第9章　行列と線形変換

　未知数が 3 個の 3 元連立 1 次方程式を解いたことがあるでしょう．手こずりませんでしたか？ 多元連立 1 次方程式を最も合理的に解く方法を求めて，17 世紀に「行列式」(determinant) が生まれ，やがて「行列」(matrix) の理論に発展しました．

　2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

ですが，2 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

と定義すると，解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

のように表されます．n 元連立 1 次方程式の解に対応するには，この 2 次の行列式を，n 個の未知数に対する $n \times n$ 個の係数から作られる n 次の行列式に一般化すればよいわけです．

　日本の数学者 関孝和（1642 頃〜1708）の 1683 年の手稿によると，彼は 3〜5 次の行列式をドイツの指導的数学者ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646〜1716）に先駆けて見いだしたようです．

数学者は未知数の個数が方程式の個数に一致しない連立 1 次方程式も研究し，19 世紀にはケーリー（Arthur Cayley，1821〜1895，イギリス）によって行列の理論が構築されました．先ほどの 2 元連立 1 次方程式 $ax+by=p$, $cx+dy=q$ は，後ほど示されるように,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表すことができ，そのとき現れる $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が 2 行 2 列の行列です．行列の理論は連立 1 次方程式の研究に用いられるだけでなく，解析学，物理学の多くの問題にも適用され，それらを君たちは「線形代数」という大学の講義で習うことでしょう．

我々はベクトルの変換から行列に入っていきましょう．

§9.1　線形変換と行列

簡単のため，この § で考えるベクトルは平面ベクトル，行列は 2 行 2 列の行列に限定しましょう．よって，任意の行列といった場合でも 2 行 2 列のものと見なしてください．行列の一般化は次の § で行います．

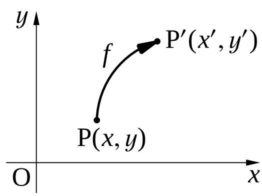
9.1.1　線形変換の例

9.1.1.1　対称移動

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に移動する変換 f を考えましょう．この変換 f を

$$\mathrm{P}' = f(\mathrm{P})$$

または位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を用いて



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表しましょう．このとき f は，点 P に点 P′ を対応させる，またはベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ にベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる働きがあるので, ‘ 一般化された関数 ’ と見なすことができます.

例えば，$\mathrm{P}'(x', y')$ が点 $\mathrm{P}(x, y)$ を x 軸に関して折り返した点であるとき，$x' = x$，$y' = -y$ なので

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

と表されます．また，P' が点 P に原点対称な点であるときは

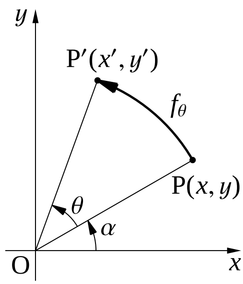
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

ですね．

では，簡単な練習問題です．P' が点 P を直線 $y = x$ に関して折り返した点であるとき，$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．答は $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ ですね．

9.1.1.2　**回転**

点を原点の周りに角 θ だけ回転する変換 f を特に f_θ とし，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めましょう．点 $\mathrm{P}(x, y)$ と原点 O の距離を r，半直線 OP と x 軸とのなす角を α として，三角関数の知識を使うのが簡明です．すると



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

と表されますね．ここで，加法定理を用いると

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ y\cos\theta + x\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

であることがわかります．なお，この表式は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が任意のベクトルのときも成立します．

9.1.2　線形変換と表現行列

9.1.2.1　線形変換の基本法則

前の §§ の変換 f の特徴を調べましょう．$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ には，x, y の ‘ 1 次の項のみ ’ が現れ，定数項や 2 次以上の項は現れませんね．このような変換は，一般に

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}\qquad（a,\ b,\ c,\ d\ は定数）\qquad（線形表現）$$

の形のベクトルで表すことができ，**1 次変換** とか **線形変換** などと呼ばれます．

線形変換 f の特徴を見るために，その基本性質を導きましょう．それは次に述べる 2 つの性質に集約されます：
線形変換 f は，ベクトルをベクトルに変換し，$\vec{x}$, $\vec{y}$ を任意のベクトルとするとき，次の 2 つの性質を満たす：

1）　$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$,

2）　$f(k\vec{x})=kf(\vec{x})$　　（k は任意の実数）.

これは非常にすっきりした表現で，通常はこれがむしろ線形変換 f の定義とされます．上の（線形表現）$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$ が性質 1)，2）と同値であることを示しましょう．$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とすると，（線形表現）より

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)&=f\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x_1+y_1)+b(x_2+y_2)\\c(x_1+y_1)+d(x_2+y_2)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ay_1+by_2\\cy_1+dy_2\end{pmatrix}\\&=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

また，
$$\begin{aligned}f\left(k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)&=f\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}akx_1+bkx_2\\ckx_1+dkx_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}\\&=kf\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られます．よって，1)，2) が成立することがわかります．

逆に, 基本性質 1), 2) から(線形表現)を導くのは君たちに任せます．ヒント：$f\binom{1}{0}$ と $f\binom{0}{1}$ は定ベクトルなので，それらを $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とおいて，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を用いるとあっさりと導かれます．重要なので必ずやってね.

9.1.2.2　線形変換の表現行列

線形変換 $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$ の表現をもっとスッキリした‘ 積の形 ’で表現することが考案されました：

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \qquad \text{（変換の行列表現）}$$

つまり，行と列の並び $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の積が $\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$ であるように定義します[1)]．この式を眺めると，$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ は，変換 f を表すように見えることから，f の **表現行列** と呼ばれます．そのことは $f:\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ と表されますが，表現行列の意味を正しく理解するには

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow f:\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

であることを忘れてはいけません.

この表現行列は「2 行 2 列の行列」または **2 × 2 行列** と呼ばれます．行列の各文字を行列の **成分** といい，例えば a は第 1 行第 1 列の成分なので (1, 1) 成分，c は第 2 行第 1 列の成分なので (2, 1) 成分などと呼ばれます.

---

1) 積 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の計算法のコツは，$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ を行ベクトル $(a \quad b)$ と $(c \quad d)$ を並べた $\begin{pmatrix}(a & b)\\(c & d)\end{pmatrix}$ と見て，積 $(a \quad b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $ax+by$ になり，積 $(c \quad d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $cx+dy$ になると考えて

$$\begin{pmatrix}(a & b)\\(c & d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a & b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\(c & d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

のように見るのがよいでしょう．このような見方は今後になされる行列の積の一般化の基本になるものです.

前の §§ で議論した，点やベクトルを角 θ だけ回転する変換 f_θ については，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるので，f_θ の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ です．この回転を表す 1 次変換 f_θ はしばしば利用されるので，その表現行列を R_θ と略記しましょう：

$$f_\theta : R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2 つの線形変換 $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $g : \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ が同じになるは，当然のことながら，それらの表現行列の各成分が一致する場合ですね：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = e,\ b = f,\ c = g,\ d = h.$$

9.1.3　行列の演算

行列は実数に似たところもあります．行列の実数倍・和・積・商などの演算の性質を議論しましょう．

9.1.3.1　行列の実数倍

任意の実数 k に対して

$$\begin{aligned} k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= k\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,ax + k\,by \\ k\,cx + k\,dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立しますね．このときベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は任意なので，次ページの脚注の議論からわかるように，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をとり除くことができ

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

と表すことができます[2)]．行列の実数倍は，ベクトルの実数倍と同様に，各成分を実数倍したものと同じです．

行列の実数倍の演算法則がベクトルの場合と同様に成り立ちます．行列を表す簡略記号 A などを用いると，任意の実数 p, q に対して

$$p(qA) = (pq)A$$

です．これは A を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ などと成分で表してみるとほぼ明らかでしょう．

9.1.3.2　**行列の和**

線形変換を $f : \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (a+e)x+(b+f)y \\ (c+g)x+(d+h)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ex+fy \\ gx+hy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立ちます．これもベクトルを省略して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

と表すと，行列の和は各成分の和として定義できることがわかります．

成分が全て 0 の行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は O で表し，**零行列** または **ゼロ行列** と呼ばれます．O は任意の行列 A に対して

$$A + O = O + A = A$$

となりますね．

---

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が任意のベクトルのとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ex+fy \\ gx+hy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by = ex+fy \\ cx+dy = gx+hy \end{cases}$$

において，x, y は任意なので，$y = 0$ とか $x = 0$ などとして係数比較をすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

が導かれ，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をとり除いてもよいことがわかります．

ベクトルの場合と同様に，行列の和の演算法則が成り立ちます．行列を表す簡略記号 A，B，C などを用いると

$$A + B = B + A, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \text{（結合法則）}$$

です．行列の成分を考えると，これらを示すのは簡単な練習問題でしょう．

行列の実数倍と組み合わせると分配法則が成り立ちます．任意の行列 A，B と実数 p，q に対して

$$(p+q)A = pA + qA, \qquad p(A+B) = pA + pB$$

です．これも練習問題にしましょう．

9.1.3.3　行列の積

§§3.7.2.2 で合成関数 $f \circ g(x) = f(g(x))$ を学びましたね．ここでは変数がベクトルになった場合を学びましょう．2 つの線形変換 $f : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g : B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ を g，f の順に行った合成変換

$$f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

を考えます．

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(x\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) \\ &= x\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} ar+bs \\ cr+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ap+bq)\,x + (ar+bs)\,y \\ (cp+dq)\,x + (cr+ds)\,y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立ちます．

最後の行列 $\begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}$ は複雑です．そこで，それを

$$\begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = AB$$

のように表し，行列の積であると考えてみましょう[3)]．つまり，これが行列の積の定義であるとするわけです．

このように積を定義すると

$$A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (AB)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

が成り立ちます．

この等式から行列の積についての基本性質

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{（結合法則）}$$

が導かれます．$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は任意のベクトルなので，それに行列 C を掛けたベクトル $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で置き換えても等式は成立します：

$$A\left(B\left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = (AB)\left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

$(*)$ より，上式の左辺は $A\left((BC)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (A(BC))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，右辺は $((AB)C)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるので

$$(A(BC))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ((AB)C)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3) 行列の積 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ の計算は，左側の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行ベクトルを並べた $\begin{pmatrix} (a & b) \\ (c & d) \end{pmatrix}$，右側の $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ を列ベクトルを並べた $\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right)$ と見て，$(a \quad b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = ap+bq$，$(c \quad d)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = cp+dq$ などに注意し，

$$\begin{pmatrix} (a & b) \\ (c & d) \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a & b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} & (a & b)\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ (c & d)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} & (c & d)\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

と見るとよいでしょう．さらに，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right)$$

と見なすこともできることに注意しましょう．

が成立します．$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は任意なので，それを除くと結合法則が得られます．

行列の積に関する他の演算法則

$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC, \qquad \text{（分配法則）}$$

$$(pA)B = A(pB) = p(AB) \qquad \text{（}p\text{ は実数）}$$

を示すには，行列の成分表示を用いて積を計算するほうが簡単でしょう．

なお，等式 $A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (AB)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，線形変換の合成はまた線形変換であること，また線形変換 $f : A$，$g : B$ の合成変換 $f \circ g$ の表現行列は AB であることを示しています．合成変換を $f \circ g$ のように積の形で表した理由が納得できるでしょう．

ところで，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ となるので，一般に，

$$AB \neq BA$$

であり，行列の積については，交換法則は成り立ちません．

では，ここで問題です．任意の行列 A と交換する行列 $C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ はあるか．あるとすれば，どんな形の行列か．ヒント：$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ などと成分表示して，任意の実数 a, b, c, d に対して $AC = CA$ を（各成分で）満たす C を探すことになります．まず，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ などとしておいて，k，l，m，n に条件をつけておくほうがよいでしょう．答は，k を任意の実数として，$C = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です．特に $k = 0$ のとき C は零行列 O になりますね．

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 次の **単位行列** といい，I で表します．単位行列 I と $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の積に関する性質をまとめると，任意の行列 A に対して

$$AI = IA = A \quad \text{特に} \quad I^2 = I,$$

$$AO = OA = O \quad \text{特に} \quad O^2 = O$$

です．ただし，行列 A について，AA を A^2，A^2A を A^3，$\cdots$ のように表します．O，I は実数でいえば 0，1 に当たる行列ですね．

行列の和や積の演算法則を見ると，行列は実数に似たところもあり，積の交換法則が成り立たないなど，違う点もありますね．決定的に違う点を示す例を挙げてみましょう．$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ を計算すると零行列 O になりますね．また $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O$ ですね．このように，行列にはそれ自身は O でなくとも積が O になる場合があります．行列の積の特殊性を示す例を考えるとき，行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が示す性質

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{よって} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \text{よって} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = O$$

は参考になるでしょう．

9.1.3.4　行列の割り算

実数 a の逆数 a^{-1} に当たるものを，行列の演算で考えましょう．積の交換則 $AB = BA$ が成立しないことに注意して，

$$AX = I \quad \text{かつ} \quad XA = I$$

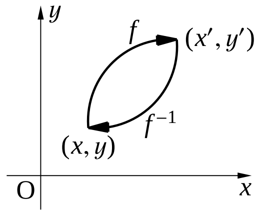
を満たす X が存在するとき，それを行列 A の **逆行列** と定義し，A^{-1} で表しましょう．したがって，

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

が成り立つ行列 A^{-1} が A の逆行列です．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と成分表示して，その逆行列 A^{-1} を求めましょう．A^{-1} を $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ などと成分表示して条件 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ に代入し，成分を決めるのはかなり骨が折れます．そこで，逆行列 A^{-1} が存在するとして，それが満たす条件，つまり，必要条件から A^{-1} を求めて，それが十分条件を満たすかどうかを調べることにしましょう．

求める必要条件は線形変換 $f : A$ とその逆変換 $f^{-1} : A^{-1}$ を考えると得られます.



$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

としましょう．A を成分表示しておいて，A から A^{-1} を導きましょう．$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\iff\begin{cases}ax+by=x'\\cx+dy=y'\end{cases}$$

だから，最後の連立方程式を x, y について解くと

$$x=\frac{x'd-y'b}{ad-bc},\quad y=\frac{ay'-cx'}{ad-bc}\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}x'd-y'b\\ay'-cx'\end{pmatrix}$$
$$\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

が得られます．これを $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ と比較すると

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad\text{のとき}\quad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

であることがわかります.

ここで，上の A^{-1} は必要条件から得られたので注意が必要です．まず，$ad-bc=0$ ならば 0 で割ることになるので，その場合には A の逆行列 A^{-1} は存在しません．$ad-bc$ は行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の **行列式** と呼ばれ，$\det(A)$ や $|A|$ または $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ などで表されます．A の逆行列がないのは A が零行列 O である場合に限らないので注意が必要です（逆行列をもたない行列の例を 3 つ挙げてみましょう）．なお，行列 A に逆行列 A^{-1} が存在するとき A は **正則** であるといいます.

次に，上で得られた A^{-1} が逆行列の定義 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ を満たすことを確かめなければなりません．練習問題として実際に計算してみましょう．確か

に満たすことが確認できますね．よって，正しい逆行列は必要条件から得られたものであることがわかりました.

ここで，逆行列に関する 2 つの定理

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

を示すのを練習問題としましょう．証明方法は何通りもあります．前者の意味は明らかでしょう．後者は，線形変換 $f : A$, $g : B$ の合成変換 $f \circ g : AB$ によって点 P が P→Q→R と移されたとしたら，その逆変換 $(f \circ g)^{-1}$ は R→Q→P と移す変換 $g^{-1} \circ f^{-1}$ であることを述べています.

9.1.3.5　**逆行列と線形変換**

逆行列の応用として，図形の線形変換を議論しておきましょう．曲線 C の方程式が $F(x, y) = 0$ と表されるとき，ベクトル $\binom{x}{y}$ を用いてそれを

$$C : F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

と表しておきましょう．曲線 C が線形変換 $f : A$ によって曲線 C_f に移されたとき，C_f 上の点を (x, y) とすると，C_f の方程式は変数 x, y を用いて表されますね．このとき，(x, y) が C 上の点 (x_0, y_0) から $f : A$ によって移った点とすると，それらの点を表す位置ベクトルについて

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の関係があります．このとき，(x_0, y_0) は C 上の点ですから，C の方程式について $F\left(A^{-1}\binom{x}{y}\right) = 0$ が成り立ち，その $\binom{x}{y}$ は C_f 上の点 (x, y) に対応する位置ベクトルです．したがって，その方程式は曲線 C_f を表す方程式になります：

$$C_f : F\left(A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0.$$

よって，曲線 $C : F\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ を線形変換 $f : A$ によって移された曲線 C_f の方程式は，$F\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ の $\binom{x}{y}$ を単に $A^{-1}\binom{x}{y}$ で置き換えればよいことになります．このことを C の元の表現 $F(x, y) = 0$ に戻していうと，$F(x, y) = 0$ の変

数 x, y を $A^{-1}\binom{x}{y}$ の x, y 成分でそれぞれ置き換えると，$f: A$ で変換された曲線 C_f の方程式が得られるというわけです．§§5.3.1.3 の斜めの軸をもつ放物線や，§§5.3.2.4 の楕円の 45° 回転の問題を上の方法でやり直してみると非常にすっきりした議論になるでしょう．$R_{45}^{-1}\binom{x}{y}$ の x, y 成分がそれぞれ $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$ となることを確認して，もう一度読み直してみましょう．

9.1.3.6　行列の累乗とケーリー・ハミルトンの定理

任意の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その‘2 次の’多項式

$$f(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$$

を計算してみましょう．$f(A) = (A-aI)(A-dI) - bcI$ と変形しておくと少し簡単になるでしょう．なんと，零行列 O になりましたね．このことは，任意の行列 A に対して，

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O,$$

$$\text{よって}\qquad A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

が成り立つ，つまり A の‘2 次の’項 A^2 は A の 1 次式で表されることを意味します．同様に，上の等式を繰り返して用いると，A^n ($n = 3, 4, \cdots$) もやはり A の 1 次式で表されますね．したがって，‘行列の多項式には次数の概念が基本的にない’のです．

次数を持ち込むためには，例えば上の多項式に対して，始めに実数 x の 2 次の多項式

$$f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

を用意しておいて，その x を行列 A で置き換え，定数項に単位行列 I をつけた

$$f(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$$

を A の 2 次の多項式 $f(A)$ と定義します．一般の行列の多項式を定義するときも，同様に，実数の多項式から出発します．

$f(x)$ については

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \\ &= (x-a)(x-d) - bc = (a-x)(d-x) - bc \\ &= \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

のように 2 次の行列式で表され，さらに $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ だから

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= |A - xI| \end{aligned}$$

と表されることに注意しておきましょう．

任意の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$$

が成り立つことは **ケーリー・ハミルトンの定理** として知られています．$f(x)$ や $f(A)$ は行列の理論において重要な役割を演じます．

さて，任意の高次の行列の多項式 $F(A)$ を A の 1 次以下の式で表す簡単な方法を示しましょう．行列の多項式 $F(A)$ に対応する x の多項式 $F(x)$ を 2 次の多項式 $f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ で割り，その商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ としましょう：

$$F(x) = f(x)Q(x) + R(x).$$

ここで x を A で置き換えると，ケーリー・ハミルトンの定理より $f(A) = O$ だから

$$F(A) = R(A)$$

が成立します．$f(x)$ は 2 次なので $R(x)$ は 1 次以下，よって $R(A)$ も A の 1 次以下の式になります．

問題をやるとよくわかるでしょう．$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき A^6 を求めよ．ヒント：$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ と $f(x)$ が因数分解されることを利用します．

$F(x) = x^6$ とおいて $f(x)$ で割り，商を $Q(x)$，余りを $R(x) = px + q$ とすると

$$F(x) = x^6 = (x+1)(x-3)Q(x) + px + q.$$

よって，$F(-1) = (-1)^6 = -p + q$，$F(3) = 3^6 = 3p + q$ より，$p = \dfrac{3^6 - 1}{4}$，$q = \dfrac{3^6 + 3}{4}$ が得られます．したがって，答は

$$\begin{aligned} A^6 = pA + qI &= \frac{3^6 - 1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3^6 + 3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^6 + 1 & 3^6 - 1 \\ 3^6 - 1 & 3^6 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ですね.

§9.2　行列の一般化

行列の次数を 2 次から 3 次，$\cdots$，n 次と一般化しましょう．その次数は対象になっている問題の未知数や変数の個数に一致します.

9.2.1　連立 1 次方程式と行列

2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

から始めましょう．2 つのベクトルが等しいとはそれらの各成分が等しいことでしたね：$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b,\ c = d$．このことを応用すると，連立方程式の各々をベクトルの各成分の方程式と見立てて，それをベクトル方程式のように表すことができます：

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これを

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表しましょう．ただし，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の積の計算方法は行列とベクトルの積の定義に従うものとします．すると，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として，両辺に $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ を左側から掛けると，$A^{-1}A = I$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} pd-qb \\ aq-cp \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と正しい解が得られます．

このことは，x，y が単なる未知数であってもそれらを並べてベクトルとして扱うことができ，行列の演算方法に従って計算できることを意味します．もし方程式が不能や不定の場合は係数の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列が存在しません[4)]．

さらに，同じ係数をもつ 2 組の連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \quad \begin{cases} az+bw=r \\ cz+dw=s \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

を考えます．前の §§ で注意したように，行列と行列の積に関する特徴

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

を逆手にとると，この 2 組の連立方程式は 1 つの行列の方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

にまとめることができ，係数行列の逆行列を左から掛けて正しい解が得られます．このことから，行列はベクトルを並べたものと解釈でき，また，‘ベクトルは行列の特別な場合’と見なすこともできます．

[4)] 不能は方程式に解がないこと，不定は解が無数にあるために解が定まらないことです．不能の場合は $ad-bc=0$ であり，不定の場合は，$a:c=b:d=p:q$ なので，$ad-bc=0$ に加えて $\begin{pmatrix} pd-qb \\ aq-cp \end{pmatrix} = \vec{0}$ も成り立ちます．

また，不定な解をもつ方程式 $ax + by = p$ を

$$(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p$$

と表したとき，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を特別な行列と見なしたわけですから，行ベクトル $(a \quad b)$ も行列と見なしましょう．

また，一般に不能な連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \\ ex + fy = r \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{と表し，}$$

3 行 2 列の行列なども考えることができます．左辺の行列とベクトルの積の計算方法は明らかでしょう．

3 つの方程式を連立して一般に解をもつものは 3 元の

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

ですね．今度は 3 行 3 列の行列が現れました．

9.2.2　一般の行列

9.2.2.1　*m* 行 *n* 列の行列

前の §§ の議論から，一般の m 行 n 列の行列 $(m,\ n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考えることは意味がありそうです．行列の成分の数が多いときは，第 i 行，第 j 列にある $(i,\ j)$ 成分を a_{ij} などと 2 重の添字をつけて表すのが便利です．すると m 行 n 列の行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように表すことができます．

ただし，いつでもこのように表すのは不便なので，$(i,\ j)$ 成分で代表させて

$$A = \left(a_{ij}\right)$$

のように表したりします．

m 行 n 列の行列を簡単のために $\boldsymbol{m \times n}$ **行列** といいます．特に，行と列が等しい $n \times n$ 行列を $\boldsymbol{n}$ **次の正方行列**，$m \times 1$ 行列を「m 次の列ベクトル」，$1 \times n$ 行列を「n 次の行ベクトル」といいます．

さて，2×2 行列で成立した演算を一般の行列に拡張して定義しましょう．

行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ の全ての成分を p 倍して得られる行列を pA で表します：

$$A = \left(a_{ij}\right) \quad \text{のとき} \quad pA = \left(pa_{ij}\right).$$

2 つの行列 $A,\ B$ が共に $m \times n$ 行列のとき，行列 $A,\ B$ は **同じ型** であるといいます．同じ $m \times n$ 型の行列 $A = \left(a_{ij}\right),\ B = \left(b_{ij}\right)$ の対応する成分が全て等しいとき，$A,\ B$ は等しいといい，$A = B$ で表します：

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}. \qquad (i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1,\ 2, \cdots, n)$$

同じ型の 2 つの行列 $A,\ B$ の対応する成分の和を成分とする行列を A と B の和といい，$A + B$ と書きます：

$$A = \left(a_{ij}\right),\ B = \left(b_{ij}\right) \quad \text{のとき} \quad A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right).$$

なお，同じ型の行列 $A,\ B$ の差 $A - B$ は和 $A + (-1)B$ と定めます．

9.2.2.2　行列の積

行列の積については，前の §§ で見たように，同じ型の正方行列の積の場合でなくても定義できます．方程式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = p$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = p$$

と表して，行ベクトルと列ベクトルの積を導入しましょう．この積はベクトルの内積に当たります．この行ベクトル，列ベクトルはそれぞれ $1 \times n$，$n \times 1$ 型の行列ですね．

2 つの行列 $A=\left(a_{ij}\right)$，$B=\left(b_{ij}\right)$ の積 AB は，A，B がそれぞれ $m\times n$ 型，$n\times l$ 型の行列のとき定義できます．積 AB が表す行列を $C=\left(c_{ij}\right)$ として

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \vdots & b_{nl} \end{pmatrix}=C=\left(c_{ij}\right),$$

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

のように定義しましょう．このとき $C=AB$ は $m\times l$ 型の行列になります．この行列の積の定義はこれまで議論してきたものをそのまま一般化したものになっていますね．

行列 A，B の積 $AB=C$ の $(i,\ j)$ 成分 c_{ij} は多くの項の和になっています．こんな場合に便利な，また使い慣れると強い味方になる，和の記号 $\overset{\text{シグマ}}{\Sigma}$ を導入しましょう[5]．整数の変数 k に対して，k の式 $f(k)$（例えば，$f(k)=k^2$，または $f(k)=a_k$ など）が与えられたとき

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)=\begin{cases} f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\cdots+f(n) & (m<n) \\ f(m) & (m=n) \end{cases}$$

と定義しましょう（$m>n$ のときは定義されません）．この Σ 記号を用いると $m\times n$ 型の行列 A と $n\times l$ 型の行列 B の積は

$$AB=\left(a_{ij}\right)\left(b_{ij}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$$

のように表されます．

では，ここで練習です．次の積を求めよ．

$$\text{(i)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\qquad \text{(ii)}\quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

[5] Σ はギリシャ文字でローマ字の S に当たります．英語の Sum（和）の意味で Σ を使います．

(ii) のヒント：列ベクトルは 3×1 行列，行ベクトルは 1×3 行列ですから，積は 3×3 行列になります[6)]．答は

$$\text{(i)}\quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad \begin{pmatrix} pa & pb & pc \\ qa & qb & qc \\ ra & rb & rc \end{pmatrix}.$$

9.2.2.3　行列の演算法則

行列の和・実数倍・積の定義から得られる演算法則をまとめて列挙します．

和について

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

実数倍について

$$(p + q)A = pA + qA, \qquad p(A + B) = pA + pB, \qquad p(qA) = (pq)A.$$

積について

$$(AB)C = A(BC), \qquad A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC, \qquad p(AB) = (pA)B = A(pB).$$

このうち，積に関する結合法則 $(AB)C = A(BC)$ を除くと容易なので，それらの証明は君たちに任せます．$(AB)C = A(BC)$ を示すのに，A，B，C を成分表示しておいて，それらの積の行列を直接求めるのはいくら何でも無謀ですから，Σ をうまく活用しましょう．ただし，3 つの行列の積ですから 2 重の Σ が現れます．

証明に先立って，計算に必要な公式を導いておきましょう．

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \sum_{l=1}^{n} x_l = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

$$\text{よって}\quad \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{l=1}^{n} x_l.$$

つまり，Σ の変数は整数であれば何でもよいわけです．次に，

6) これはただのお遊びではありません．大学で trace というものを習うと実際に現れます．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(ax_k+by_k) &= (ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)+\cdots+(ax_n+by_n)\\ &= (ax_1+ax_2+\cdots+ax_n)+(by_1+by_2+\cdots+by_n)=\sum_{k=1}^{n}ax_k+\sum_{k=1}^{n}by_k\\ &= a\,(x_1+x_2+\cdots+x_n)+b\,(y_1+y_2+\cdots+y_n)=a\sum_{k=1}^{n}x_k+b\sum_{k=1}^{n}y_k\,.\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ax_k+by_k)=\sum_{k=1}^{n}ax_k+\sum_{k=1}^{n}by_k=a\sum_{k=1}^{n}x_k+b\sum_{k=1}^{n}y_k\,.$

注意すべきは

$$\sum_{k=1}^{n}(x_ky_l+x_ky_m)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_l+\sum_{k=1}^{n}x_ky_m=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)y_l+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)y_m$$

です．k と l, m が無関係なので，y_l, y_m は x_k に対して定数です．

では，$(AB)C=A(BC)$ を示しましょう．$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$C=(c_{ij})$ をそれぞれ $m\times p$，$p\times q$，$q\times n$ 行列としましょう．積の行列 AB，BC の $(i,\ j)$ 成分を表すのに記号 $(AB)_{ij}$，$(BC)_{ij}$ も用いましょう：

$$AB=\Big((AB)_{ij}\Big)=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right),\qquad BC=\Big((BC)_{ij}\Big)=\left(\sum_{l=1}^{q}b_{il}c_{lj}\right),$$

$$\text{また，}\qquad (AB)_{il}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kl},\qquad (BC)_{kj}=\sum_{l=1}^{q}b_{kl}c_{lj}.$$

これで準備ができました．$A(BC)$ から $(AB)C$ を導きます．

$$\begin{aligned}A(BC) &= \left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,(BC)_{kj}\right)=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q}b_{kl}c_{lj}\right)\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,(b_{k1}c_{1j}+b_{k2}c_{2j}+\cdots+b_{kq}c_{qj})\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{k1}c_{1j}+a_{ik}b_{k2}c_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kq}c_{qj})\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{k1}c_{1j}+\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{k2}c_{2j}+\cdots+\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kq}c_{qj}\right)\\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j}+\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kq}\right)c_{qj}\right)\\ &= \Big((AB)_{i1}c_{1j}+(AB)_{i2}c_{2j}+\cdots+(AB)_{iq}c_{qj}\Big)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{q}(AB)_{ik}c_{kj}\right)=(AB)C\,.\end{aligned}$$

これで，$(AB)C=A(BC)$ が示されましたね．

9.2.3　3 元連立 1 次方程式

この章の始めに 2 元連立 1 次方程式の解を 2 次の行列式を用いて表しましたね．ここでは，3 元連立 1 次方程式に対して同様のことを試みましょう．その際に直交するベクトルの内積が 0 であることを用いるので，先に 2 元連立方程式で練習しましょう．

2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \iff x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

を考えます．最後の表式に注目しましょう．x の解を求めるには，ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ に直交するベクトル，例えば $\begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix}$ を両辺に内積して，y の項を消去すればよいですね：

$$\begin{aligned} x(d \quad -b)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y(d \quad -b)\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = (d \quad -b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &\iff (ad-bc)x = pd-qb \\ &\iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ここで，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ は 2 次の行列式です．y の解を求めるのは君たちの練習にしましょう．

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \iff x\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

も同様に考えます．x の解を求めるには空間ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルが必要です．このようなベクトルは §§8.3.4.5 で学んだ外積ですね．よって，外積

$$\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ei-hf \\ hc-bi \\ bf-ec \end{pmatrix}$$

を方程式の両辺に内積して

$$(a(ei-hf)+d(hc-bi)+g(bf-ec))x = p(ei-hf)+q(hc-bi)+r(bf-ec)$$

が得られます．

　ここで，x の係数 $\varDelta = a(ei-hf)+d(hc-bi)+g(bf-ec)$ を式変形して，方程式の係数で作られる行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

との対応が見やすいようにしましょう．2 次の行列式を用いると

$$\begin{aligned} \varDelta &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \end{aligned}$$

のように表すことができます．$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ は a と，係数の行列 A で a を含む行と列を除いてできる，小行列 $\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$ の行列式との積と考えることができます．$d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$，$g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ も同様に考えます．2 行目の符号因子 $(-1)^{i+j}$ は，見かけ上全ての項を和の形に表すためのもので，a，d，g が係数行列 A の $(1,1)$，$(2,1)$，$(3,1)$ 成分であることを利用しています．

　上の $\varDelta$ の表式はとても見通しがよいので，3 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

によって定義しましょう．すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} x &= p(ei-hf)+q(hc-bi)+r(bf-ec) \\ &= \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となるので，x は 3 次の行列式を用いて表されます（確かめましょう）．

同様に，方程式 $x\begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}c\\f\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ から，外積を用いて x, z の項を消すと y が，x, y の項を消すと z が得られます．このとき，3 次の行列式を整理し直すと，容易に得られる定理

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}e\begin{vmatrix}a&c\\g&i\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}h\begin{vmatrix}a&c\\d&f\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+3}c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}f\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}i\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}$$

を用いると

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}y=\begin{vmatrix}a&p&c\\d&q&f\\g&r&i\end{vmatrix},\qquad\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}z=\begin{vmatrix}a&b&p\\d&e&q\\g&h&r\end{vmatrix}$$

と表すことができます．

200 年以上も前に，日本が誇る江戸時代の数学者 関孝和 はこれらの結果を独力で見いだしたのでした．残念なことに，当時の日本にはこのような高度な数学を必要とする産業がまだなく，彼の研究を発展させる素地はありませんでした．

§9.3　2 次曲線と行列の対角化

「固有値」,「固有ベクトル」と呼ばれるものの議論を根本から行います．ここの議論は大学入試対策というよりはむしろ大学の「線形代数」を視野に入れています．ここでは 2 次曲線を扱いますが，その方法はそのまま現代科学の最先端の分野に応用されていきます．この § を読み終えた後に,‘ なぜ行列を学ぶか ’ について納得するための手がかりが得られれば幸いです.

9.3.1　楕円・双曲線の方程式

楕円や双曲線の方程式を行列を用いて表しましょう．方程式が標準形であるか，そうでないかがその行列に反映されます．

9.3.1.1　標準形の方程式

§§5.3.2 と 5.3.3 で学んだ楕円や双曲線の方程式の標準形

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \pm\frac{x^2}{a^2}\mp\frac{y^2}{b^2}=1$$

をまとめて,

$$C:\alpha x^2+\beta y^2=1$$

と表しましょう．これを行列を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} C:\alpha x^2+\beta y^2=1 \quad&\Leftrightarrow\quad (x \quad y)\begin{pmatrix}\alpha x\\ \beta y\end{pmatrix}=1\\ &\Leftrightarrow\quad (x \quad y)\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=1\end{aligned}$$

のように表すことができますね．以下，これを分析しましょう．

ここに現れた行列

$$D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

は，例えば，$\alpha=\dfrac{1}{3^2}$，$\beta=\dfrac{1}{2^2}$ ならば C の方程式が長軸 3×2，短軸 2×2 の楕円を表すことがわかるように，曲線 C を決定づける要素のほとんど全てを含む重要な行列です．行列 D は対角の (1, 1)，(2, 2) 成分のみが 0 でないので**対角行列** と呼ばれます．もし D が対角行列でなく，例えば $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ だとしたら C はどんな曲線かわかりませんね.

9.3.1.2　曲線の回転

標準形 $C:(x \quad y)D\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=1$ に対して，その ‘ 形や大きさを変えない線形変換 ’，例えば §§9.1.1.2 で学んだ原点周りの回転を行い，変換後の曲線 C' の方程式がどうなるか調べましょう.

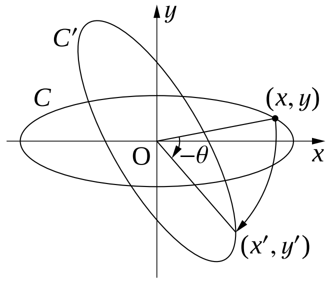
標準形 C を原点の周りに角 $-\theta$ だけ回転[7]して得られる曲線を C' としま

[7] 回転角を $+\theta$ としないで $-\theta$ としたことには大した意味はありません．そのほうが式が見やすくなるというだけのことです.

しょう．このとき，C 上の点 $(x,\ y)$ に対応する C' 上の点を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f_{-\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ \left(= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \text{と略記}\right)$$



ですね．$(x,\ y)$ は C 上の点，$(x',\ y')$ は C' 上の点ですから，C' の方程式は変数 $x',\ y'$ を用いて表されます．それを得るには，C の方程式が変数 $x,\ y$ で表されていることを利用して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{-\theta}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{\theta}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

を C の方程式に代入すればよいわけです[8)]．

そのような代入には，$C : (x \quad y)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ ですから，列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ で表すのに加えて，行ベクトル $(x \quad y)$ を $(x' \quad y')$ で表す必要があります．議論の全体像が把握できるように，一般論で説明しましょう．

行ベクトル $(x \quad y)$ は，列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の行と列の成分を入れ替えて得られる行列で，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の **転置行列** といいます．これを

$$(x \quad y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$$

と表しましょう．一般の行列 $A = (a_{ij})$ に対しては，その転置行列 A^T の $(i,\ j)$ 成分を a'_{ij} と書くと

$$A^T = (a'_{ij}) = (a_{ji})$$

が転置行列の定義になります．

8) 角 α の回転の逆は角 $-\alpha$ の回転ですから

$$R_{\alpha}^{-1} = R_{-\alpha}$$

が成り立ちますね．この関係は逆行列を直接に計算しても得られます．

列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ の転置行列を得るために必要な定理は

$$(AB)^T = B^T A^T$$

です．$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ をそれぞれ $m \times p$，$p \times n$ 行列とすると，B^T，A^T はそれぞれ $n \times p$，$p \times m$ 行列で，

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} \right), \\ B^T A^T &= \left(\sum_{k=1}^{p} b'_{ik} a'_{kj} \right) = \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} \right) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} \right) \end{aligned}$$

が得られます．したがって，両者は一致しますね．

この定理を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に適用して

$$\begin{aligned} (x \quad y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T &= \left(R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T R_\theta^T \\ &= (x' \quad y') R_\theta^T \end{aligned}$$

が得られます．

以上の結果を標準形 $C : (x \quad y) D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ に代入すると，変数 x'，y' で表される方程式，つまり C' の方程式が得られます：

$$C' : (x' \quad y') R_\theta^T D R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{ただし} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}.$$

整理して

$$C' : (x' \quad y') A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{ただし} \quad A = R_\theta^T D R_\theta = \begin{pmatrix} c^2\alpha + s^2\beta & -cs(\alpha - \beta) \\ -cs(\alpha - \beta) & s^2\alpha + c^2\beta \end{pmatrix}$$

となります．行列 A には非対角の (1, 2)，(2, 1) 成分があるので $x'y'$ 項が現れ，方程式だけを見ても C' がどんな曲線か見当がつきませんね．以下で学ぶ数学理論は，それを可能にすると豪語してます．

9.3.1.3　曲線の対称軸と基底の変換

曲線 C' に現れた非対角の行列 A が何であっても C' の正体を明らかにする方法を考えましょう．

まず，標準形 $C : (x \quad y)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ に戻って考えてみましょう．楕円や双曲線の ‘ 標準形はその 2 つの対称軸が x 軸，y 軸に平行 ’ な配置になっていますね．このことは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

と表して，§§7.4.1 と 7.4.2 で議論したベクトルの 1 次結合の議論を思い出すと，確認できます．基本ベクトル $\vec{e}_1$ の係数が x，$\vec{e}_2$ の係数が y ですから，$\vec{e}_1$ 方向に x 軸，$\vec{e}_2$ 方向に y 軸をとっていますね．位置ベクトル $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ は，もちろん，xy 座標系の点 $(x,\ y)$ に対応する，正確にいうと，xy 座標系の座標が $(x,\ y)$ である点に対応します．

さて，標準形 C を角 $-\theta$ だけ回転して，曲線 $C' : (x' \quad y')\, R_\theta^T D R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$ に変換するには，関係

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{+\theta}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

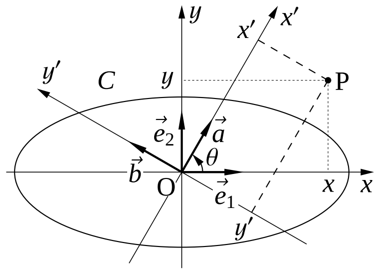
を用いて，C の方程式 $(x \quad y)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ の x，y を x'，y' で表すだけで済みました．上の関係を基本ベクトルの観点から見直して，C' のもう 1 つの表し方を試みましょう．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta\left(x'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x' R_\theta \vec{e}_1 + y' R_\theta \vec{e}_2$$

より，$R_\theta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ はベクトルの 1 次結合の形で表すことができますね．

左辺はふつうの基本ベクトルの 1 次結合ですが，右辺は基本ベクトルを角 θ だけ回転したベクトル $\vec{a} = R_\theta \vec{e}_1$，$\vec{b} = R_\theta \vec{e}_2$ の 1 次結合です：

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{a} + y'\vec{b}.$$



右辺の 1 次結合は §§7.4.2 で議論したように，$\vec{a}$ の係数が x'，$\vec{b}$ の係数が y' ですから，ベクトル $\vec{a}$ 方向に x' 軸，$\vec{b}$ 方向に y' 軸をとったことになります．これを $x'y'$ 座標系ということにしましょう．この座標系は，$\left|\vec{a}\right| = 1$，$\left|\vec{b}\right| = 1$，$\vec{a} \perp \vec{b}$ なので,「正規直交座標系」といわれます.

左辺の位置ベクトル $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ が xy 座標系の座標 $(x,\ y)$ である点 P を表すとすると，上の等式によって，同じ点 P は $x'y'$ 座標系においては座標 $(x',\ y')$ で表されます.

座標軸の向きを決める ‘ 基本ベクトル ’ のことを **基底** といい，特に $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ を「標準基底」といいます．ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の基底は標準基底です．$x'y'$ 座標系のベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ が基底 $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いていることを示すために，記号

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_\theta = x'\vec{a} + y'\vec{b}\ \left(= R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

を用いましょう．すると，$C' : (x' \quad y')R_\theta^T D R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$ は

$$C' : (x' \quad y')_\theta D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_\theta = 1$$

と表されます．この結果は，C の方程式 $(x \quad y)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ で，基底を標準基底から $\vec{a}$，$\vec{b}$ 基底にとり替えただけで得られました.

以上の議論から

$$\text{座標の角} - \theta \text{ 回転 } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{基底の角} + \theta \text{ 回転 } x'\vec{a} + y'\vec{b} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

であることがわかります．つまり，‘ 回転した結果は新しい基底の座標で元の曲線を眺めることと同じである ’ というわけです．実際，$x'y'$ 座標系で見ると標準形 C のグラフは角 $-\theta$ だけ回転した曲線 C' のグラフのように見えますね．また，基底の議論をすると曲線 C' で $x'y'$ 項をもたらす非対角行列 $A = R_\theta^T D R_\theta$

が現れた理由が明らかになります．xy 座標系の標準基底 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ の方向が標準形 C の対称軸と同じ方向であるのに対して，$x'y'$ 座標系の基底 $\vec{a}$，$\vec{b}$ の方向は C の対称軸の方向と異なるからですね．

今度は，標準基底を用いて表された曲線 C' の方程式 $(x' \quad y')A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$（ただし $A = R_\theta^T D R_\theta$）に対して，基底の変換を行って標準形に戻しましょう．曲線 C' の対称軸は座標軸と角 $-\theta$ だけずれています．そこで，標準基底を角 $-\theta$ だけ回転して得られる基底 $R_{-\theta}\vec{e}_1$，$R_{-\theta}\vec{e}_2$ を用いることにして，対称軸と基底の方向が同じになるようにしてみましょう．新たな座標系を uv 座標系とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 = u\,R_{-\theta}\vec{e}_1 + v\,R_{-\theta}\vec{e}_2 \left(= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta} \text{と表す} \right)$$

と表されます．新たな基底を用いて得られる曲線を $C'_{-\theta}$ としましょう．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{-\theta}(u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2) = R_{-\theta}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta}$$

より，C' の $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，$(x' \quad y')$ に $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta}$，$(u \quad v)_{-\theta}$ を代入すると，$R_\theta^T = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ に注意して

$$C'_{-\theta} : (u \quad v)_{-\theta} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (u \quad v) R_{-\theta}^T A R_{-\theta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1,$$

$$\text{よって} \quad C'_{-\theta} : (u \quad v) A' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1,\ \text{ただし} \quad A' = R_\theta A R_{-\theta}$$

が得られます．この表式で現れた行列 A' は，$A = R_\theta^T D R_\theta$ より

$$\begin{aligned} A' &= R_\theta A R_{-\theta} = R_\theta (R_\theta^T D R_\theta) R_{-\theta} = (R_\theta R_\theta^T) D (R_\theta R_{-\theta}) \\ &= D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，A' が対角行列 D になるので，曲線 $C'_{-\theta}$ の方程式は $\alpha u^2 + \beta v^2 = 1$ となり，$C'_{-\theta}$ がどんな曲線であるか特定できるようになります．

以上の議論から，曲線の対称軸と基底の方向を同じにすることが決定的に重要であることがわかりました．基底の変換の方法は，曲線の方程式を意識することなく，単に基底ベクトルをとり替えればよいだけなので，非常に有力な方法です．

9.3.2　行列の対角化

基底の変換の方法を学びました．それを未知の曲線 $C_{?} : (x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ に適用し，その曲線がどんなものであるかを明らかにする一般的な方法を考えましょう．その方法は，真に一般的であり，我々が扱う問題より遙かに広い分野の問題に適用でき，科学・技術の最先端で応用されています．

9.3.2.1　固有値と固有ベクトル

基底をどのようにとるべきかを調べるために，まず，前の §§ で議論した曲線

$$C'_{-\theta} : (u \quad v)A'\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \quad (A' = D) \quad \Leftrightarrow \quad (u \quad v)_{-\theta} A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta} = 1\,,$$

$$\text{ただし} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u\,R_{-\theta}\vec{e}_1 + v\,R_{-\theta}\vec{e}_2, \quad A = R_\theta^T D R_\theta$$

の行列 A' が対角行列 $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ になった理由を，基底 $\vec{a} = R_{-\theta}\vec{e}_1$，$\vec{b} = R_{-\theta}\vec{e}_2$ と行列 A の関連で調べましょう．

A を基底 $\vec{a}$，$\vec{b}$ に掛けてみましょう．$R_\theta^T = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ に注意して

$$A\vec{a} = (R_\theta^T D R_\theta)R_{-\theta}\,\vec{e}_1 = R_\theta^T\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha R_{-\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\vec{a},$$

$$\text{よって} \quad A\vec{a} = \alpha\vec{a},$$

$$A\vec{b} = (R_\theta^T D R_\theta)R_{-\theta}\,\vec{e}_2 = R_\theta^T\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta R_{-\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\vec{b},$$

$$\text{よって} \quad A\vec{b} = \beta\vec{b}$$

となります．この結果は，$A\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{a}$，$A\vec{b} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ で，かつ比例定数が曲線の基本的性質を表す α，β であることを意味します．

上で得られた結果は一般的な議論をする際にも重要であると考えられ，α，β は行列 A の **固有値**，$\vec{a}$，$\vec{b}$ はそれぞれ固有値 α，β に対する A の **固有ベクトル** といわれます．

9.3.2.2　行列の対角化

今までの議論を活用して，未知の曲線（楕円か双曲線）

$$C_? : (x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

の種別や形および対称軸を明らかにしましょう．一般的な方法を用いて議論します．

A は非対角成分が 0 でない行列ですが，曲線 C' のときの議論で現れた非対角行列 $A = R_\theta^T DR_\theta$ の性質

$$A^T = (R_\theta^T DR_\theta)^T = R_\theta^T D^T (R_\theta^T)^T = R_\theta^T DR_\theta = A,$$

$$\text{よって} \quad A^T = A$$

を満たすとしましょう．この性質を満たす行列 A を **対称行列** といいます．

以下，行列 A の固有値・固有ベクトルを調べて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の基底を標準基底から固有ベクトルの基底に置き換えます．先の例では，回転を表す 1 次変換を用いて新しい基底 $\vec{a}$, $\vec{b}$ が得られましたね．ここでは，基底を変える変換に対して，回転行列の 1 性質 $R_\theta^T = R_\theta^{-1}$ については引き継ぐような線形変換 $f_P : P$ に一般化しましょう：

$$P^T = P^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad P^T P = I.$$

この性質をもつ行列 P を **直交行列** といい，それを表現行列とする線形変換 f_P を「直交変換」といいます．

この変換によって任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の長さが変わらないことは

$$\left| f_P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 = \left(P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y)P^T P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y)P^{-1}P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2,$$

$$\text{よって} \quad \left| f_P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|$$

が成り立つことによって保証されます．基底の長さももちろん変わりません．したがって，‘ 直交変換は曲線の形や大きさを変えません ’．

行列 A の固有値や固有ベクトルを求める方法の詳細は後回しにして，議論の全体を眺めてみましょう．標準基底 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ が変換 $f_P : P$ によって新たな基底 $\vec{a}$，$\vec{b}$ になるとしましょう：

$$P\vec{e}_1 = \vec{a}, \quad P\vec{e}_2 = \vec{b} \qquad \left(\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1\right).$$

このとき基底の直交性が保たれることは

$$\vec{a}^{\,T}\vec{b} = (1\ \ 0)P^TP\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (1\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{よって}\quad \vec{a} \perp \vec{b} = 0$$

からわかります．よって，この基底は正規直交基底です．

この変換によって標準基底のベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ は新しいベクトルで表されます：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= u\vec{a} + v\vec{b} = u\,P\vec{e}_1 + v\,P\vec{e}_2 = P(u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2)\\ &= P\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\left(= \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P \text{とおく}\right).\end{aligned}$$

よって，未知の曲線 $C_? : (x\ \ y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1$ は曲線

$$C_P : (u\ \ v)_P A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P = 1, \quad \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P = P\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

に（形や大きさを変えずに）変換されます．

このとき，P をうまく選んで基底 $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，行列 A の固有値 α，β に対応する，固有ベクトルになったとしましょう：

$$A\vec{a} = \alpha\vec{a}, \qquad A\vec{b} = \beta\vec{b}.$$

すると

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P &= A(u\vec{a} + v\vec{b}) = u\alpha\vec{a} + v\beta\vec{b} = u\alpha P\vec{e}_1 + v\beta P\vec{e}_2\\ &= P\left(u\alpha\vec{e}_1 + v\beta\vec{e}_2\right)\end{aligned}$$

となります．

ここで，$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を満たす行列 D を求めましょう．直感的には $D = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}$ ですが，$D = \begin{pmatrix}p & r\\q & s\end{pmatrix}$ とおいて

$$D\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & r\\q & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & r\\q & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{よって}\quad p = \alpha,\ q = r = 0,\ s = \beta$$

より確かめられます．よって

$$A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P = P\left(u\,D\vec{e}_1 + v\,D\vec{e}_2\right) = PD\left(u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2\right) = PD\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

$$\text{よって}\quad A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P = PD\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}$$

が得られます．

したがって，C_P の方程式は

$$C_P : (u\ \ v)_P A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P = 1 \iff (u\ \ v)_P \left(A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P\right) = 1 \iff (u\ \ v)P^T\left(PD\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = 1$$
$$\iff (u\ \ v)D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = 1 \iff \alpha u^2 + \beta v^2 = 1$$

と標準形になります．よって，未知の曲線 $C_?$ を特定するには，基底を行列 A の固有ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ にとればよいことがわかります．また $C_?$ の 2 つの対称軸の方向は固有ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の方向であること，その 2 つの方向が直交することもわかりますね．

またこれらのことは，

$$A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_P = PD\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \iff AP\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = PD\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

において $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ は任意のベクトルなので省くことができ，行列を用いて

$$AP = PD \iff D = P^{-1}AP$$

のように表すことができます．

9.3.2.3　**固有値問題**

行列 A の固有値・固有ベクトルを決定しましょう．それらを決める 2 つの方程式

$$A\vec{a} = \alpha\vec{a} \quad (\vec{a} = P\vec{e}_1, \quad \left|\vec{a}\right| = 1),$$
$$A\vec{b} = \beta\vec{b} \quad (\vec{b} = P\vec{e}_2, \quad \left|\vec{b}\right| = 1)$$

をまとめて扱うように固有値を λ（ラムダ），対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ で表しましょう：

$$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right| = 1.$$

この方程式を

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{0}$$

と表すと解法が見えてきます．もし，行列 $A - \lambda I$ の逆行列 $(A - \lambda I)^{-1}$ が存在するとすれば，それを方程式の両辺に左から掛けると $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{0}$ となり，$\left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right| = 1$ に矛盾します．よって逆行列は存在せず，$A - \lambda I$ の行列式は 0 になります：

$$|A - \lambda I| = 0.$$

これは A の固有値を決定する方程式になるので，A の **固有方程式** といいます．

行列 A を成分表示して固有値を求めましょう．A は対称行列 $(A = A^T)$ としていましたので，一般に $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ の形です．よって，固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

となります．λ の 2 次方程式を解いて固有値

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4b^2}\right) = \alpha,\ \beta$$

を得ます．我々が関心のあるのは曲線 $C_{?}$ に xy 項がある $b \neq 0$ のときで，その場合には異なる 2 実数解があります．

固有値 $\lambda=\alpha,\beta$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ を求めるには，方程式

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ b & d-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(a-\lambda)p+bq=0\\ bp+(d-\lambda)q=0\end{cases}$$

を p,q について解きます．このとき，$(A-\lambda I)^{-1}$ は存在しないので，方程式 $(a-\lambda)p+bq=0$ と $bp+(d-\lambda)q=0$ は同値です[9]．この場合は片方の方程式から p と q の比のみが決まり，$p:q=b:(\lambda-a)\ (=(\lambda-d):b)$ より

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=k_\lambda\begin{pmatrix}b\\ \lambda-a\end{pmatrix},\quad k_\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2+(\lambda-a)^2}}$$

となります．比例定数 k_λ は $\left|\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\right|=1$ を満たすために必要です．λ に $\alpha,\ \beta$ を代入して，対応する固有ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ が

$$\vec{a}=k_\alpha\begin{pmatrix}b\\ \alpha-a\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=k_\beta\begin{pmatrix}b\\ \beta-a\end{pmatrix}$$

と表されます．

ここで練習問題です．行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}$ の固有値 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ と対応する固有ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ を求めよ．ノーヒントです．答は $\alpha=2,\ \beta=-3$,

$$\vec{a}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\qquad \text{（複号同順とは限らない）}$$

です．$A\vec{a}=2\vec{a},\ A\vec{b}=-3\vec{b}$ を確かめましょう．また $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交することも確かめましょう．

固有ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ は符号の不定性を除いて定まりました．今度は

$$\vec{a}=P\vec{e}_1,\quad \vec{b}=P\vec{e}_2,\quad P^TP=I$$

を用いて，基底を変換する行列 P を求めましょう．

$$P=\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}$$

[9] 2 直線 $ax+by=0,\ cx+dy=0$ の交点を求める方程式は $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ として $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$ と表されますね．このとき，A^{-1} が存在しないなら，つまり $ad-bc=0 \quad\Leftrightarrow\quad a:b=c:d$ ならば，2 直線は一致しますね．これと同じことです．

と成分表示して上式に代入すると

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

となるので，P の第 1 列の成分は $\vec{a}$ の成分に一致し，第 2 列の成分は $\vec{b}$ の成分に一致しますね．よって，基底を変換する行列 P は固有ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を並べて作られる行列であることがわかります．このことを

$$P = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$$

と表しましょう．なお，このとき P が直交行列であるための条件 $P^T P = I$ は，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 1$，$\vec{a} \perp \vec{b}$ より自動的に満たされています．固有ベクトルに符号の不定性があっても $P^T P = I$ を満たすのを確かめましょう．

議論で抜けていた部分がこれで補われました．今までの議論を簡単にまとめてみましょう．未知の曲線 $C_?$: $(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ を調べるために，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ の基底を，標準基底 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ から，直交行列 P を用いて，行列 A の固有ベクトル $\vec{a} = P\vec{e}_1$，$\vec{b} = P\vec{e}_2$ で置き換えました：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\vec{a} + v\vec{b} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

固有値 $\lambda = \alpha, \beta$ は固有方程式 $|A - \lambda I| = 0$ から定まり，固有ベクトル $\vec{p} = \vec{a}$, $\vec{b}$ は方程式 $(A - \lambda I)\vec{p} = \vec{0}$ によって定まります．また，このとき $P = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$ と定まります．

この変換によって，$C_?$ は

$$C_P : (u \quad v)P^{-1}AP\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

に変換され，C_P に現れる行列は

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角行列になるので，固有値から未知の曲線 $C_?$ の種類と形状が，固有ベクトルの方向から対称軸の方向がわかります．

9.3.2.4　対角化の一般化

これまでの議論を一言でいうと,‘ 複雑なものを簡単なものに直す方法がある ’ということでしょうか．このすばらしい方法の一般化や適用範囲の拡張が試みられ，それはますます発展しています.

基底の変換は図形の方程式とは無関係に行うことができるので，扱う対象は 2 変数関数 $(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ でも構いません．また，この方法は，そのままの形で，n 変数の場合，つまり，一般の n 次元ベクトル $\vec{x}$ の場合に一般化することができます．何を $\vec{x}$ とするかは問題の対象によって千差万別ですが，ベクトルの演算法則を満たすものならば何でも構いません．大学の「線形代数」の講義はこのような n 次元ベクトル $\vec{x}$ が対象で，講義の約半分が n 元連立 1 次方程式に，残りの半分近くが対角化・固有値問題に当てられます.

両端が固定され，その間にバネでつながれた n 個の重りの振動の振る舞いの問題では，重りの釣り合いの位置からの変位が $\vec{x}$ になります．大学で工学系の分野に進まれる人は，この問題を固有値問題の練習としてやらされるでしょう．我々は積分の章でバネで結ばれた 2 つの重りの問題をとり上げ，行列の対角化・固有値問題との関係を具体的に議論します．振動が関係する問題では，力学的振動の他に，音波や電気回路にまで対角化の応用が広がっています.

確率に現れる‘ いろいろな状態 ’を並べたものもベクトル $\vec{x}$ とすることができます．その場合にはある状態から他の状態へ遷移する確率を行列にしたのが我々の行列 A に当たります．この分野でも行列の対角化は重要な位置を占めています．特に原子や電子などの極微の世界を扱う「量子力学」の分野では，その理論の組み立てそのものが行列の対角化から始まります.