第6章　指数関数・対数関数

同じ数を何度か掛けて得られる数，つまり**累乗**（るいじょう）（冪（べき））の起源は，おそらく正方形の面積や立方体の体積を求めることと関連して現れ，それはほとんど文明の起源近くまでさかのぼるでしょう．既に 4000 年前，古代バビロニアの学者は平方の表と平方根の表を作成し利用していました．2 乗・3 乗を平方・立方と呼ぶのは古代ギリシャに起源があるそうです．

数 a の n 乗 a^n の n を **指数** (exponent) といいます．指数は，最初はもちろん自然数に限定されていましたが，$(ab)^n = a^n b^n$ などの「指数法則」の一般化と共に，自然数から徐々に実数に拡張されていきました．15 世紀の初め，ペルシャの数学者はその著書に等式 $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ を記しています．ヨーロッパでも 15 世紀に 0 の指数，続いて負の整数の指数が $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ として導入されました．n 次方程式の解に現れる n 乗根については，14 世紀のフランスの数学者が $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ として分数指数を導入し，一般化された指数法則を述べています．

指数 n が実数の変数 x に拡張されたとき，「指数関数」

$$y = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

が生まれました．指数関数は，科学技術のみならず，産業革命によって発展した商業や金融の場においても，複雑な複利計算に現れます．

指数関数がより有用な役割を果たすのは，指数関数 $y = a^x$ を x について解いた（x を y で表した）として，それを「対数関数」

$$x = \log_a y \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

としたときです．対数関数では，後ほど示されるように，y が積 pq や商 $\dfrac{p}{q}$ の

形のとき，その関数は和や差の形で表すことができます：

$$\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q\,, \qquad \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q\,.$$

17 世紀の初め，天文学や航海術，生産の発展によって，大きな数値に対する精度の高い計算が要求されるようになり，数学者や技術者の大きな負担となっていました．積や商の計算よりは和や差の計算のほうが明らかに簡単です．惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道上を動くことを発見した偉大な天文学者ケプラー（Johannes Kepler，1571～1630，ドイツ）は，彼の弟子の作った y と $\log_a y$ の関係を表す「対数表」（当時は $a = 10$ の「常用対数表」）を利用して，膨大な計算を軽減していました．例えば，大きな数 p と q の積 pq を計算するには，$\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q$ と対数表を利用して，$\log_a p$ と $\log_a q$ を求めます．それらの和は $\log_a(pq)$ に等しいので，また対数表を利用して pq が求められます．

対数 (logarithm) の用語を導入し，より精度の高い対数表を 20 年以上も費やして完成したネイピア（John Napier，1550～1617，イギリス）や，彼に続く人々の対数表が科学技術の発展に果たした貢献は計り知れません．対数表を用いずに済むようになったのは 20 世紀後半にコンピュータが発明されてからです．それからまだ半世紀しか経っていません．

§6.1　指数関数

6.1.1　指数法則

累乗 a^n の指数 n を自然数から実数に拡張していくときに重要なのは指数法則と呼ばれる累乗に関する 3 つの定理です．そのことを詳しく議論しましょう．

6.1.1.1　自然数の指数

以下，m, n を自然数，a, b を実数としましょう．a^m と a^n の積は a を $m + n$ 回掛けた a^{m+n} になりますね．また，a^m を n 回掛けることは a を $m \times n$ 回掛けることと同じですね．また，ab を n 回掛けることは，a を n 回掛けたものにさ

らに b を n 回掛けたものになりますね．これら 3 つの性質の総称を **指数法則**

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

といいます．累乗に関する性質は指数法則によって完全に表されています．以下，我々は，累乗 a^n の指数 n を自然数から実数に拡張していき，一般化された累乗つまり指数関数 a^x を考えます．その理論的裏付けは一般化された指数法則から得られます.

6.1.1.2　有理数の指数

累乗の定義を，自然数 n を指数とする a^n から有理数 p を指数とする a^p に一般化しましょう．一般化するときには ‘ 指数が自然数の場合に成立していた累乗の性質が自然に拡張されること ’ が要請されます．その唯一の自然な方法は，指数法則を，自然数の場合に成立していた形と，同じ形で保存することですね．そこで，指数法則は，指数が有理数の場合にも，

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (a^p)^q = a^{pq}, \qquad (ab)^p = a^p b^p \qquad （p,\ q \text{ は有理数}）$$

となることを要請しましょう．このような要請は，実は，§§1.3.1 を読み返してみればわかるように，本来は自然数についての性質であった計算法則 (A3–5) を，§§1.3.1 や §2.3 において，負数や虚数に対しても ‘ 同じ形で成立するように仮定した ’ ことと同質であり，それは実質的に唯一の可能な拡張方法です．数学的概念を一般化するときになされるこのような要請は「普遍性の原理」とか「保存の原理」などと呼ばれています.

正数 a の平方根 $\sqrt{a}$ は，2 乗すると a になるので，$\sqrt{a}\sqrt{a} = a$ および $(\sqrt{a}\,)^2 = a$ が成立します．そこで，$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ と考えて（定義して），拡張された指数法則との整合性を調べると，$\sqrt{a}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$, $(\sqrt{a}\,)^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$ と好ましい結果が得られます．一般の n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ については

$$\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{a}}_{n\text{ 個}} = a, \quad \text{つまり} \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

が成立するので，同様の議論によって，

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

と定義すべきことがわかります．このとき，指数法則との整合性から，

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}},\ \text{よって}\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

と定めるべきことがわかります[1)]．

なお，方程式 $x^n = a$ は，x を n 乗すると a になるということです．したがって，n が偶数のときは，$a > 0$ の条件で正の実数解 $x = \sqrt[n]{a}$ と負の実数解 $x = -\sqrt[n]{a}$ があり，また，n が奇数のときは，a の正負によらずに 1 つの実数解 $\sqrt[n]{a}$（$a > 0$ のとき正，$a < 0$ のときは負）があります．また，$a = 0$ のときには，解は $\sqrt[n]{0} = 0$（n 重解）です．もし，方程式 $x^n = a$ の複素数解まで考えるときは，解は（k 重解を k 個と数えて）n 個あります．

次に，負の整数の指数を考えて，a^{-n} を

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

によって定義しましょう．そのとき，指数法則との整合性から，

$$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0,\quad a^n a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1,$$
$$\text{よって}\quad a^0 = 1\ (a \neq 0)$$

と定めなければなりません．また，

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = (a^{-m})^{\frac{1}{n}} = a^{-m\cdot\frac{1}{n}} = a^{-\frac{m}{n}},$$
$$\text{よって}\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

と定めるべきです．

上述の 2 つの定義が，拡張された指数法則を満たすことを，完全に正当化するためには，$p = \pm\frac{m}{n}$，$q = \pm\frac{m'}{n'}$（m'，n' は自然数）などとして，拡張された

---

1)
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,\qquad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m}$$

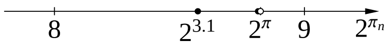
などの性質が成り立ちます．なお，$a > 1$ のとき $1 < \sqrt[n]{a} < a$，$0 < a < 1$ のとき $a < \sqrt[n]{a} < 1$ であることに注意しましょう．

指数法則に代入し，等号が成立することを示す必要があります．それには指数法則から累乗根を追い出すのがよいでしょう．例えば，$a^p a^q = a^{p+q}$ の両辺を nn' 乗して，$a^{(pn)n'} a^{n(qn')} = a^{(pn)n'+n(qn')}$ が成り立つことを示せば済みます．残りの 2 つの法則も成り立つことを示すのは君たちの練習問題としましょう．

6.1.1.3　実数の指数

指数関数を考えるためには指数を実数に拡張する必要があります．その議論の例解として，指数が無理数 $\pi = 3.141592653589793\cdots$ の場合を議論しましょう．無理数は循環しない無限小数で表されます．π の小数第 n 位までの近似（第 $n+1$ 位以下切り捨て）を π_n, つまり, $\pi_1 = 3.1$, $\pi_2 = 3.14$, $\pi_3 = 3.141, \cdots$ としましょう．このとき π_n は有理数であり，したがって，a^{π_n} $(a > 0)$ は指数が有理数の累乗です．

さて，a^{π_n} は，簡単のために $a = 2$ とすると，n と共に $2^{3.1} = 8.57418\cdots$, $2^{3.14} = 8.81524\cdots$，$2^{3.141} = 8.82135\cdots$，$2^{3.1415} = 8.82441\cdots$，$2^{3.14159} = 8.82496\cdots$, $2^{3.141592} = 8.824973\cdots$，$2^{3.1415926} = 8.824977\ \cdots$，$\cdots$ のように変化します．このことから，2^{π_n} は単調に増加し，ある一定の値（図の白丸）に急速に近づいていくように見えます．実際，$2^{\pi_{n+1}}$ と 2^{π_n} の比を考えると，$\dfrac{2^{\pi_{n+1}}}{2^{\pi_n}} = 2^{\pi_{n+1}-\pi_n} > 2^0 = 1$ より $2^{\pi_{n+1}} > 2^{\pi_n}$ だから，2^{π_n} は n と共に必ず増加します．



しかしながら，2^{π_n} が増加するとき，本当はいくらでも増加し，その上限がないという心配があります．実際には，$\pi_n = 3.1\cdots < 4$ より $\pi_n < 4$ が全ての n について成立するので，2^{π_n} は決して $2^4 = 16$ を超えて大きくなることはありません．このような条件の下では，‘ゴムを張った壁に向かって突進しても壁の手前で止まる’ようなもので，2^{π_n} は 16 以下の‘ある一定の値に下のほうから限りなく近づく’しかありませんね．そのような一定の値は「極限値」と呼ばれます．

数学では，2^{π_n} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のような数の並びの全体を考えて，それを「数列」と呼び，16 のように数列がそれを超えて大きくはなれない数があることを“上に有界”といい，また，数列が有限なある一定の値に限りなく近づく

ことを“収束する”といいます．そのとき,“上に有界な単調に増加する数列は収束する”という有名な定理が厳密に証明されています．同様に，数列がそれを超えて小さくなれない数があることを“下に有界”といい，定理:“下に有界な単調に減少する数列は収束する”が成立します．我々はこれらの定理を数列の章で証明しましょう．

$a = 2$ の場合で例解しましたが，$a > 0$ $(a \neq 1)$ の範囲にある場合は，n が限りなく大きくなるとき，同様にして，数列 a^{π_n} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ はある一定の値に限りなく近づくことがわかります．なお，$a = 0,\ 1$ のときは n によらずに $0^{\pi_n} = 0,\ 1^{\pi_n} = 1$ となります．また，$a < 0$ のときは，負数の偶数累乗根は存在しないので，数列 a^{π_n} そのものが定義されません．

数列 a^{π_n} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の極限値が存在することは，その極限値を‘無理数 π を指数とする累乗 a^{π} として定義できる’ことを意味します．任意の無理数 α に対しても，π のときと同様に，α を近似する有理数の数列 α_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考えれば，$n \to \infty$ のときの a^{α_n} の極限値 a^{α} が定義できます．

これらのことから，任意の実数 x に対して（拡張された）累乗 a^x を正の実数 a に対して定義することが可能になります．これで，全実数を定義域（x の変域）とする指数関数

$$y = a^x$$

を考えることができます．このとき，a $(a > 0)$ を指数関数 a^x の **底**（てい）といいます．$a = 1$ のときは，x によらずに $y = 1^x = 1$ となるので指数関数らしくなく，また，次の§の対数関数で示すように，対応する対数関数が関数にならないので，$a = 1$ を底としない約束です．

指数法則についても，任意の無理数 α, β の近似有理数列を α_n, β_n とすると

$$a^{\alpha_n}a^{\beta_n} = a^{\alpha_n+\beta_n}, \qquad (a^{\alpha_n})^{\beta_n} = a^{\alpha_n\beta_n}, \qquad (ab)^{\alpha_n} = a^{\alpha_n}b^{\alpha_n}$$

が全ての自然数 n に対して成立するので，n を無限に大きくしていった極限においても当然成立します[2)]．したがって，指数 $p,\ q$ を実数として，指数法則

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (a^p)^q = a^{pq}, \qquad (ab)^p = a^p b^p \qquad (p,\ q \text{ は実数})$$

が成立します．

[2)] 直感的には明らかでしょう．ただし，厳密な証明を行うには数列の極限についてかなりの知識が必要になります．我々はそれを数列の章以降で行いましょう．

6.1.2　指数関数とそのグラフ

指数関数 $y = f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ の特徴を調べてグラフを描いてみましょう．まず，定義域は全実数で，$f(0) = a^0 = 1$ だから，グラフは，a に無関係に，定点 $(0,\ 1)$ を通ります．また，$f(1) = a$ より，点 $(1,\ a)$ を通ります．

任意の関数 $f(x)$ に対して，その定義域にある任意の x_1, x_2 について，

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ となるとき，$f(x)$ は**単調増加**である

といい，

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ となるとき，$f(x)$ は**単調減少**である

といいます．単調に増加もしくは減少する関数は **単調関数** といわれます．

指数関数 $y = a^x$ について調べると，$x_1 < x_2$ のとき

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} \begin{cases} > 1 & (a > 1) \\ < 1 & (0 < a < 1) \end{cases}$$

が成り立ちます．よって，$a > 1$ のとき $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ だから，$y = a^x$ $(a > 1)$ は単調増加関数になります．また，$0 < a < 1$ のとき $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ だから，$y = a^x$ $(0 < a < 1)$ は単調減少関数です．なお，指数関数が連続関数であることはほとんど自明ですが，その厳密な証明には微分の知識が必要です．

変数 x が実数 c に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ が実数 α に限りなく近づくことを

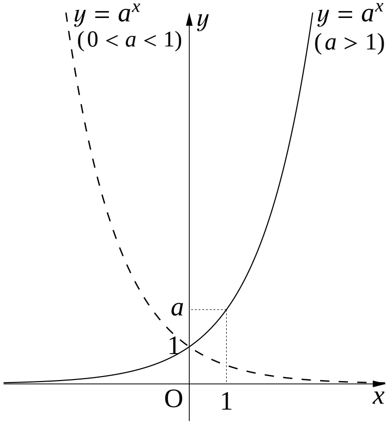
$$x \to c \text{ のとき } f(x) \to \alpha,$$

$$\text{または，}\quad f(x) \to \alpha\ (x \to c)$$

と表しましょう[3]．すると，$a > 1$ の場合ならば，$x \to +\infty$ のとき $a^x \to +\infty$，また，$x \to -\infty$ のとき $a^x \to 0$ と簡単に表され，$0 < a^x < +\infty$ $(a > 1)$ と関数の値域（y の変域）がわかります．また，$0 < a < 1$ の場合なら，$a^x \to 0$ $(x \to +\infty)$，$a^x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ だから，値域 $0 < a^x < +\infty$ $(0 < a < 1)$ がわかります．

[3] 便宜上，$c,\ \alpha$ が $\pm\infty$ となることも可とします．

これらのことをもとに，指数関数 $y = a^x$ のグラフを描いたのが右図です．実際には，$a > 1$ および $0 < a < 1$ の具体例として $a = 2$ と $a = \frac{1}{2}$ としていますが，指数関数の性質はよく表れています．$a > 1$ のとき，グラフは x の増加と共に急激に増加しますね．



1 時間に 1 回分裂するバクテリアは，1 日経つと，2^{24} ≒1700 万倍に増殖します．‘ 指数関数的に増加 ’ とはうまく言ったものです．たとえ $a = 1.1$ であったとしても，$1.1^{100} \fallingdotseq 13780$ ですから，例えば年利 10 %で借りたお金の 100 年後の元利合計は約 1 万 4 千倍近くにもなります．$0 < a < 1$ のときは，反対に，たちどころに減少し，限りなく 0 に近づきます．

図の 2 つのグラフは y 軸対称になっていますが，これは $a = 2, \ \frac{1}{2}$ としてあるからで，一般に，$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ ですから，$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフが $y = a^x$ のグラフに y 軸対称となることは，§§3.6.2.2 の y 軸対称性を読み返すまでもなく了解されるでしょう．

なお，定理

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2},$$

および

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x_1} < a^{x_2} & (a > 1) \\ a^{x_1} > a^{x_2} & (0 < a < 1) \end{cases}$$

が成立することは，グラフを見ればほとんど自明でしょう（同値記号 $\Leftrightarrow$ は記号 $\Leftarrow$ も含むので，右から左に向かって読むことも忘れないでネ）．これらの定理をきちんと証明するには指数関数が単調関数であることを用います．これらの性質は指数関数が関係する方程式や不等式の問題を解く際の基本公式で，指数関数の基本性質 $a^x > 0$ と共によく用いられます．

§6.2　対数関数

6.2.1　対数関数の導出とそのグラフ

x^2 の値が k と与えられたとき，思わず $x = \pm\sqrt{k}$ と解を求めてしまいますね．指数関数 $y = a^x$ においても，関数値 y の値を定めたとき x の値がいくらになるかは当然興味があることです．指数関数は単調関数なので，x と y は $1:1$ に対応し，x は y の関数と見なすこともできます．§§3.7.2.1 の逆関数のところで学んだ表現を使って，$y = f(x)$ を‘関数 f は実数 x を実数 y に移す’と読めば，y の値から x の値を求めることは‘実数 y を実数 x に移す’となります．そのことを $x = f^{-1}(y)$ で表し，f^{-1} を関数 f の逆関数と呼びました．$y = f(x)$ と $x = f^{-1}(y)$ は，例えば，$y = x^2$ $(x > 0)$ を x について解いて $x = \sqrt{y}$ $(y > 0)$ と表すのと同様，同じ物について異なる表現をしただけですから，それらは同値です：

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

よって，指数関数 $y = f(x) = a^x$ に対して，形式的に $x = f^{-1}(y) = \log_a y$ と表すと，同値関係

$$y = f(x) = a^x \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y) = \log_a y$$

が成立します．変数 x と y を交換すると，

$$x = f(y) = a^y \ \Leftrightarrow\ y = f^{-1}(x) = \log_a x$$

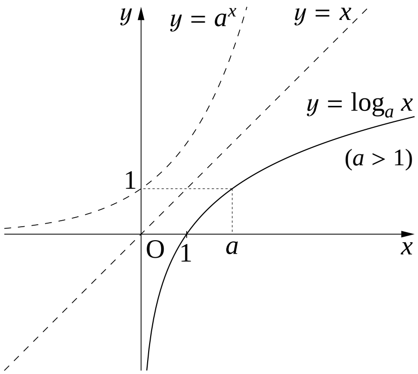
となり，関数 $y = f(x) = a^x$ の逆関数 $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ が得られます．関数

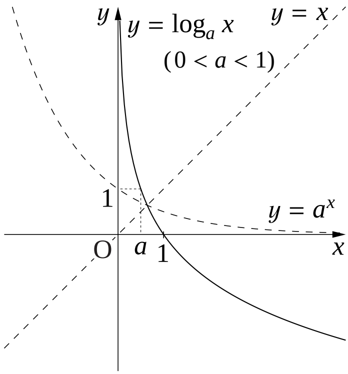
$$y = \log_a x$$

は **対数関数** といわれます．このとき，a を対数 $\log_a x$ の **底** といい，x を，歴史的いきさつから，対数 $\log_a x$ の **真数** と呼びます．

対数関数 $y = \log_a x$ は $x = a^y$ と同値なので，y が全実数を動くと x は正の全実数を動き，対数関数 $y = \log_a x$ の定義域は $x > 0$，値域は全実数となります．また，対数関数 $y = \log_a x$ は指数関数 $y = a^x$ の逆関数なので，対数関数の関数値は指数関数を利用して計算できます．

なお，底が 1 の対数関数？ $y = \log_1 x$ を考えると，$y = \log_1 x \Leftrightarrow x = 1^y = 1$ ですから，そのグラフは直線 $x = 1$ となり，$y = \log_1 x$ は関数になりません（何故でしょう）．これが対数の底 $a \fallingdotseq 1$ の理由で，対応する $y = 1^x$ を指数関数に含めなかったのもこのためです．§§ 3.7.2.1 の逆関数の議論から，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフとその逆関数 $y = a^x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称であることがわかります．





対数関数のグラフの特徴を見てみましょう．$y = \log_a x$ のグラフは，$y = a^x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して折り返したものなので，$a > 1$ のときは単調に増加し，$0 < a < 1$ のときは単調に減少します．よって，定理

$$x_1 = x_2 \ \Leftrightarrow\ \log_a x_1 = \log_a x_2\,,$$

$$x_1 < x_2 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x_1 < \log_a x_2 & (a > 1) \\ \log_a x_1 > \log_a x_2 & (0 < a < 1) \end{cases}$$

が成立します．次に，どちらの場合も，x 切片が $x = 1$ ですが，これは $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$ の結果です．また，$a = a^1 \Leftrightarrow \log_a a = 1$ より，$x = a$ のとき $y = 1$ です．指数関数 $y = a^x$ が x 軸を漸近線にもつために，対数関数 $y = \log_a x$ は x が 0 に近づくとき y は $\pm\infty$ に近づきます．また，図は原点から遠くない部分を示したので気がつかないと思いますが，x が非常に大きいところでは，対数関数は**極めてゆっくりと**増加（減少）します．このことは，例えば，$a = 2$ のとき $y = 100$ となる x は $\log_2 x = 100 \Leftrightarrow x = 2^{100}$ より

$x \fallingdotseq 1.27 \times 10^{30}$ にもなることからわかります．これは $y = 2^x$ が極めて急激に増加することからくる結果です.

なお，指数関数が連続関数なので，その逆関数の対数関数も連続関数です.

6.2.2 対数の性質

対数には，その定義と指数法則から得られる有用な性質があります．それらの性質を先に表示しておいてから，証明するほうが有益でしょう．以下，底の条件や 真数>0 の条件は守られているとします．対数の基本性質は

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \tag{2}$$

$$\log_a M^p = p \log_a M \tag{3}$$

の 3 つです．以下，それらを指数法則から導きましょう．ここで

$$\log_a M = q\ (\Leftrightarrow M = a^q), \qquad \log_a N = p\ (\Leftrightarrow N = a^p)$$

とおきましょう．すると，指数法則 $a^q a^p = a^{q+p}$ と対数の定義より

$$MN = a^{q+p} \Leftrightarrow \log_a MN = q + p.$$

よって，$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$．これが (1) です．同様に，負の累乗の定義 $\dfrac{a^q}{a^p} = a^{q-p}$ より (2) が得られます．これは君たちの練習問題としましょう．また，指数法則 $(a^q)^p = a^{qp}$ において，$a^q = M$，$q = \log_a M$ を代入すると，$M^p = a^{p \log_a M}$．これは $p \log_a M = \log_a M^p$ と同値，よって，(3) が示されました．性質 (1)，(2) を記憶するときは，“ 積の対数は対数の和 ”，“ 商の対数は対数の差 ” とつぶやくとよいでしょう．性質 (3) は “ 真数の指数は降ろせる ” がよいでしょうか.

コンピュータのない時代にはこれらの性質のために対数関数がありがたがられました．対数関数は単調関数なので，x と $\log_a x$ は $1:1$ に対応します．よって，x が天文学的数 M，N などの場合に積 MN を精度よく計算するには，「対数表」と呼ばれる x と $\log_a x$ の値を換算する表を用いて，$\log_a M$，$\log_a N$

の値を調べ，和 $\log_a M + \log_a N$ を計算します．それが $\log_a MN$ に等しいことから，また対数表を用いると積 MN が得られます．x を $\log_a x$ に換えることを x の“対数をとる”といいますが，数学史の対数のところを読みますと，その用語は苦労して膨大な計算をした先人たちを偲ばせます．

6.2.2.1　浮動小数点表示

前の§で，バクテリアは 1 日経つと $2^{24} \fallingdotseq 1700$ 万倍に増殖する話をしましたが，それよりはるかに大きな数になると，$2^{100} \fallingdotseq 1.27 \times 10^7$ などと表すしかありませんね．同様に，体の 70 %を占める水を構成する水素原子 H の直径の測定結果は約 6.0×10^{-9} cm などと表します．このように，非常に大きな数や小さな数を $a \times 10^n$ という形で表したものを **浮動小数点表示** といいます．また，水素原子の直径の測定結果を約 6.0×10^{-9}cm と表したときに，6.0 などと小数第 1 位の数をわざわざ 0 と記しています．これは小数第 2 位を 4 捨 5 入して小数第 1 位が 0 になったことを意味し，6 と 0 の数字は信用できます．このことを **有効数字** が 2 桁の測定などといいます．

さて，9 以下の自然数のうち 2, 3, 7 の近似の対数

$$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010, \quad \log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771, \quad \log_{10} 7 \fallingdotseq 0.8451$$

の知識を利用すると，3^{100} のような大きな数を，関数電卓に頼らずに，（有効数字 4 桁以内の）浮動小数点表示で表すことができます．

まず，3^{100} が何桁の数か調べましょう．$\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ より $3 \fallingdotseq 10^{0.4771}$．よって，

$$3^{100} \fallingdotseq (10^{0.4771})^{100} = 10^{47.71} = 10^{47+0.71} = 10^{47} \cdot 10^{0.71},$$
$$\text{よって} \quad 3^{100} \fallingdotseq 10^{47} \cdot 10^{0.71}.$$

このとき，$0 < 0.71 < 1$ より $10^0 < 10^{0.71} < 10^1$，つまり，$1 < 10^{0.71} < 10$．よって，

$$10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$$

が得られます．ここで，$1 = 10^0, 10 = 10^1, 100 = 10^2, \cdots$，したがって，$10^1 < 23 < 10^2$ などに注意すると，3^{100} は 48 桁の数であることがわかります．

次に，3^{100} の最高位の数字を調べてみましょう．$3^{100} \fallingdotseq 10^{0.71} \cdot 10^{47}$ ですが $1 < 10^{0.71} < 10$ でしたね．ここで，$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$，$\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$，$\log_{10} 7 \fallingdotseq 0.8451$ を利用しましょう．まず，$1 = 10^0$．次に，$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ より $2 \fallingdotseq 10^{0.3010}$．同様に，$3 \fallingdotseq 10^{0.4771}$．4 については $4 = 2^2$ を用いて，$4 \fallingdotseq (10^{0.3010})^2 \fallingdotseq 10^{0.6020}$ [4]．5 については $5 = \dfrac{10}{2}$ を利用して

$$5 = 10 \cdot 2^{-1} \fallingdotseq 10 \cdot (10^{0.3010})^{-1} = 10^{1-0.3010} = 10^{0.6990}$$

より $5 \fallingdotseq 10^{0.699}$．同様に，$6 = 2 \cdot 3 \fallingdotseq 10^{0.778}$，$7 \fallingdotseq 10^{0.8451}$，$8 = 2^3 \fallingdotseq 10^{0.903}$，$9 = 3^2 \fallingdotseq 10^{0.954}$ が得られます．よって，

$$5 \fallingdotseq 10^{0.699} < 10^{0.71} < 10^{0.778} \fallingdotseq 6\,.$$

つまり，$5 < 10^{0.71} < 6$ が得られるので，$10^{0.71} = 5.\cdots$．したがって，3^{100} の最高位の数字は 5 であることがわかります.

2 番目に高位の数字を求めるのは容易ではありません．$3^{100} \fallingdotseq 10^{0.71} \cdot 10^{47}$ の 71 は近似 $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ の 71 に由来しますね．したがって，この近似から不等式

$$10^{0.705} \cdot 10^{47} \leqq 3^{100} < 10^{0.715} \cdot 10^{47}$$

が得られます．常用対数表で調べると，$10^{0.705} = 5.07$，$10^{0.715} = 5.19$ ですから，2 番目に高位の数字は 0 または 1 となることまではわかります.

もし，より良い近似 $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.47712$ を用いたとすると，同様にして，不等式 $10^{0.7115} \cdot 10^{47} \leqq 3^{100} < 10^{0.7125} \cdot 10^{47}$ から $5.14 \cdot 10^{47} \leqq 3^{100} < 5.16 \cdot 10^{47}$ が得られます.

同様の議論は 5^{-100} のような非常に小さな数を調べる際にも役立ちます．この数は小数点以下第何位に初めて 0 でない数字が現れるでしょうか．またその数字は何でしょうか．これは君たちのレッスンにしましょう．電卓で調べると $5^{-100} = 1.26765\cdots \times 10^{-70}$ と出てきます.

---

[4] 一般に，計算をすると有効数字は桁落ちします．例えば，$\log_{10} 2 = 0.30102999\cdots$ より $2 = 10^{0.30102999\cdots}$．よって，$4 = 2^2 = (10^{0.30102999\cdots})^2 = 10^{0.6020599\cdots} \fallingdotseq 10^{0.6021}$，よって，$4 \fallingdotseq 10^{0.6021}$ が正しいのです．ただし，計算のたびに有効数字の桁落ちを考慮するのは大変なので，最後の結果が出てから計算の回数だけ桁落ちさせれば十分です.