニウスの円と内分点・外分点	137
5.1.5	円のパラメータ表示	138
5.1.6	一般の曲線の平行移動	140
§5.2	領域	141

5.2.1	関数のグラフの上側・下側	141
5.2.2	円の内部・外部	142
5.2.3	領域と境界	142
5.2.4	図形の対称性	145
5.2.5	図形の方程式のパラメータと領域	146
§5.3	2次曲線	149
5.3.1	放物線	149
5.3.1.1	放物線の標準形	149
5.3.1.2	放物線の焦点	150
5.3.1.3	斜めの軸をもつ放物線	151
5.3.2	楕円	154
5.3.2.1	楕円の標準形	154
5.3.2.2	楕円と円の関係	155
5.3.2.3	楕円の接線	156
5.3.2.4	楕円の回転	158
5.3.2.5	楕円と放物線の関係	159
5.3.3	双曲線	160
5.3.3.1	双曲線の標準形	160
5.3.3.2	双曲線の漸近線	161
5.3.3.3	直角双曲線	163
第6章	指数関数・対数関数	164
§6.1	指数関数	165
6.1.1	指数法則	165
6.1.1.1	自然数の指数	165
6.1.1.2	有理数の指数	166
6.1.1.3	実数の指数	168
6.1.2	指数関数とそのグラフ	170
§6.2	対数関数	172
6.2.1	対数関数の導出とそのグラフ	172

6.2.2	対数の性質	174
6.2.2.1	浮動小数点表示	175
第 7 章	平面ベクトル	177
§7.1	矢線からベクトルへ	178
7.1.1	矢線とその和	178
7.1.2	ベクトルの導入	180
7.1.3	ベクトルの成分表示	182
§7.2	ベクトルの演算	184
7.2.1	ベクトルの和	184
7.2.2	ベクトルの差	185
7.2.3	ベクトルの実数倍	186
7.2.4	幾何ベクトルと数ベクトル	187
§7.3	位置ベクトルの基本	188
7.3.1	位置ベクトル	188
7.3.2	内分点・外分点	189
7.3.3	直線のベクトル方程式	189
§7.4	ベクトルの 1 次独立と 1 次結合	191
7.4.1	基本ベクトル	191
7.4.2	ベクトルの 1 次結合	191
7.4.3	ベクトルの 1 次独立と空間の次元	192
§7.5	ベクトルと図形(I)	193
7.5.1	直線の分点表示	194
7.5.2	直線上の 3 点	195
7.5.3	三角形の重心	195
§7.6	ベクトルの内積	197
7.6.1	力がなした仕事	197
7.6.2	内積の基本性質	198
7.6.3	内積の成分表示	200
§7.7	ベクトルと図形(II)	201

7.7.1	余弦定理	201
7.7.2	三角形の面積	202
7.7.3	直線の法線ベクトル	203
7.7.4	点と直線の距離	203
7.7.5	斜交座標	204
7.7.5.1	1次結合と図形	204
7.7.5.2	斜交座標	207
7.7.5.3	斜交座標の応用問題	209
第8章	空間ベクトル	210
§8.1	空間ベクトルの基礎	210
8.1.1	空間座標	210
8.1.2	空間ベクトルと演算法則	211
8.1.2.1	空間ベクトルの定義	211
8.1.2.2	ベクトルの演算法則	212
8.1.2.3	ベクトルの公理的定義	213
8.1.3	空間ベクトルの1次結合と1次独立	215
8.1.3.1	1次結合の意味と1次独立の条件	215
8.1.3.2	ベクトルの1次独立とその応用	217
8.1.4	空間ベクトルの内積	218
§8.2	空間図形の方程式	219
8.2.1	直線の方程式	219
8.2.2	平面の方程式	221
8.2.3	球面の方程式	223
8.2.4	円柱面と円の方程式	223
8.2.4.1	円柱面の方程式	223
8.2.4.2	空間上の円の方程式	224
8.2.5	回転面の方程式	225
8.2.5.1	回転面	225
8.2.5.2	回転放物面・回転楕円面・回転双曲面	226

	8.2.5.3 円錐面	226
§ 8.3	空間ベクトルの技術	228
	8.3.1 図形と直線との交点	229
	8.3.2 点と平面の距離	229
	8.3.3 直線を含む平面	230
	8.3.4 外積	232
	8.3.4.1 平面の法線ベクトル	232
	8.3.4.2 シーソー	232
	8.3.4.3 回転の向きを表す力のモーメント	233
	8.3.4.4 外積の演算法則	235
	8.3.4.5 外積の成分表示	236
	8.3.4.6 外積の応用	237
第 9 章	行列と線形変換	239
§ 9.1	線形変換と行列	240
	9.1.1 線形変換の例	240
	9.1.1.1 対称移動	240
	9.1.1.2 回転	241
	9.1.2 線形変換と表現行列	242
	9.1.2.1 線形変換の基本法則	242
	9.1.2.2 線形変換の表現行列	243
	9.1.3 行列の演算	244
	9.1.3.1 行列の実数倍	244
	9.1.3.2 行列の和	245
	9.1.3.3 行列の積	246
	9.1.3.4 行列の割り算	249
	9.1.3.5 逆行列と線形変換	251
	9.1.3.6 行列の累乗とケーリー・ハミルトンの定理	252
§ 9.2	行列の一般化	254
	9.2.1 連立 1 次方程式と行列	254

9.2.2	一般の行列	256
9.2.2.1	m 行 n 列の行列	256
9.2.2.2	行列の積	257
9.2.2.3	行列の演算法則	259
9.2.3	3 元連立 1 次方程式	261
§9.3	2 次曲線と行列の対角化	263
9.3.1	楕円・双曲線の方程式	263
9.3.1.1	標準形の方程式	264
9.3.1.2	曲線の回転	264
9.3.1.3	曲線の対称軸と基底の変換	267
9.3.2	行列の対角化	270
9.3.2.1	固有値と固有ベクトル	270
9.3.2.2	行列の対角化	271
9.3.2.3	固有値問題	274
9.3.2.4	対角化の一般化	277
第 10 章	複素数	278
§10.1	複素数	280
10.1.1	複素数の計算規則	280
10.1.2	複素数と平面上の点の対応	282
10.1.3	複素数の和・差	282
10.1.4	極形式	283
10.1.5	極形式を用いた複素数の積・商	285
10.1.5.1	複素数の積	285
10.1.5.2	複素数の商	286
10.1.6	複素平面上の角	287
§10.2	ド・モアブルの定理	289
10.2.1	ド・モアブルの定理	289
10.2.2	1 の n 乗根	290
§10.3	方程式	292

10.3.1	複素係数の 2 次方程式	292
10.3.2	3 次方程式とカルダノのパラドックス	295
10.3.3	代数学の基本定理	297
10.3.3.1	複素数の連続関数	297
10.3.3.2	定理	298
10.3.3.3	代数学の基本定理	299
§ 10.4	複素平面上の図形と複素変換	301
10.4.1	複素平面上の図形	302
10.4.1.1	円	302
10.4.1.2	直線	303
10.4.2	複素平面上の変換	304
10.4.2.1	変換の例	304
10.4.2.2	1 次分数変換	305
10.4.3	非線形変換と非実数性	308
第 11 章	数列	311
§ 11.1	数列	313
11.1.1	数列	313
11.1.2	等差数列	313
11.1.3	Σ 記号と階差	315
11.1.4	等比数列	316
§ 11.2	階差と数列の和	318
11.2.1	分数の和	318
11.2.2	隣り合う自然数の積の和	319
§ 11.3	漸化式	321
11.3.1	^{ぜん} 漸化式	321
11.3.2	2 項間漸化式	322
11.3.2.1	2 項間漸化式	322
11.3.2.2	アルキメデスの π の近似計算	324
11.3.3	フィボナッチ数列と 3 項間漸化式	326

11.3.3.1	フィボナッチ数列	326
11.3.3.2	フィボナッチ数列と黄金比	328
11.3.3.3	黄金角と植物の成長	330
11.3.3.4	3項間漸化式	334
§ 11.4	数学的帰納法	336
11.4.1	帰納法の原理	336
11.4.2	不等式の証明	338
11.4.2.1	例題	338
11.4.2.2	二項係数・二項不等式	340
§ 11.5	数列・級数の極限	342
11.5.1	無限数列の極限	342
11.5.2	極限計算の例	344
11.5.2.1	基本例題	344
11.5.2.2	無限等比数列	344
11.5.2.3	重要な例題	345
11.5.2.4	極限の基本定理	348
11.5.3	極限に関する定理	349
11.5.3.1	収束の厳密な定義とはさみうちの原理	349
11.5.3.2	収束の基本定理	352
11.5.4	級数の極限	354
11.5.4.1	無限級数	354
11.5.4.2	無限等比級数	355
§ 11.6	ゼノンのパラドックスと極限	356
11.6.1	アキレスと亀	356
11.6.2	飛んでいる矢は止まっている	357
11.6.3	瞬間の個数	360
§ 11.7	無限級数の積	361
11.7.1	無限級数の絶対収束	361
11.7.2	無限級数の積	365

第 12 章 微分 - 基礎編	367
§ 12.1 0 に近づける極限操作	368
12.1.1 瞬間速度	368
12.1.2 接線とその傾き	370
§ 12.2 関数の極限	372
12.2.1 関数の極限・関数の連続	372
12.2.2 極限の基本定理	373
12.2.3 接線が存在	375
§ 12.3 導関数	377
12.3.1 導関数	377
12.3.2 導関数の基本公式	378
§ 12.4 関数のグラフ	380
12.4.1 関数の増減	380
12.4.1.1 近傍での増減と微分	380
12.4.1.2 区間における増減	381
12.4.2 増減表と極大・極小	382
12.4.3 曲線の凹凸と第 2 次導関数	383
§ 12.5 種々の微分法と導関数	385
12.5.1 合成関数・逆関数・パラメータ表示の微分法	385
12.5.2 曲線の方程式の微分法	388
12.5.3 三角関数の微分	389
12.5.3.1 三角関数の極限	389
12.5.3.2 三角関数の導関数	390
12.5.4 指数関数・対数関数の微分	391
12.5.4.1 指数関数の連続性と指数法則	391
12.5.4.2 指数関数の導関数	393
12.5.4.3 対数関数の導関数	394
第 13 章 微分 - 発展編	396
§ 13.1 ロピタルの定理	396

13.1.1	平均値の定理	396
13.1.1.1	ロルの定理	396
13.1.1.2	平均値の定理	398
13.1.1.3	コーシーの平均値の定理	399
13.1.2	ロピタルの定理	399
13.1.2.1	ロピタルの定理の基本形	399
13.1.2.2	ロピタルの定理の発展形 1	401
13.1.2.3	ロピタルの定理の発展形 2	402
§ 13.2	テイラーの定理と関数の近似式	404
13.2.1	高次導関数	404
13.2.2	テイラーの定理	405
13.2.2.1	テイラーの定理	405
13.2.2.2	剰余項の別表現	408
13.2.3	関数の n 次式近似と関数電卓の原理	409
13.2.3.1	近似と誤差	409
13.2.3.2	指数関数の近似	410
13.2.3.3	三角関数の近似	411
13.2.3.4	対数関数の近似	413
§ 13.3	関数の無限級数表示	415
13.3.1	無限級数表示	415
13.3.2	指数関数・三角関数の無限級数表示	416
§ 13.4	複素数の極形式と複素指数関数	417
13.4.1	極形式と指数関数	418
13.4.2	複素変数の指数関数・三角関数と複素微分	419
第 14 章	積分	422
§ 14.1	区分求積法	423
14.1.1	直角三角形の区分求積	423
14.1.2	x 軸より下にある直線の区分求積	425
14.1.3	放物線の区分求積	427

§ 14.2	定積分	428
14.2.1	定積分の定義	429
14.2.2	定積分の基本性質と拡張	433
§ 14.3	微積分学の基本定理と原始関数・不定積分	435
14.3.1	微積分学の基本定理	435
14.3.2	原始関数と不定積分	436
14.3.3	不定積分の基本公式	438
§ 14.4	定積分と面積	440
14.4.1	面積の基本公式	440
14.4.1.1	x の区間における面積の基本公式	440
14.4.1.2	y の区間における面積の基本公式	442
14.4.1.3	極座標を用いた面積の基本公式	443
§ 14.5	積分の技術	445
14.5.1	部分積分法	446
14.5.2	置換積分法	447
§ 14.6	体積と曲線の長さ	450
14.6.1	立体図形の体積	450
14.6.2	曲線の長さ	453
§ 14.7	無限級数の項別微分積分	454
14.7.1	一様収束と連続性	455
14.7.2	無限級数の項別微分積分	457
§ 14.8	広義積分	460
14.8.1	広義積分の定義	460
14.8.2	広義積分の収束	461
14.8.3	解析的階乗関数	463
§ 14.9	微分方程式	465
14.9.1	ニュートンとリング	465
14.9.2	ボールの軌跡	469
14.9.3	バネで結んだ重りの運動と行列の対角化	470
14.9.3.1	バネによる振動	471

14.9.3.2	バネで結んだ 2 個の重りの運動	473
14.9.3.3	バネで結んだ重りの運動と行列の対角化	475
14.9.3.4	変換行列 P が直交行列でない場合の対角化	479
第 15 章	確率・統計	481
§ 15.1	場合の数と確率	482
15.1.1	事象と確率	482
15.1.1.1	コイン投げ	482
15.1.1.2	余事象・和事象・積事象	485
15.1.1.3	ガリレオへのサイコロ相談	487
15.1.2	順列と組合せ	491
15.1.2.1	重複順列	491
15.1.2.2	順列	492
15.1.2.3	組合せ	495
15.1.2.4	重複組合せ	497
15.1.2.5	二項定理とパスカルの三角形	500
§ 15.2	確率	502
15.2.1	確率の基本性質	502
15.2.2	確率の積と条件付き確率	504
15.2.2.1	くじ引き	504
15.2.2.2	確率の積・条件付き確率	506
15.2.3	独立事象の確率	510
15.2.3.1	事象の独立	510
15.2.3.2	反復試行の確率	513
15.2.4	確率の漸化式	515
15.2.5	連続事象の確率	518
15.2.5.1	一様分布	518
15.2.5.2	ビュッフオンの針	519
§ 15.3	期待値と分散	520
15.3.1	期待値	520

15.3.1.1	パスカルの配分方法	520
15.3.1.2	期待値	521
15.3.1.3	期待値の練習問題	525
15.3.2	分散と標準偏差	527
15.3.2.1	期待値からのずれ	527
15.3.2.2	標準偏差に関する不等式	531
§ 15.4	二項分布	532
15.4.1	サイコロ振りと統計的確率	532
15.4.2	二項分布と大数の法則	535
§ 15.5	正規分布	537
15.5.1	離散分布から連続分布へ	538
15.5.2	正規分布の導出	539
15.5.3	正規分布	544
15.5.3.1	正規分布と中心極限定理	544
15.5.3.2	正規分布の標準化	546
15.5.4	視聴率	549
15.5.4.1	視聴率の推定	549
15.5.4.2	視聴率の検定	551