第5章　平面図形とその方程式

図形の研究，つまり，幾何学は，文明の発生と同時に始まりそして発展したことでしょう．ナイル川は雨季の氾濫の際しばしば区画の境界を押し流し，その復旧のために再び測定し直さなければなりませんでした．また，遠隔地との通商では，陸路では砂漠で正しい道を進むために，海路では大海原で船の位置を知るために，太陽や月・星の観測が欠かせませんでした．多くの学者が幾何学の発展に関わり，その成果の多くが紀元前 3 世紀に古代ギリシャの数学者ユークリッド（Euclid，前 365 頃〜275）の著作『原論』に納められ，厳密な理論体系の下で体系的・演繹的に叙述されました．

ユークリッドのやや後には，古代世界最大の数学・物理学者アルキメデス（Archimedes，前 287 頃〜212）が活躍し，アルキメデスの後にはアポロニウス（Apollonius，前 262〜190 頃）が続きました．アポロニウスは彼の名を冠する「アポロニウスの円」によって有名ですが，彼を古代ギリシャの最も偉大な幾何学者の 1 人たらしめたのは著書『円錐曲線』でした．彼は直円錐を平面で切ったときに得られる‘ 切り口の図形 ’が円や楕円・放物線・双曲線，つまり，今でいうところの「2 次曲線」であることを示しました．

その後は政治や経済などの要因により幾何学の飛躍的な発展は止まりましたが，ゆっくりとした発展は紀元後 3 世紀までヒッパルコス，メネラウス，パッポス，プトレマイオス等によってなされました．古代ギリシャの崩壊と共に幾何学の発展は事実上永い眠りにつき，それは 15 世紀になってルネッサンス期が始まるまで続きました．

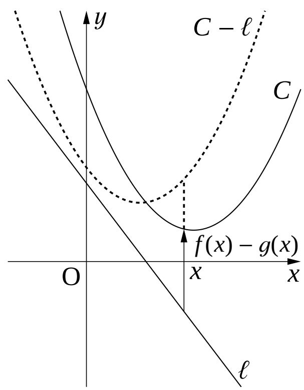
1482 年，ユークリッドの『原論』がイタリアのヴェニスで初めて印刷されて数学の復興は顕著になり，その波はヨーロッパ中に広がっていきました．1637 年，デカルト（René Descartes，1596〜1650，フランス）が著書『幾何学』を

出版するに至って，幾何学はそれまでの定規とコンパスによる研究とはまったく異なる側面から光が当てられました．変数と共に座標を導入し，図形を代数的方程式によって表現することが可能になったのです．我々は第 3 章で既に直線や放物線の方程式を学びましたが，デカルトの業績は算数や代数を幾何と統一するまさに革命的なものであったことを認識しましょう．

§5.1　曲線の方程式

5.1.1　放物線と直線

1 次関数 $y = ax + b$ のグラフが直線を，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが放物線を表すことは第 3 章で学びました．ここでは直線と放物線の相対的位置関係に関する事柄を調べましょう．



その関係は, 放物線 $C : y = f(x) = (x-3)^2+2$ と直線 $\ell : y = g(x) = a(x+2)+11$ で具体的に調べれば直ちに一般的議論ができます．放物線 C が直線 ℓ より常に上にあるとは全ての x に対して $f(x) > g(x)$ が恒に成り立つこと，つまり，関数値の差 $f(x)-g(x) > 0$ が恒に成り立つことですね．例えば，$a = -3$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= (x-3)^2 + 2 + 3(x+2) - 11 \\
&= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

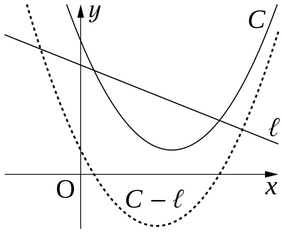
ですから常に正になり，よって C が ℓ より常に上にある場合です．

今の場合 C と ℓ は交わることはありません．もし，同じ高さになる x がある，つまり $f(x) = g(x)$ となる実数 x があるとして方程式 $f(x) - g(x) = 0$ を解くと，本当は実数解がないのだから，判別式 D は負になり虚数解が現れます（確かめましょう）．また逆に，方程式 $f(x) - g(x) = 0$ が虚数解をもつとき，C と ℓ は交わることはありませんね．

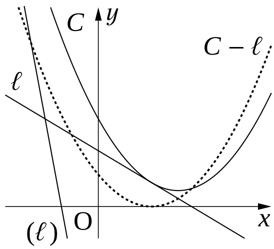
注意すべきことは，一般に，関数値の差 $f(x)-g(x)$ は，各 x に対して，‘ $g(x)$ の高さから見た $f(x)$ の高さ ’ であり，差の関数 $y = f(x)-g(x)$ のグラフ $C-\ell$

は，C と ℓ の両者を描いたグラフでいうと，各 x に対して，‘ $g(x)$ の高さ分だけ全体を押し下げて（$g(x) < 0$ のときは押し上げて），ℓ が x 軸に重なるようにしたときの C のグラフ ’ になっていることです．このような見方は 2 つのグラフの相対的位置関係を調べるときにはとても重要です.

次に, C と ℓ が異なる 2 点で交わる場合, 例えば $a = -1$ のとき, 関数値の差 $f(x)-g(x) = x^2-5x+2$ は x の変化と共に正にも負にもなり，差の関数 $y = f(x) - g(x)$ のグラフ $C - \ell$ は今度は x 軸より下の部分が現れます（確かめましょう）．ということは，$C-\ell$ は x 軸と異なる 2 点で交わることなので，方程式 $f(x) - g(x) = 0$ を解くと今度は交点の x に一致する異なる 2 つの実数解が得られます．逆に，方程式 $f(x) - g(x) = 0$ が異なる 2 実数解をもつときは，それらの x の値で $f(x) = g(x)$ が成り立ち，高さが等しい異なる 2 点がある，つまり C と ℓ は異なる 2 点で交わることがわかります.



2 交点が一致して 1 点になる場合, C と ℓ はどういう位置関係になるでしょう．C はただ 1 点を除いて ℓ より上にあり，その 1 点でのみ高さが一致し, C が ℓ より下になることはありません．このような場合，C と ℓ は接するといい，ℓ を C の **接線**, 接している点を **接点** といいます[1)]．C と ℓ が接しているときの a の値を求めてみましょう．C はただ 1 点を除いて ℓ より上にあるので，$f(x) > g(x)$ が接点の x を除いて成立し，接点でのみ $f(x) = g(x)$ が成立します．このとき，差の関数 $y = f(x) - g(x)$ のグラフ $C - \ell$ は，接点の x の値のときに x 軸に接し，それ以外のときは x 軸より上にあります．したがって，方程式 $f(x) - g(x) = 0$ は重解をもつことになります．よって，



$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= (x-3)^2 + 2 - a(x+2) - 11 \\
&= x^2 - (a+6)x - 2a = 0
\end{aligned}
$$

1) ここの接線の定義は不十分なものです．微分の章でより厳密な定義をしましょう.

の判別式 $D=(a+6)^2+8a=0$ が求める条件になります．a を未知数としてこの 2 次方程式を解くと $a=-2,\ -18$ の 2 解が得られます．したがって，ℓ として $y=-2(x+2)+11=-2x+7$ と $y=-18(x+2)+11=-18x-25$（図で (ℓ) と記したほう）を得ます．接点は，方程式 $f(x)-g(x)=x^2-(a+6)x-2a=0$ で $a=-2,\ -18$ とすると，それぞれ重解 $x=2,\ -6$ を得るので，それぞれ $\ell: y=-2x+7$，$\ell: y=-18x-25$ に代入して，接点が $(2,3)$，$(-6,83)$ と求まります．

判別式を用いない興味深い方法は，方程式 $f(x)-g(x)=0$ が重解をもつことを直接に表してしまう方法です．$f(x)-g(x)=0$ が重解 $x=p$ をもつとすると，それは一般に

$$f(x)-g(x)=x^2-(a+6)x-2a=c(x-p)^2$$

の形に表され，2 次の係数は一致するので $c=1$ です．このとき $(x-p)^2$ は $x^2-(a+6)x-2a$ を平方完成して得られるので，上の等式は方程式ではなく恒等式です．よって，全ての x に対して等号が成り立つので，係数比較ができて，連立方程式 $-(a+6)=-2p,\ -2a=p^2$ を得ます．これを解いて a と接点の x 座標 p が同時に求まります（確かめましょう）．

【実は，この問題を作るに当たって，$f(x)-g(x)=(x-2)^2$ から出発して，始めから $x=2$ で接するようにしておきました．

$$(x-2)^2=(x-3)^2+2+2(x+2)-11$$

と変形すると $f(x)=(x-3)^2+2$，$g(x)=-2(x+2)+11$ とできるので，直線の傾きを文字に置き換えて，$g(x)=a(x+2)+11$ とひねって出題したわけです．整数の答になったのはこのためです．君たちの先生方はこんなふうにして出題しているのですよ．】

上述の議論を利用すると，グラフ $C: y=f(x)$ の任意の $x=p$ における接線 $\ell: y=g(x)$ を求めるときに，$f(x)$ を $(x-p)^2$ で割り算を行って求める方法があります．

$f(x)=(x-3)^2+2$，$g(x)=-2(x+2)+11$ のときには $f(x)-g(x)=(x-2)^2$ と求まりましたね．ここで，もし $f(x)$ と $(x-2)^2$ が既知で $g(x)$ が未知の場合には，$g(x)=f(x)-(x-2)^2$ より $g(x)$ が求められます．さて，$\ell: y=g(x)$ は

$C : y = f(x)$ と $x = 2$ で接するので，$(x-2)^2$ は方程式 $f(x) - g(x) = 0$ が重解 $x = 2$ をもつことの表現であり，その 2 次の係数 1 は $f(x)$ の 2 次の係数 1 を受け継いでいます．

もし，$x = p$ における接線 $y = g(x)$ を求める場合には，$(x-2)^2$ を $(x-p)^2$ に置き換えて，$g(x) = f(x)-(x-p)^2 = (x-3)^2+2-(x-p)^2$ より $g(x) = (2p-6)x-p^2+11$ が得られます．$g(x)$ が 1 次式であることに注意しましょう．

さらに，$f(x) = (x-p)^2 + g(x)$ と移項し，$g(x)$ が 1 次式であることに注意して，この式を凝視してみましょう．この式は，$(x-p)^2$ が 2 次で $g(x)$ が 1 次だから，割り算の式くさいと感じたら正解です．だけど，それが接線と何の関係があるのかな？ なになに，今 $f(x)$ と $(x-p)^2$ を既知としているから，この割り算で $g(x)$ が求まる，なに，接線が求まるだって！ 実際に割り算を実行して $g(x) = (2p-6)x - p^2 + 11$ が求まったぞ．てな感じでしょうか．というわけで，‘ $y = f(x)$ の $x = p$ における接線 $y = g(x)$ は $f(x)$ を $(x-p)^2$ で割ったときの余りの式として求められる ’ と解釈できることになります．この解釈が可能なのは，$f(x)$ が 2 次だからというわけではなく，割るほうの式 $(x-p)^2$ が 2 次で，余り $g(x)$ が 1 次であるためです．よってこの解釈は任意次数の整式 $f(x)$ についても成立します[2)]．

以上見たように，‘ 一見何の関係もなさそうなことが問題を解く鍵になっています ’ ね．このようなことは数学に限らず科学・技術の分野ではよくあることです．公式丸暗記の勉強をしていては，楽しみはよい点数だけで，それでは自分で考える訓練が足りず，新しいことに自分で気づく楽しみを自ら閉ざしてしまいます．囲碁や将棋の世界では毎日が自分で考える訓練であり，実力が 1 段上がるごとに何が大事であるかの感覚が無意識のうちに変わっていくそうです．数学の勉強でも同じことがいえるでしょう．何が本当の勉強方法であるかもわからないうちに，予備校や塾の講師がいう ‘ 要領のよい方法 ’ なるものに飛びつくのは危険です．まずは，‘ 最小の努力で最大の効果を得る方法 ’ などという甘い誘惑に惑わされず，‘ 物事は何でも凝視する癖 ’ をつけることから始めましょう．自分で考えると，“ 間違いはないか，ホントかな，別の可能性はないか ” など，‘ 今まで無視していた事柄にも注意を払う新境地に入る ’ こ

2) この方法は某有名塾系列で実際に教えられています．

とができます．そのとき一皮剥(む)けるでしょう[3]．

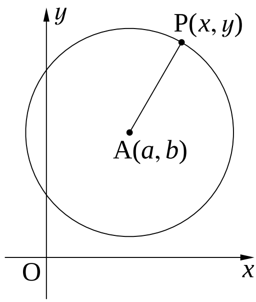
かなり脱線しました．最後に，微分を学ぶと任意の関数のグラフの接線の一般的な求め方を教わるので，ここの方法は‘じっくり考えると発想の転換ができていい知恵が浮かぶ’例としておきましょう．参考までに，一般の放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の $x = p$ における接線 ℓ を割り算の方法で求めてみましょう．練習問題としますが

$$\ell : y = (2ap + b)(x - p) + ap^2 + bp + c$$

となることが確かめられるはずです．

5.1.2　円の方程式

円を描くときにはコンパスを用いますね．コンパスは，大げさにいうと，平面上で，定点から等距離にある点の **軌跡** を描くとき，つまり定点から等距離にある点（の全体）の集合を描くときに用いられます．



中心が A(a, b)，半径が r の円 C を数式として表しましょう．そのためには，いったん xy 平面上の任意の点 P(x, y) を考えておいて，点 P が定点 A から常に一定の距離 r にあるための条件を課し，それを方程式として表現すればよいわけです．2 点 A(a, b) と P(x, y) の距離 AP は，§3.2 の議論より，AP $= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$．これが円の半径 r に等しいので，不要な根号をとり除いて，円 C の方程式

$$C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad \text{（円 I）}$$

が得られます．これが中心 (a, b)，半径 r の円 C の方程式です．中心 (a, b) および半径 r は任意に定められるので，これは円の方程式の一般形です．

---

3) テレビの番組で，中小企業の社長が新入社員の研修にマッチ箱のような銅の小片を与え，千分の 1 ミリの誤差で研磨するように指示しました．社長は彼に何のヒントも教えません．彼は何度も失敗し，半日も格闘していたでしょうか．彼は研磨台を丁寧に拭き始めました．そうです，彼は気づきました．千分の 1 ミリの世界では塵(ちり)の大きさが影響すると．彼はうまくいかなかった原因をついに突き止めたのです．「時間を気にせず，自分で考え，没頭する」．こんな体験を通じて，人は新しい世界に踏み入っていくのでしょう．

集合の記法を用いると，定点から等距離にある点の集合であることがより明確になります：

$$C = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$$

集合による表現は円 C のグラフそのものを表すと見なされます．

円 C の方程式は，$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ と表すと明らかなように，各 x の値に対して y の値が 1 つ定まるわけではないので，関数ではありません．ただし，2 つの値が定まるので関数の概念を拡張して「2 価関数」ということもあります．

円 C の方程式の特徴を見てみましょう．平方部分を展開して整理すると

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

なので，x と y についての 2 次の方程式の形をしています[4]．

このことから，円の方程式の最も一般的な形は，l, m, n を定数として，

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \qquad \text{（円 II）}$$

の形をしていることがわかります．実際，平方完成して

$$\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{l^2 + m^2 - 4n}{4}$$

とすると，右辺 > 0 の条件で，円の方程式（円 I）と同じですね．この方程式は，右辺 $= 0$ のときは 1 点 $\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ のみを表し，右辺 < 0 のときは方程式を満たす (x, y) がないので図形を表しません．

円の方程式を決定する問題では（円 I）と（円 II）の方程式をうまく使い分けるとよいでしょう．円の半径と中心がすぐ求められる問題，例えば，2 点 $(-2, 0)$, $(8, 4)$ を直径の両端とする円の場合は，中心が $(3, 2)$，半径が $\sqrt{29}$ と直ちに求まるので，（円 I）が便利です．また，それらがすぐには求められ

[4] x と y についての 2 次方程式は，x の次数と y の次数の和が 2 次および 2 次以下の項からなる方程式です．最も一般的な x, y の 2 次方程式には‘xy の形の 2 次の項’があります．xy 項が現れることは，例えば反比例の関数 $y = \frac{k}{x}$ の分母を払うと $xy - k = 0$ となるので，不思議ではありません．方程式 $xy - k = 0$ のグラフは「直角双曲線」と呼ばれています．また，xy 項は放物線や楕円を回転して軸が斜めになった方程式にも現れます．

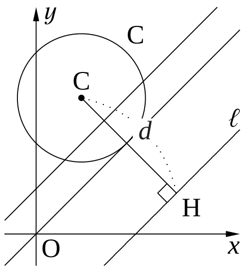
ない場合，例えば，3 点 (2, 6)，(−1, −3)，(6, 4) を通る円では，3 点の座標を（円 II）の方程式に代入して l，m，n を決定するほうが楽でしょう（答は $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ です．確かめましょう）．なお，任意に定めた 3 点を通る円がただ 1 つ存在することを図形的に実感するのは容易でしょう．そのことは式の上でも反映されていなければなりません．円の方程式（円 I, II）は 3 つの未知の定数 a，b，r または l，m，n を含み，それらの定数は円が通る 3 点の座標が与えられると定まります．

5.1.3　円と直線，直線のパラメータ表示

円と直線に関係する事柄を多角的に議論しましょう．

5.1.3.1　円と直線の相対的位置関係

円と直線の位置関係は，それらが交わるか，接するか，かすりもしないかのどれかですね．始めの 2 つの場合には，両者の **共有点**，つまり円上かつ直線上にある点が存在します．この用語を用いると，円と直線の位置関係は，（ア）異なる 2 点を共有する，（イ）1 点を共有する，（ウ）共有点がない等と表現できます．



共有点の有無は，円の方程式と直線の方程式を連立させて，それらの方程式を同時に満たす共有点の個数を調べてみるとわかります．例えば，円 C と直線 ℓ の方程式を

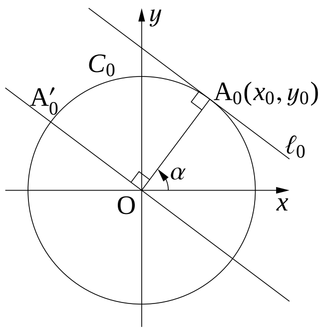
$$C : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2, \qquad \ell : y = x + k$$

としましょう．それらを連立すると 2 次方程式 $(x - 1)^2 + (x + k - 3)^2 = 2$，つまり，$2x^2 + 2(k - 4)x + k^2 - 6k + 8 = 0$ が得られます[5)]．共有点の個数は

[5)] 円の方程式 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$ は $y = 3 \pm \sqrt{2 - (x - 1)^2}$ に同値ですから，直線 $y = x + k$ と連立することは $3 \pm \sqrt{2 - (x - 1)^2} = x + k$ と同じ，つまり，グラフが同じ高さになる x の値を求めることに同じです．よって，この連立の操作は §§5.1.1 で放物線と直線の方程式を連立してそれらの交点を求めたときの場合と何ら変わりません．

実数解の個数に一致するので，判別式 D の符号を調べれば済みます．実際，$\dfrac{D}{4} = (k-4)^2 - 2(k^2-6k+8) = -k(k-4)$ より，$D > 0$，つまり $0 < k < 4$ のとき異なる 2 実数解をもち，円と直線は交わります．$D = 0$，よって，$k = 0$，4 のときは共有点は 1 つで両者は接し，また，$D < 0$ のとき，つまり $k < 0$ または $4 < k$ のときは実数解がないので共有点はありません．

5.1.3.2　円の接線の方程式



円と直線の位置関係で重要なのはそれらが接する場合です．一般の円について接線の方程式を求めてみましょう．そのためには，まず，原点 O を中心とする半径 r の円 $C_0 : x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $\mathrm{A}_0(x_0,\ y_0)$ における接線 ℓ_0 を求め，それから円 C_0 と接線 ℓ_0 を平行移動すればよいわけです．

接線 ℓ_0 は直線 OA_0 に垂直なので，点 A_0 を原点の周りに 90° 回転して得られる点を A_0' とすると，接線は直線 OA_0' に平行です．$\mathrm{OA}_0 = r$ なので，動径 OA_0 の表す角を α とすると，$(x_0,\ y_0) = (r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ と表されます．よって，点 A_0' の座標については，加法定理などを利用すると，

$$\mathrm{A}_0' = (r\cos(\alpha + 90^\circ),\ r\sin(\alpha + 90^\circ)) = (-r\sin\alpha,\ r\cos\alpha) = (-y_0,\ x_0)$$

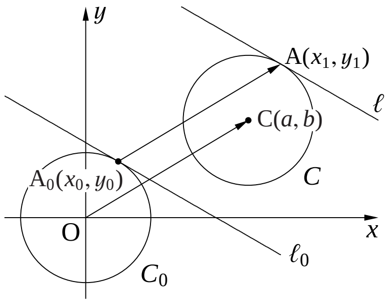
より $\mathrm{A}_0'(-y_0,\ x_0)$ です．よって，直線 OA_0 の傾き $m = \dfrac{y_0}{x_0}$ に対してそれに直交する直線 OA_0' の傾き $m' = -\dfrac{x_0}{y_0}$ が得られます．このとき，2 直線についての **直交条件** といわれる傾きの積の関係 $mm' = -1$ が成立しますね．

以上のことから，円 $C_0 : x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $\mathrm{A}_0(x_0,\ y_0)$ における接線 ℓ_0 の方程式は，§§3.3.2 の議論より，$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ となります．分母を払って，点 A_0 が円 C_0 上にある条件 $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ を用いると

$$\ell_0 : x_0x + y_0y = r^2 \qquad (x_0^2 + y_0^2 = r^2)$$

となることがわかります．この方程式は，§§3.3.2 で議論した直線の方程式の

一般形の表現方法に従っているので，$x_0 = 0$，または，$y_0 = 0$ の場合にも成り立ちます．



さて，円 C_0 とその接線 ℓ_0 を x，y 方向にそれぞれ a，b だけ平行移動して得られる円 C とその接線 ℓ を求めましょう．円 C は中心が $(a,\ b)$[6]，半径が r ですから，その方程式は

$$C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

となります．これは円 $C_0 : x^2 + y^2 = r^2$ の x，y にそれぞれ $x-a$，$y-b$ を代入したものですね．点 $\mathrm{A}_0(x_0,\ y_0)$ における円 C_0 の接線 $\ell_0 : x_0x + y_0y = r^2$ を同様に平行移動した接線 ℓ の方程式は，関数のグラフの平行移動の議論より，x，y にそれぞれ $x-a$，$y-b$ を代入すればよいですね：$\ell : x_0(x-a) + y_0(y-b) = r^2$．このとき円 C_0 上の接点 $\mathrm{A}_0(x_0,\ y_0)$ を平行移動した円 C 上の接点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と表すと，$x_0 = x_1 - a$，$y_0 = y_1 - b$ の関係がありますね．したがって，円 C 上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線 ℓ の方程式は，最終的に，

$$\ell : (x_1 - a)(x-a) + (y_1 - b)(y-b) = r^2$$

と表されます．ただし，条件 $(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 = r^2$ がつきますが，それは点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ が円 C 上にあるためです．

5.1.3.3　2 円の交点を通る直線や円

2 つの円の交点は，それらを表す方程式を連立して，両方程式を同時に満たす共有点を求めればよいですね．例として，2 円 C_1，C_2 の連立方程式を

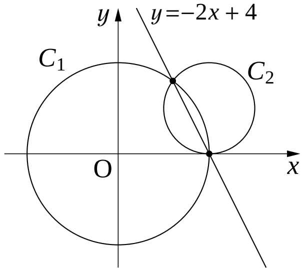
$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 - 4 = 0 & \text{(c1)} \\ C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 & \text{(c2)} \end{cases}$$

としましょう．交点を求める最も簡単な方法は辺々引き算をして

$$(x^2 + y^2 - 4) - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 4x + 2y - 8 = 0$$

[6] 円の名とその中心の名を同じにする習慣があります．円 C の中心が点 $(a,\ b)$ のとき，中心を $\mathrm{C}(a,\ b)$ と書きます．

と 2 次の項を消すと，$y = -2x + 4$ が得られます．それを (c1) に代入して，x の 2 次方程式 $x^2 + (-2x + 4)^2 - 4 = 0$ を解くと，交点の x 座標 $x = \frac{6}{5}$，2 が求められます．交点の y 座標は，$y = -2x + 4$ の x に $\frac{6}{5}$ および 2 を代入して，$y = \frac{8}{5}$，0 が得られます．したがって，2 交点 $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$，(2, 0) が求まります．



これらの手続きを論理的に考えてみましょう．辺々引き算をして得られた $y = -2x + 4$ を (c1) に代入したことは，(c1) と辺々引き算の式を連立したことになります：

$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 - 4 = 0 & \text{(c1)} \\ C_{\text{引}} : (x^2 + y^2 - 4) - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0. & \text{(c引)} \end{cases}$$

この連立は，(c1) の条件の下で，(c引) が $0 - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0$ と元の (c2) と同値になるので，(c1) と (c2) の連立と確かに同じことですね．

このように考えると，(c1) と (c2) を連立して得られる 2 円の交点を得るには，(c1) と (c引) を連立する以外にも，もっとさまざまな連立の仕方がありそうです．例えば，辺々引き算の式に実数の係数 p，q をつけた連立方程式

$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 - 4 = 0 & \text{(c1)} \\ C_{pq} : p(x^2 + y^2 - 4) + q(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0 & \text{(cpq)} \end{cases}$$

のようなものも，$q \neq 0$ の条件で (c1) と (c2) の連立と同値になり，同じ 2 交点を与えますね．曲線 C_{pq} は一般には円を表し，$p + q = 0$ のときだけ直線 $(y = -2x + 4)$ になりますね（確かめましょう）．

さて，本題はここからです．上の (c1) と (cpq) の連立が (c1) と (c2) の連立と同じ 2 交点を与えるということは，その 2 交点が円 C_1 上にあることはもちろん曲線 C_{pq} 上にもあることを意味します．つまり，曲線 C_{pq} は，p，q $(q \neq 0)$ の値によらずに，その 2 交点を通ることになります．

例解をかねて，問題を 1 題解いてみましょう．先の 2 円 C_1，C_2 の交点を通る円の中で原点を通るものを求めましょう．上の (c1) と (cpq) の連立を

利用すればよいですね．原点を通るから (cpq) で $(x,\ y) = (0,\ 0)$ とおくと $p(-4)+q(4)=0$，よって，$p=q$ が求める条件です[7]．よって，求める円の方程式は

$$C_{qq} : q(x^2+y^2-4)+q(x^2+y^2-4x-2y+4)=0.$$

整理して，$C_{qq} : x^2+y^2-2x-y=0$ となります．この円が先ほど求めた 2 交点 $(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5})$，$(2,\ 0)$ を通ることを確かめましょう．

以上の議論は直ちに一般化できます．任意の 2 つの曲線 C_1，C_2 が交点をもつとき，それらの連立方程式を

$$\begin{cases} C_1 : f(x,\ y)=0 & \text{(c1)} \\ C_2 : g(x,\ y)=0 & \text{(c2)} \end{cases}$$

と表しましょう．もし，曲線が放物線などの関数のグラフであれば，曲線の方程式 $f(x,\ y)=0$ を $y-f(x)=0$ などとすればよいでしょう．先ほどの議論とまったく同様に，同じ交点に導く連立方程式は，p，q $(q \neq 0)$ を定数として，

$$\begin{cases} C_1 : f(x,\ y)=0 & \text{(c1)} \\ C_{pq} : pf(x,\ y)+qg(x,\ y)=0 & \text{(cpq)} \end{cases}$$

と表すことができます．このとき，曲線 $C_{pq} : pf(x,\ y)+qg(x,\ y)=0$ は曲線 C_1，C_2 の交点の全てを通ります．そして，そのような曲線 C_{pq} は，p，q の各値に対応して，無数に存在します．

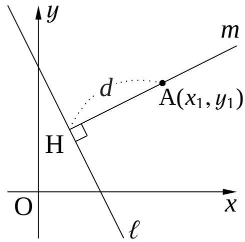
5.1.3.4　点と直線の距離の公式と直線のパラメータ表示

円と直線の相対的位置関係は，§§5.1.3.1 の最初の図からわかるように，円の半径を r，円の中心と直線との（最短）距離を d とすると，d と r の相対的大きさによって決まりますね：円と直線は，$d>r$ のとき共有点がなく，$d=r$ のとき接し，$d<r$ のとき交わる．

また，△ABC の 3 頂点の座標が与えられたときなど，頂点 A から対辺 BC（つまり直線 BC）に下ろした垂線の長さ d を求める公式があれば，△ABC の面

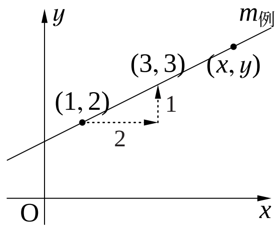
[7] 文字 p，q は，§§2.1.2 で述べたように，方程式の中でもともとは定数であった文字が変数に化けた例です．

積が簡単に求まりますね．点と直線の距離 d を与える美しい公式が知られています．それを求めましょう．ただし，普通の方法でやると計算がグジャグジャになるので，新しい手法を導入してきれいな計算になるようにしましょう．



点を A$(x_1,\ y_1)$ とし，直線を $\ell : ax + by + c = 0$ と一般形で表し，点 A から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とすると，d = AH です．よって，垂線の足 H の座標が求まればほとんどできあがりです．そのためには点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線の方程式 m が必要ですね．直線 ℓ の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ なので，それに直交する直線 m の傾きは $\dfrac{b}{a}$．よって，直線 m の方程式は $y - y_1 = \dfrac{b}{a}(x - x_1)$．分母を払って整理すると $m : b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$ が得られます．

そこで，2 直線 ℓ と m の方程式を連立して交点 H の座標を求めると $\cdots$ といきたいところですが，いかんせん，計算力に相当自信のある諸君でもこの汚い計算にはてこずるでしょう．こんなときのために，数学は便利な道具「直線のパラメータ表示」を用意しています．それを利用しましょう．



直線を描くとき, 定規に鉛筆の芯を当てて定規に沿って動かしますね．動いていく芯の座標 $(x,\ y)$ の軌跡を時間 t を用いて表してみましょう．例として，直線

$$m_{例} : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

を考えましょう．その傾きは $\dfrac{1}{2}$ ですから，直線 $m_{例}$ 上の点は 1 秒間に x，y 方向にそれぞれ 2，1 だけ移動するとしましょう．芯は点 (1，2) を時間 $t = 0$ で通過したとすると，芯の座標は時間 t のとき $x = 1 + 2t$，$y = 2 + 1t$ と表されますね．この表式は $t < 0$ のときも成り立つことを確かめましょう．よって，全ての時間 t に関する点 $(x,\ y)$ の集合は直線 $m_{例}$ のグラフに一致します．また，表式 $x = 1 + 2t$，$y = 2 + 1t$ から t を消去すると直線 $m_{例}$ の方程式が得られますね．そこで，表式 $x = 1 + 2t$，$y = 2 + 1t$ は，変数 x，y とは別の第 3 の変数 t を媒介として，直線 $m_{例}$ の方程式を表すと考えるわけです：

$$m_{例}:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+1t.\end{cases}$$

変数 t を **パラメータ**（または媒介変数）といい，また，このような変数 $x,\ y$ の関数関係の表示を **パラメータ表示**（または媒介変数表示）といいます．パラメータ t の範囲が明示されないときは，任意の実数であると見なします．

それでは，直線 $\ell: ax+by+c=0$ に直交し，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通る直線 m のパラメータ表示を求めましょう．直線 m の傾きは $\dfrac{b}{a}$ でしたから，m 上の点は 1 秒間に $x,\ y$ 方向にそれぞれ $a,\ b$ だけ移動するとして差し支えなく，また，$t=0$ で点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通るとしてよいので，

$$m:\begin{cases}x=x_1+at\\ y=y_1+bt\end{cases}$$

と非常に簡単な表示になりますね．

2 直線 $\ell,\ m$ の交点，つまり点 A から直線 ℓ に下ろした垂線の足 H を求めるには，直線 m のパラメータ表示の $x,\ y$ を直線 ℓ の方程式に代入し，時間 t についての方程式

$$a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0$$

に直します．よって，‘ この連立によって求まるのは，直線 m 上の点 $(x,\ y)$ が点 H を通過する時間 ’

$$t=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$

ということになります．そこで，この時間 t の値を直線 m のパラメータ表示の t に代入すると，点 H の座標が求められます：

$$x=x_1-a\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2},\quad y=y_1-b\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}.$$

したがって，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と点 H の距離 $d=\mathrm{AH}$ は，$\sqrt{x^2}=|x|$ に注意すると，最終的に

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となることがわかります（確かめましょう）．

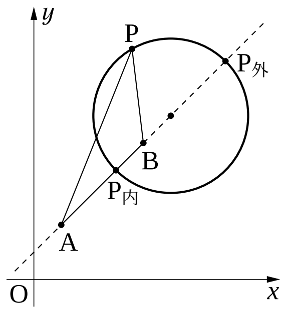
練習として，3 点 $(1, 4)$，$(-2, 3)$，$(4, 0)$ が頂点である三角形の面積を求めてみましょう．答は $\dfrac{15}{2}$ です．

最後に，直線のパラメータ表示は，いずれ習う予定の「ベクトル」という章において，直線上の点の位置を表す「位置ベクトル」というものに事実上なっています．例えば，直線 $m_{例}$ 上の点 $(x,\ y)$ の位置ベクトル表示は（縦書きの表し方をすると）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

です．$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が $t = 0$ のときの位置を，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が速度の大きさと方向を表しています．詳細はベクトルの章で学びましょう．

5.1.4　アポロニウスの円と内分点・外分点



紀元前 3 世紀の古代ギリシャの数学者アポロニウスは「2 定点からの距離が定比である点の軌跡は円になる」ことを発見しました．このことを確かめてみましょう．

まず，2 定点が A(1, 2)，B(4, 5) であるとして，AP：PB = 2 : 1 を満たす点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めてみましょう．AP：PB = 2 : 1 より 2PB = AP．これを座標を用いて表すと

$$2\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\,.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 53 = 0, \quad \text{よって} \quad (x-5)^2 + (y-6)^2 = 8\,.$$

したがって，求める点 P$(x,\ y)$ の軌跡は点 (5, 6) を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円ですね．

軌跡上の点のうち特に次の 2 点が重要です：点 P が線分 AB 上にあるとき，その点を $\mathrm{P}_{内}$ とすると $\mathrm{AP}_{内}：\mathrm{P}_{内}\mathrm{B} = 2 : 1$ を満たすので，$\mathrm{P}_{内}$ を線分 AB を

2 : 1 に内分する **内分点** といいます．同様に点 P が線分 AB の延長上にあるとき，その点を $P_{外}$ とすると $AP_{外} : P_{外}B = 2 : 1$ を満たすので，$P_{外}$ を線分 AB を 2 : 1 に外分する **外分点** といいます．

内分点・外分点は，円上にも直線 AB 上にもあるので，それら 2 点は方程式を連立すれば求めることができます．直線 AB の方程式は，その傾きが $\dfrac{5-2}{4-1} = 1$，また点 A(1, 2) を通るので，直線 AB : $y = x - 1 + 2 = x + 1$ と決まります．したがって，直線 AB : $y = x + 1$ と円 : $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 8$ を連立して，内分点 $P_{内}(3,\ 4)$ と外分点 $P_{外}(7,\ 8)$ が得られます（確かめましょう）．

2 定点が一般の点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ で，AP : PB = $m : n$ $(m \neq n)$ のときも，計算が少々長くなるだけで，点 P の軌跡は円

$$\left(x - \frac{m^2x_2 - n^2x_1}{m^2 - n^2}\right)^2 + \left(y - \frac{m^2y_2 - n^2y_1}{m^2 - n^2}\right)^2 = \frac{m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}$$

であることがわかります．これと 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を通る直線

$$\mathrm{AB} : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ \text{または}\quad y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

を連立して，線分 AB を $m : n$ に内分・外分する点

$$P_{内}\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n},\ \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right),\qquad P_{外}\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n},\ \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

が求められます（$m^2\mathrm{PB}^2 = n^2\mathrm{AP}^2$ を座標で表した式を利用すると意外に簡単に求まります）．

なお，AP : PB = $m : n = 1 : 1$ のときは AP = PB なので点 P の軌跡は線分 AB の垂直 2 等分線になります．2 定点が A(1, 2)，B(4, 5) のとき，AB の垂直 2 等分線の方程式が $y = -x + 6$ であることを確かめましょう．

5.1.5　円のパラメータ表示

直線のパラメータ表示は §§5.1.3.4 において既に学びました．パラメータ表示は円についても有効で，実は，君たちはそれを既に知っています．

我々は §4.1 において単位円上の任意の点 P が $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表されることを学びました．よって，点 P を OP 方向に $r\ (> 0)$ 倍した点 $(x,\ y)$ は

$(x,\ y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ となり，点 $(x,\ y)$ は原点を中心として半径 r の円上にあります．このとき角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で動かすと，点 $(x,\ y)$ の軌跡は円になりますね．実際，この円を C とすると，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$ が成立して，円 C の方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ が得られます．

このように円 C の方程式は $C : x^2 + y^2 = r^2$ と表すこともできますが，$x,\ y$ とは別に第 3 の変数 θ を考え，これを媒介として $x,\ y$ の関数関係 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を表示して，これが円 C の方程式を表すと見なすこともできます：

$$C : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

これが中心 O，半径 r の円 C の方程式のパラメータ表示です．

円 C のパラメータ表示で変数 θ の範囲を明示しない場合，θ は任意の一般角であることを意味します．このことを逆用すると，円のパラメータ表示を用いて半円や四分円を簡単に表せます．例えば，円 C の第 1 象限の四分円 $C_{\frac{\text{円}}{4}}$ は

$$C_{\frac{\text{円}}{4}} : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$$

と表すことができます（厳密には，第 1 象限は x, y 軸を含まないので $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ が正しい）．

円のパラメータ表示を用いて，中心が点 $(a,\ b)$，半径が r の円 $C_{(a,\,b)}$ を表してみましょう．そのためには円 C を x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動すればよいですね．原点が中心の円 C のパラメータ表示は $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ですから，中心が点 $(a,\ b)$ の円にするためには，円 C のパラメータ表示で $x,\ y$ の値をそれぞれ a, b だけ増加させればよいですね．よって円 $C_{(a,\,b)}$ のパラメータ表示は

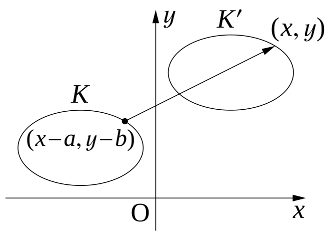
$$C_{(a,\,b)} : \begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

となります．実際，上の表式を $x - a = r\cos\theta,\ y - b = r\sin\theta$ と移行して，両辺を 2 乗すると，円 $C_{(a,\,b)}$ の方程式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ が得られますね．

このように，円 C の方程式 $x^2 + y^2 = r^2$，またはそのパラメータ表示において，x を $x - a$ で，y を $y - b$ で置き換えたものは，円 C を x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動した円 $C_{(a,\,b)}$ の方程式，またはそのパラメータ表示になることがわかります．

5.1.6　一般の曲線の平行移動

§§3.6.1 で学んだように，一般の関数 $y = f(x)$ のグラフを x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動したグラフを与える関数は，関数 $y = f(x)$ において x を $x - a$ で y を $y - b$ で置き換えた $y - b = f(x - a)$ でしたね．我々は，§§5.1.5 において，円の方程式またはそのパラメータ表示においても同じ置き換えが円の平行移動をもたらすことを見いだしました．よって，その置き換えによって平行移動が表されることは，関数だけでなく一般の曲線の方程式やそのパラメータ表示でも成立することを暗示しています．このことを確かめてみましょう．



一般の曲線 K の方程式，またはそのパラメータ表示を一括して

$$K : f(x,\ y\,;\,\theta) = 0$$

と表しましょう[8]．もしそれが図形の方程式ならば，パラメータ θ は現れません．また，パラメータ表示なら 2 つの方程式を表します．

さて，曲線 $K : f(x,\ y\,;\,\theta) = 0$ を x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動して得られる曲線を K' としましょう．平行移動後の点を $(x,\ y)$ とすると移動前の点は $(x - a,\ y - b)$ です．点 $(x,\ y)$ が曲線 K' 上にあるとき，変数 x, y の満たす方程式が曲線 K' の方程式ですね．またそのとき，移動前の点 $(x - a,\ y - b)$ は曲線 K 上にあります．よって，点 $(x - a,\ y - b)$ は曲線 K の方程式を満たすので，$f(x - a,\ y - b\,;\,\theta) = 0$ が成り立ちます．この方程式は移動後の点 $(x,\ y)$ が満たす方程式になっているので曲線 K' の方程式，またはそのパラメータ表示に他なりません．よって，非常に一般的な定理が得られます：

---

[8] 円 $x^2 + y^2 = r^2$ ならば $f(x,\ y\,;\,\theta) = 0$ は $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ のことです．また，そのパラメータ表示 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なら，$f(x,\ y\,;\,\theta) = 0$ は $x - r\cos\theta = 0$ かつ $y - r\sin\theta = 0$ を表します．

一般の曲線 K の方程式（パラメータ表示を含む）が $K: f(x,\ y;\ \theta) = 0$ と表されるとき，K を x 方向に a，y 方向に b だけ平行移動して得られる曲線を K' とすると，K' の方程式（パラメータ表示）は

$$K': f(x-a,\ y-b;\ \theta) = 0$$

である．

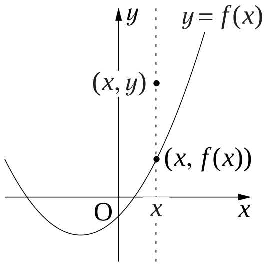
賢明な諸君は，同様の議論が，曲線の平行移動にとどまらず，対称移動や倍変換・回転，さらにもっと一般的な図形の変換に対しても適用できることを嗅ぎとるでしょう．実際，我々は §5.3 において放物線や楕円などの 2 次曲線を回転することを学びます．

§5.2　領域

我々は方程式で表される直線や曲線などの平面図形を学んできました．ここでは広がりをもつ平面図形も学びましょう．それらは **領域** と呼ばれる点の集合で，不等式によって表されます．

5.2.1　関数のグラフの上側・下側

任意の関数 $y = f(x)$ について，グラフの上側・下側を調べましょう．そのためには，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ と関数 $y = f(x)$ のグラフ上の同じ x 座標の点 $(x,\ f(x))$ を比較して，どちらの y 座標が大きいかを見れば一目瞭然です．テキストの図では点 $(x,\ y)$ のほうが上にあるので，それらの y 座標を比較して，不等式 $y > f(x)$ が成立します．そこで，この不等式を満たす全ての点 $(x,\ y)$ の集合がグラフの上側の領域 D ということになります：



$$D = \{(x,\ y) \mid y > f(x)\}.$$

よって，関数 $y = f(x)$ のグラフの上側の領域 D を表す不等式は

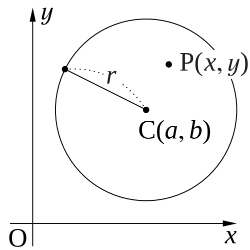
$$D: y > f(x)$$

と表されます．例えば，直線 $y = mx+n$ の上側は不等式 $y > mx+n$ によって表されます．同様に，関数 $y = f(x)$ のグラフの下側を表す不等式は $y < f(x)$ となります．ちなみに，この考えに立つと，そのグラフを表す方程式が $y = f(x)$ であるのは，点 $(x,\ y)$ と点 $(x,\ f(x))$ が一致するからだと見なすことになります．

ついでながら，y 軸に平行な直線 $\ell : x = c$ の右側は，点 $(x,\ y)$ と ℓ 上の点 $(c,\ y)$ の x 座標を比較すると，不等式 $c < x$ で表されますね．同様に直線 ℓ の左側は不等式 $x < c$ で表されます．

5.2.2　円の内部・外部

円 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の内部・外部を議論するときも，前の §§ と同様，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考えると容易です．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C の内部にあるとき，点 P と円の中心 $C(a,\ b)$ の距離 CP は円の半径 r より小さいですね．よって，$\mathrm{CP} < r$ より $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$. したがって，円 C の内部を表す不等式は



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

となります．この不等式を満たす全ての点 $(x,\ y)$ の集合が円 C の内部を表します．同様に，円 C の外部を表す不等式は $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ となりますね．

円 C とその内部を合わせて円板 D といいましょう．円板 D を表す不等式は

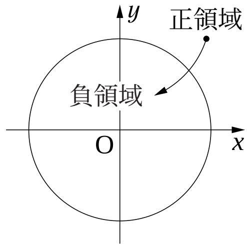
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq r^2$$

ですね．

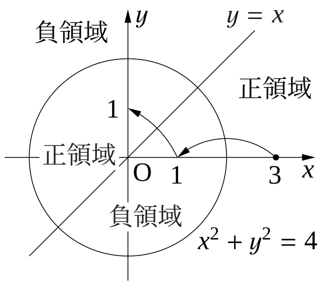
5.2.3　領域と境界

前の §§ の議論で関数 $y = f(x)$ のグラフの上側（下側）の領域は不等式 $y > f(x)$ $(y < f(x))$ で表され，円 $x^2 + y^2 = r^2$ の内部（外部）の領域は不等式 $x^2 + y^2 < r^2$ $(x^2 + y^2 > r^2)$ によって表されることがわかりました．不等式が表す領域を統一的に扱ってみましょう．以下の議論は，高校数学で現れる不等式については，かなり実用的です．

不等式 $y > f(x)$ ($y < f(x)$) を $y - f(x) > 0$ ($y - f(x) < 0$) と書き直して，2 変数 x, y の関数 $f(x, y) = y - f(x)$ を導入しましょう．すると不等式 $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$) を満たす領域が関数 $y = f(x)$ のグラフの上側（下側）を表しますね．同様に, $f(x, y) = x^2+y^2-r^2$ とすると, $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$) が円の外部（内部）を表しますね．以後，不等式 $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$) を満たす領域を $f(x, y)$ の **正領域**（**負領域**），それらの境目の曲線を **境界** と呼ぶことにしましょう．



さて，2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ の符号は, 点 (x, y) が xy 平面上を動くとき，どのように変化するでしょうか．点 (x, y) が関数 $f(x, y)$ の正領域（円の外部）を動いている間は $f(x, y)$ は正のままです．また，点 (x, y) が $f(x, y)$ の負領域（円の内部）を動いているときには $f(x, y)$ は負です．よって，‘ $f(x, y)$ の符号の変化が現れるのは点 (x, y) が正領域と負領域の境界を通過したときのみ ’ です．同じことが $f(x, y) = y - f(x)$ についても，一般の $f(x, y)$ の場合でも成立することは，正領域・負領域の定義から明らかでしょう．よって，xy 平面を正領域と負領域の境界によっていくつかの領域に分けたとき，境界上にないある点で $f(x, y)$ が正（負）ならばその点を含む領域は正領域（負領域）であることがわかります．

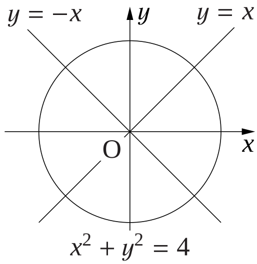


このような議論が有用なのは $f(x, y)$ が積や商の形の場合，例えば,

$$f(x, y) = (x - y) \times (x^2 + y^2 - 4)$$

です．この場合の境界は円 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ と直線 $x - y = 0$ ですから，xy 平面はそれらの境界によって 4 つの領域に分かれます．そこで，点 (x, y) が，例えば，点 $(3, 0)$ のとき，$f(3, 0) = 3 \times 5 > 0$ より点 $(3, 0)$ を含む領域は正領域となります．次に，点 (x, y) が点 $(3, 0)$ から境界 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ を通過して点 $(1, 0)$ に移動すると，$x^2 + y^2 - 4$ の符号が正から負に変わり，$x - y$ の符号は正のままなので，点 $(1, 0)$ を含む領域は負領域とわかります．次に，点 (x, y) が点 $(1, 0)$ から境界

$x-y=0$ を通過して点 $(0,1)$ に移動すると，今度は $x-y$ の符号が正から負に変わるので，点 $(0,1)$ を含む領域は正領域となります．もし，点 $(x,\ y)$ が点 $(3,\ 0)$ から点 $(0,1)$ に移動するときに，別の経路を通っていったとしても，点 $(0,1)$ が正領域であることには変わりありません（もし，円と直線の交点 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ を通れば，そこで x^2+y^2-4 と $x-y$ の符号が同時に変わります）．このように点 $(x,\ y)$ が 1 つの境界を通過するたびに $f(x,\ y)$ の符号が変わるので，‘全ての境界とある 1 点における $f(x,\ y)$ の符号がわかると，正領域と負領域は容易に決定できます’．不等式 $f(x,\ y)>0$ の表す領域は正領域の全体であり，また，不等式 $f(x,\ y)\leqq 0$ の表す領域は負領域の全体に境界を加えたものですね．



関数 $f(x,\ y)$ が商の形，例えば，

$$f(x,\ y)=\frac{(x-y)(x^2+y^2-4)}{x+y}$$

のときは，点 $(x,\ y)$ が直線 $x+y=0$ を横切るときに $x+y$ の符号が変わり，よって $f(x,\ y)$ の符号も変わるので同様の議論ができます．この場合の境界は分子の $x-y=0$，$x^2+y^2-4=0$ に加えて分母の $x+y=0$ からなりますね．よって，この $f(x,\ y)$ の正領域・負領域は少し複雑になります（求めてみましょう）．不等式 $\dfrac{(x-y)(x^2+y^2-4)}{x+y}<0$ を境界を利用して解く方法と，通常の場合分けによる方法を比較することを，君たちの練習に残しておきましょう．なお，もっと練習したい人には次の問題がお奨めです：不等式 $(\sin x)(\sin y)\geqq 0$ を解け．ヒント：格子模様が目に入らぬか，かな．

最後に，注意すべきことを 2 点ほど述べておきます．

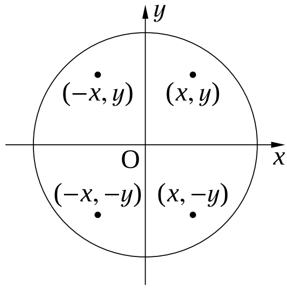
$$f(x,\ y)=\frac{(x-y)^2(x^2+y^2-4)}{x+y}$$

などの場合のように，完全平方の因数 $(x-y)^2$ が含まれるような場合には，点 $(x,\ y)$ が 2 重直線 $(x-y)^2=0$ を横切っても $(x-y)^2$ の符号に変化はないので，$(x-y)^2=0$ は正領域と負領域の境界にはなりません．また，関数 $f(x,\ y)$ が $\sqrt{x-y}$ などの根号を含む場合には，前提とする領域が始めから $x-y\geqq 0$ に制限されてしまうことに注意しましょう．

5.2.4　図形の対称性

図形の x 軸対称・y 軸対称・原点対称などの対称性を議論しましょう．対称性がわかると図形の一部から全体のグラフが理解できます．曲線の対称性と領域の対称性を関連させて議論したほうが合理的でしょう．

まず, 例として, 単位円 $x^2+y^2=1$ と単位円板 $x^2+y^2 \leqq 1$ を一緒に議論しましょう．それらを同じ記号 C で表して，C の方程式（不等式）を，前の §§ と同様に 2 変数関数 $f(x,\ y)=x^2+y^2-1$ を導入して,



$$C: f(x,\ y)=x^2+y^2-1=0\ (\leqq 0)$$

と表しましょう．単位円（板）C は，図形の形から見ると，いうまでもなく，x 軸対称・y 軸対称および原点対称な図形ですね．このことを数式で表しましょう．C 上の任意の点 $(x,\ y)$ は方程式（不等式）$f(x,\ y)=x^2+y^2-1=0\ (\leqq 0)$ を満たしますね．そのとき，点 $(x,\ y)$ に x 軸対称な点 $(x,-y)$ を考えると，$f(x,-y)=x^2+(-y)^2-1=x^2+y^2-1=f(x,\ y)$ だから，方程式（不等式）

$$f(x,-y)=0\ (\leqq 0)$$

が成立し，点 $(x,-y)$ も単位円（板）C 上にあることになります．点 $(x,\ y)$ は C 上の任意の点ですから，$f(x,-y)=0\ (\leqq 0)$ が成立することは C が x 軸対称であることを意味し，この方程式（不等式）が x 軸対称であるための条件式になります．

同様に，単位円（板）C が，y 軸対称であることは $f(-x,\ y)=0\ (\leqq 0)$ を示せばよく，原点対称であることは $f(-x,\ -y)=0\ (\leqq 0)$ を示すことで済みます．

一般の図形 $C: f(x,\ y)=0\ (\leqq 0)$ についてもまったく同様の議論ができます（不等号 $\leqq 0$ は，場合に応じて，$<0,\ >0,\ \geqq 0$ に替えます）．点 $(x,\ y)$ が C 上の任意の点であるとき,

$$f(x,\ -y)=0\ (\leqq 0)$$

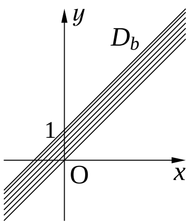
が成り立てば，点 $(x,\ -y)$ も図形 C 上にあり，図形 C は x 軸対称です．

なお，$C : f(x,\ y) = 0\ (\leqq 0)$ 上の任意の $(x,\ y)$ に対して $f(x,\ -y) = 0\ (\leqq 0)$ が成立するのは，ほとんどの場合，$f(x,\ y)$ が変数 y について偶関数である，つまり $f(x,\ -y) = f(x,\ y)$ である場合です．よって，図形 C の x 軸対称性は，実質的には，関係式 $f(x,\ -y) = f(x,\ y)$ が成り立つことを調べれば済むでしょう．x 軸対称性・原点対称性についてもまったく同様の議論ができます．

5.2.5　図形の方程式のパラメータと領域

図形の方程式が，変数 x，y 以外に，事実上変数として扱われる文字（パラメータ）を含むときは，図形を描く方法が今までとまったく異なってきます．その方法は高校では単なる受験技術の 1 つと思われていますが，変数 x，y とパラメータを同列におく考え方は数学の理解をグーンと深めるものですから，しっかり理解しましょう．

まず，簡単な例です．直線 $\ell : y = x + b$ について，y 切片 b が条件 $0 \leqq b \leqq 1$ を満たすものの全てを考え，それが占める領域 D_b を調べましょう．いろいろな b の値に対する直線 $\ell : y = x + b$ を全て考えるとわかるように，D_b は直線 $y = x + 0$ と直線 $y = x + 1$ との間にある領域ですね．



この領域を点の集合と考え直してみましょう．直線 ℓ は方程式 $y = x + b$（b は定数）を満たす点 $(x,\ y)$ の集合です．よって，領域 D_b は，b が $0 \leqq b \leqq 1$ を満たす任意の実数という条件の下で，方程式 $y = x + b$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合になります．このことを，領域

$$D_b : y = x + b \quad (0 \leqq b \leqq 1)$$

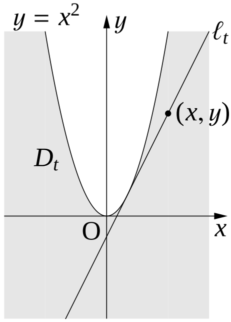
と表しましょう．領域 D_b 上の点，例えば点 $(2, 3)$ $(b = 1)$ を求める場合，今までの常識では，まず $b = 1$ として直線 $y = x + 1$ が決まり，次に $x = 2$ より $y = 3$ が決まるという順序で行いますね．

順序を変えて，先に点 $(2, 3)$ を直線の方程式 $y = x + b$ に代入しても，§§2.1.2 で議論したように，文字 b が変数化されて，同じ結果が得られます．実際，$(x,\ y) = (2, 3)$ とすると，$3 = 2 + b$ と b の方程式になり，よって，$b = 1$ が得られますね．それでは，点 $(2, 4)$ ならどうでしょう．直線の方程式に代入する

と，$4 = 2 + b$ より $b = 2$ だから，点 $(2, 4)$ は直線 $y = x + 2$ 上にあり，領域 D_b 上の点ではないことがわかりますね．したがって，点の座標を先に直線の方程式に代入して，後から b の値を求める順で行うと，その点が領域 D_b 上にあるかどうかが判定できますね．

このことは直ちに一般化できます．xy 平面上のある点 $(x,\ y)$ を直線の方程式 $y = x + b$ に代入すると，文字 b についての方程式 $y = x + b$ になりますね．この方程式の $x,\ y$ は，ある点 $(x,\ y)$ の座標と考えているので，定数と見なされます（そういえば，§§3.3.1 で議論したように，$y = x + b$ などの図形の方程式の $x,\ y$ そのものを点 $(x,\ y)$ の座標であると見なして差し支えありませんでしたね．今後はそのように扱いましょう）．方程式 $y = x + b$ より $b = y - x$ ですから，条件 $0 \leqq b \leqq 1$ より，不等式 $0 \leqq y - x \leqq 1$ が得られます．これが領域 D_b 上に点 $(x,\ y)$ があるための条件であり，領域 D_b を表す不等式でもあります．不等式 $0 \leqq y - x \leqq 1$ を $x \leqq y$，かつ，$y \leqq x + 1$ と書き直すとわかりやすいでしょう．

以上の議論はそのまま一般の図形の場合にも当てはまります．図形の方程式に任意の点の座標を代入すると，対象としている領域上にその点が存在するかどうかが判定できます．この事実を用いると，図形の方程式が $x,\ y$ 以外の実質的に変数として扱われる文字（パラメータ）を含む場合には非常に強力な武器となります．



次の例で，その方法の威力を見てみましょう．直線 $\ell_t : y = 2tx - t^2$ に対して，パラメータ t が任意の実数であるとき，直線 ℓ_t の集合が作る領域 D_t を求めましょう．先の例にならうと，領域 D_t は

$$D_t : y = 2tx - t^2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

と表されます．

先の例と同様に，平面上のある点の座標を方程式 $y = 2tx - t^2$ に代入したとき，その点が領域 D_t 上にあればその方程式を満たす実数 t が（少なくとも 1 つ）存在し，領域 D_t 上になければその方程式を満たす実数 t はありません．例えば，点 $(x,\ y)$ が $(3,\ 5)$ のとき，方程式は $5 = 6t - t^2$ となり実数解 $t = 1,\ 5$ が得られます．これは点 $(3,\ 5)$ が直線 $y = 2x - 1$ または

$y = 10x - 25$ 上にあること，よって，その点は領域 D_t 上にあることを意味します．同様に，原点 (0, 0) も D_t 上にあります（確かめましょう）．しかしながら，点 (0, 1) に対する方程式は $1 = 0 - t^2$ なので実数解をもちません．よって，その点を通る直線 ℓ_t は存在せず，したがって，点 (0, 1) は D_t 上にありません．

先の例と同様に議論を一般化しましょう．直線の方程式 $y = 2tx - t^2$ の x, y は平面上のある点 (x, y) の座標と解釈しましょう．すると，x, y は定数と見なされます．よって，$y = 2tx - t^2$ は，ある点 (x, y) に対してパラメータ t が実数であるかどうかを判定する，t についての 2 次方程式

$$t^2 - 2xt + y = 0$$

と解釈されます．そこで，この方程式が実数解を（1 つでも）もてば，実数解の値（t_1 としましょう）に対応する直線 $y = 2t_1x - t_1^2$ が存在し，それは方程式の x, y に対応する点 (x, y) を通ります．よって，その点 (x, y) は求める領域 D_t 上にあります．反対に，実数解がなければその点 (x, y) は求める領域 D_t 上にありません．

2 次方程式 $t^2 - 2xt + y = 0$ が実数解をもつための条件は判別式 $D \geqq 0$ です．よって，その条件を満たす点 (x, y) だけが領域 D_t 上に存在することになり，それらの点の集合が領域 D_t というわけです．判別式 D を計算して

$$\frac{D}{4} = x^2 - y \geqq 0,\quad \text{よって} \quad y \leqq x^2$$

を満たす点 (x, y) の集合が領域 D_t です．直線の集合を考えていたのに放物線 $y = x^2$ が現れるのはおかしいと思う人は，いろいろな t の値の直線 $y = 2tx - t^2$ を引いてみてください．t と共に傾きも y 切片も変わりますが，どの t に対応する直線も放物線 $y = x^2$ の接線になるので，そのからくりがわかるでしょう[9]．

最後に問題を 1 つ．放物線 $C_t : y = x^2 - (2t - 1)x + t^2 + 2t + 1$ のパラメータ t が任意の実数であるとき，放物線 C_t の集合が作る領域 D_t を求めよ．ヒントは不要でしょうが，やっていることの意味を噛みしめながら解答しましょう．答は $D_t : y \geqq 3x$ ですね．

[9] §§3.4.2 で紹介した，GRAPES という関数描画コンピュータ・ソフトを使って直線 $y = 2tx - t^2$ をいろいろな t について描いてみると，領域 $D_t : y \leqq x^2$ が一目瞭然にわかります．

§5.3　2 次曲線

2 次曲線は変数 $x,\ y$ の 2 次の方程式

$$ax^2 + hxy + by^2 + cx + dy + e = 0 \qquad （a,\ b,\ h \text{ は同時には } 0 \text{ でない}）$$

によって表される平面図形の総称です．例えば，$a = b\ (\neq 0),\ h = 0$ ならば円を，$b = h = 0\ (a,\ d \neq 0)$ ならば軸が y 軸に平行な放物線を表します．その他に，楕円・双曲線・2 直線なども表します．xy 項が現れるときは 2 次曲線の対称軸が斜めになります．

2 次曲線を図形の特徴から定義することもできます．そのときには，「焦点」という特別な定点や「準線」という定直線を用います．ここではその立場で議論し，それらの曲線の方程式が 2 次の形になることを示しましょう．

5.3.1　放物線

5.3.1.1　放物線の標準形

定点 $\mathrm{F}(p, 0)$（p は実数）を **焦点**，定直線 $\ell : x = -p$ を **準線** と名づけて，焦点 F と準線 ℓ から等距離にある点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めてみましょう．

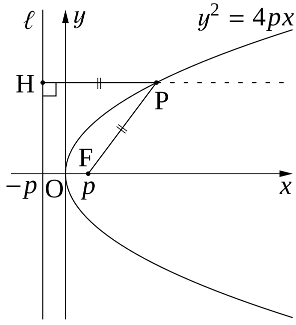
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とすると $\mathrm{H}(-p,\ y)$ だから，等距離の条件 $\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$ は座標を用いて

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |\,x + p\,|$$

と表されます．両辺を 2 乗して整理すると，放物線の方程式の標準形と呼ばれる

$$y^2 = 4px$$

が得られます．

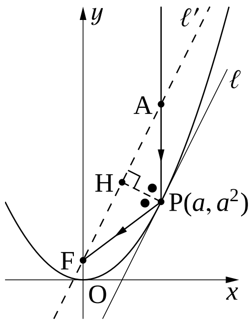


この曲線が放物線であることは，xy 平面上の点を直線 $y = x$ に関して折り返してやると，§§3.7.2.1 で議論したように，任意の点 $(x,\ y)$ が点 $(y,\ x)$ に移るので，方程式 $y^2 = 4px$ が方程式 $x^2 = 4py$ に変換されることからわかります．

放物線 $y^2 = 4px$ は x 軸に関して対称です．準線を，例えば，斜めの線に変えると，得られる放物線とその対称軸が変わります．一般に，放物線は焦点から準線に引いた垂線に関して対称であり，対称軸を放物線の軸といい，軸と放物線の交点を頂点といいます．

5.3.1.2　放物線の焦点

ここで，定点 F が焦点と呼ばれる由来を調べてみましょう．放物線をその軸の周りに回転すると，「放物面」(paraboloid) と呼ばれる曲面ができます．その内面を鏡にすると，§§3.3.1 の脚注で述べたように，軸に平行にやってきた全ての光は，鏡で反射した後，1 点に集まることが知られていて，その 1 点が焦点というわけです．衛星放送のパラボラアンテナはこの原理を利用して電波を集めています．



このことが本当かどうか調べてみましょう．軸に平行にやってきた任意の光線を 1 本調べれば済みます．放物面を反射点と焦点および頂点を通る平面で切ると，反射光はその平面内にあります．また，その切り口は放物線になるので，鏡は反射点における放物線の接線で代用できます．放物線の方程式が $y^2 = 4px$ だと，接線を求める計算が汚くなるので，軸が y 軸になるように方程式を $x^2 = 4py$ に変えましょう．さらにもっと簡単になるよう，ここでは $4p = 1$ とおき，放物線を $y = x^2$ としましょう．一般の場合は君たちの練習にとっておきます．計算がほんの僅か多くなるだけです．

軸に平行にやってきた光線が，放物線上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$（a は任意の実数）で反射されたとき，反射光が反射点 P によらずに焦点 $\mathrm{F}(0,\ \frac{1}{4})$ を通ることを示します．準備として，鏡の代わりの点 P における接線 ℓ，接線 ℓ と同じ傾きで焦点 F を通る直線 ℓ'，直線 ℓ' と軸に平行にやってきた光線の交点 A，および，点 P から直線 ℓ' に下ろした垂線の足 H を用意しましょう．

反射の法則は，入射角と反射角が等しいことなので，$\angle\mathrm{HPA} = \angle\mathrm{HPF}$ を示すことになりますが，それは線分の関係 $\mathrm{PA} = \mathrm{PF}$ を示すのと同じことですね．

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における放物線 $y = x^2$ の接線 ℓ を，未知の傾き m を導入して，$\ell : y - a^2 = m(x - a)$ としましょう．すると，放物線 $y = x^2$ と連立して得られる方程式 $x^2 - a^2 = m(x - a)$ が重解をもつので，判別式 $D = m^2 - 4(am - a^2) = 0$ より，$m = 2a$ と接線の傾き m が決まります．よって，焦点 $\mathrm{F}(0,\ \frac{1}{4})$ を通る直線 ℓ' が $\ell' : y = 2ax + \frac{1}{4}$ と求まります．したがって，直線 ℓ' 上の点 A の座標が $(a,\ 2a^2 + \frac{1}{4})$ と決まります．そこで，

$$\mathrm{PA} = 2a^2 + \frac{1}{4} - a^2 = a^2 + \frac{1}{4}$$

となります．また，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{F}(0,\ \frac{1}{4})$ より

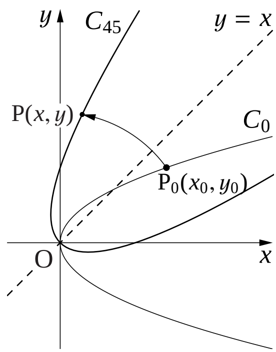
$$\mathrm{PF} = \sqrt{a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = a^2 + \frac{1}{4}$$

が得られ，したがって，PA = PF が確かめられます．また，逆に，PA = PF ならば，明らかに $\angle\mathrm{HPA} = \angle\mathrm{HPF}$ が成り立ちますね．よって，入射角と反射角が等しいことが保障されます．また，点 P は放物線上の任意の点，つまり放物面上の任意の点と見なせるので，放物面の軸に平行にやってきた光は全て焦点 F に集まるわけです．

5.3.1.3　斜めの軸をもつ放物線

軸が x 軸の放物線 $C_0 : y^2 = 4px$ を原点の周りに 45° 回転して得られる放物線 C_{45} にはどのような特徴があるでしょうか．我々は，三角関数の知識から回転についての理解があり，また，§§3.6.1.2 および §§5.1.6 において図形の変換の原理的な事柄を学んだので，放物線 C_{45} の方程式を求めることができます．忘れてしまった人は見直しておきましょう．

まずは図形の回転の原理的な話から始めましょう．次ページの図で表されるように，放物線 $C_0 : y^2 = 4px$ を原点の周りに 45° 回転して得られる C_{45} 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，放物線 C_{45} を表す方程式は変数 x，y によって表されますね．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を原点の周りに −45° 回転して得られる点を $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ とすると，その点は元の放物線 $C_0 : y^2 = 4px$ 上にあるので，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ は C_0 の方程式を満たします：$y_0^2 = 4px_0$．



したがって，x_0，y_0 を x, y を用いて表すと，$y_0^2 = 4px_0$ から x と y の関係, つまり放物線 C_{45} の方程式が得られます．そのために点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を極座標を用いて $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ の形に表しましょう．ここで，$r = \mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\theta$ は動径 OP の表す角です．したがって，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と表されます．一方，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を $-45°$ 回転した点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ については，点 P の座標が $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ だから，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ については

$$(x_0,\ y_0) = (r\cos(\theta - 45°),\ r\sin(\theta - 45°))$$

と表されます．加法定理を用いると，

$$x_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta), \quad y_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}(\sin\theta - \cos\theta)$$

が得られ，ここで，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を用いると，

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)$$

の関係が導かれます．それを C_0 上の点 $(x_0,\ y_0)$ が満たす方程式 $y_0^2 = 4px_0$ に代入して放物線 C_{45} の方程式

$$(y - x)^2 = 4\sqrt{2}p(x + y)$$

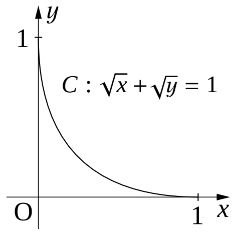
が得られ，整理して

$$C_{45} : x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}p(x + y) = 0$$

となります．

この方程式は，x^2 項も y^2 項も現れるので，一見，放物線の方程式とは思われませんね．今の場合のように，放物線の軸が直線 $y = x$ のように斜めになると，xy 項を含む 2 次の項が現れます．したがって，2 次曲線の種類を特定するにはそれらを分類するための一般的な議論が必要になります．

ここで，図形の回転を練習するよいチャンスなので，しばしば引き合いに出される曲線



$$C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

が，実は，放物線の一部であることを示しておきましょう．曲線 C の方程式の x, y を交換しても同じ方程式になるので，曲線 C は直線 $y = x$ に関して対称です．よって，先ほどと同様に，曲線 C を原点の周りに 45° 回転すると，放物線の方程式が得られることを示せばよいですね．

計算が容易になるように曲線 C の方程式から根号をはずしておきましょう．まず，$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$ の両辺を 2 乗すると，$y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$ が得られます[10]．よって，$2\sqrt{x} = x - y + 1$ と移項して，また 2 乗すると，根号がない方程式 $4x = (x - y + 1)^2$ が得られます（このとき，新たな曲線 $2\sqrt{x} = -(x - y + 1)$ が付加されます）．

曲線 $4x = (x - y + 1)^2$ を原点の周りに 45° 回転するには，先ほどと同様の議論をすると，結果として，方程式 $4x = (x - y + 1)^2$ の x, y にそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)$ を代入すればよいことになります[11]．よって，

$$4\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) + 1\right)^2.$$

整理して，放物線の方程式

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

が得られます．上の放物線の一部（$y \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分）が曲線 $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ を原点の周りに 45° 回転したものになっています．

---

[10] 2 乗するときには $x^2 = a^2$ が $x = \pm a$ と同値であることに注意しましょう．2 乗することによって，元の曲線 C には含まれなかった曲線 $\sqrt{y} = -(1 - \sqrt{x})$ が付加されます．

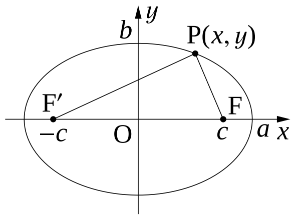
[11] 曲線 $4x = (x - y + 1)^2$ 上の点を $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ とすると，$4x_0 = (x_0 - y_0 + 1)^2$ が成り立ちますね．この点を原点の周りに 45° 回転した点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，(x_0, y_0) は (x, y) を $-45°$ 回転した点であり，$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)$ の関係がありますね．

5.3.2　楕円

円の中心が 2 つに分裂したらどんな図形になるでしょう.

5.3.2.1　楕円の標準形

2 定点からの距離の和が一定な点の軌跡を **楕円** (ellipse) といいます．その 2 定点は「焦点」と呼ばれます.



2 つの焦点を F(c, 0)，F′($-c$, 0) ($c > 0$)，距離の和を $2a$ ($a > 0$)，軌跡上の点を P(x, y) とすると，和が一定の条件は

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$$

ですね．座標で表すと

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

移項して,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

両辺を 2 乗して整理すると,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

さらに両辺を 2 乗して整理すると,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

が得られます [12).]

ここで，$\triangle\mathrm{PFF}'$については三角形の成立条件[13)]より

$$(2c =)\ \mathrm{FF}' < \mathrm{PF} + \mathrm{PF}'\ (= 2a).$$

---

12) 2 乗を 2 回するのがいやな人はこんな手があります： $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ の両辺に $\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'$ を掛けて，$\mathrm{PF}^2 - \mathrm{PF}'^2 = 2a(\mathrm{PF} - \mathrm{PF}')$．よって，$\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = -\dfrac{2c}{a}x$ を得るから，$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ と組み合わせて，$\mathrm{PF} = a - \dfrac{c}{a}x$ が得られます.

13) 三角形の 1 辺は，残りの 2 辺の和より小さく，2 辺の差より大きい.

よって，(0 <) $c < a$ であるから，$a^2 - c^2 = b^2$ ($b > 0$) とおくことができ，上式を a^2b^2 で割ると，楕円の方程式

$$E_0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = a^2 - c^2,\ b > 0)$$

が得られます．

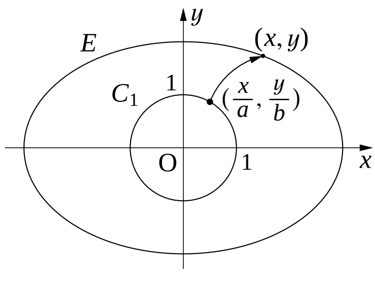
楕円は，図からわかるように 2 つの（対称）**軸** をもち，両軸の交点を楕円の **中心**，軸が楕円によって切り取られる線分のうち，長いほうを **長軸**（長さ $2a$），短いほうを **短軸**（長さ $2b$）といいます．2 焦点は長軸上にあることに注意しましょう．これらの楕円の特徴は 2 焦点間の距離 $2c$ と距離の和 $2a$ のみによって定まり，その 2 条件を保って焦点を移動しても，得られる軌跡は移動前の楕円に合同な楕円になります．2 焦点を x 軸上に原点対称に配置した楕円 E_0 は **楕円の標準形** といわれ，x 軸上に長軸，y 軸上に短軸があり，x 軸・y 軸および原点に関して対称です．

なお，楕円を長軸の周りに回転すると「回転楕円面」と呼ばれる立体図形ができます．その面の内面を鏡にすると，一方の焦点から光を任意の方向に発射したとき，楕円面で反射された光は他方の焦点に集まることが知られています．

5.3.2.2　楕円と円の関係

楕円は円に近い図形で，時として「長円」とも呼ばれます．実際，楕円の 2 焦点が一致する場合には楕円は円になります．逆に，円を長軸・短軸方向に伸縮すると楕円になるように思われます．そのことを確かめてみましょう．

そのために，楕円の標準形 E_0 を $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ と書き換えて単位円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ と比較し，§§3.6.2.1 の倍変換を思い出しましょう．単位円 C_1 を x, y 方向にそれぞれ a, b 倍に伸縮した図形を E とし，それが E_0 に一致することを示します．点 $(x,\ y)$ が図形 E 上にあるとき，点 $(x,\ y)$ が満たす方程式が E を表す方程式になりますね．その



とき，E 上の点 $(x,\ y)$ に対応する変換前の点は $(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b})$ であり，その点は C_1 上にあるので E 上の点 $(x,\ y)$ は方程式 $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$ を満たしますね．よって，この方程式は E 上の点が満たすべき方程式，すなわち図形 E の方程式になります．よって，図形 E は楕円 E_0 に一致しますね．したがって，楕円 E_0 は単位円 $x^2+y^2=1$ を x，y 方向に a，b 倍に伸縮すれば得られます．

なお，楕円 E_0 の方程式を

$$\left(\frac{b}{a}x\right)^2+y^2=b^2$$

と表すと，楕円 E_0 は円 $x^2+y^2=b^2$ を x 方向に $\frac{a}{b}$ 倍したものとも見なせます．

同じことが楕円の方程式をパラメータ表示してもわかります．§§5.1.5 の議論から，単位円 $x^2+y^2=1$ のパラメータ表示は $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$．つまり，方程式を満たすように変数 x，y を第 3 の変数（パラメータ）で表した式でしたね．同様に，楕円の方程式 $E_0:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を満たす変数 x，y は $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ と表すことができますね．この表式と単位円のパラメータ表示を比較すると，明らかに，単位円上の任意の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を x，y 方向に a，b 倍した点が楕円 E_0 上にあることがわかりますね．

なお，楕円 E_0 の正式なパラメータ表示は

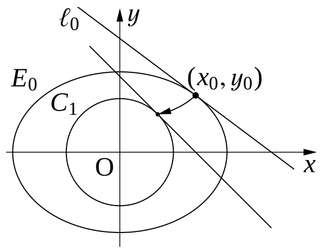
$$E_0:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

です．

5.3.2.3　**楕円の接線**

楕円の標準形 $E_0:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線 ℓ_0 を求めましょう．接線を求める基本的方法は，接点 $(x_0,\ y_0)$ を通る未知の傾き m の直線 $y-y_0=m(x-x_0)$ と楕円 E_0 の方程式を連立したとき，重解をもつという条件で m が定まり，よってその直線は接線 ℓ_0 になるというものです．その方法はある程度の計算力を必要とします．ここでは，ちょっと工夫して，楕円を倍変換すると円になることを利用して，円の接線を楕円の接線に変換する方法を考えましょう．

まず，x，y 方向にそれぞれ p，q 倍する変換を行うと，これまでの議論からわかるように，任意の直線 $ax + by + c = 0$ はその x，y を $\dfrac{x}{p}$，$\dfrac{y}{q}$ で置き換えて得られる直線 $a\dfrac{x}{p} + b\dfrac{y}{q} + c = 0$ に変換されますね．よって，‘ 倍変換によって直線は直線に移る ’ ことがわかります．同様に，‘ 曲線の接線は，倍変換によって，変換された曲線の接線に移る ’ ことも納得できるでしょう．



楕円 E_0：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は，x，y 方向にそれぞれ $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ 倍する倍変換を行うと，E_0 の方程式の x，y は逆に a，b 倍されて単位円 C_1：$x^2 + y^2 = 1$ に移りますね．そのとき E_0 上の点 $(x_0,\ y_0)$ は単位円 C_1 上の点 $\left(\dfrac{x_0}{a},\ \dfrac{y_0}{b}\right)$ に移ります．すると，その点における C_1 の接線の傾きは，§§5.1.3.2 の議論より，$-\dfrac{bx_0}{ay_0}$ となりますね．よって，その接線の方程式は

$$y - \frac{y_0}{b} = -\frac{bx_0}{ay_0}\left(x - \frac{x_0}{a}\right)$$

となります．この接線を x，y 方向に a，b 倍すると，点 $(x_0,\ y_0)$ における楕円 E_0 の接線 ℓ_0 の方程式になります：

$$\frac{y}{b} - \frac{y_0}{b} = -\frac{bx_0}{ay_0}\left(\frac{x}{a} - \frac{x_0}{a}\right).$$

ここで，接点 $(x_0,\ y_0)$ が楕円 E_0 上にあるための条件 $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ を用いて整理すると，最終的に

$$\ell_0 : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

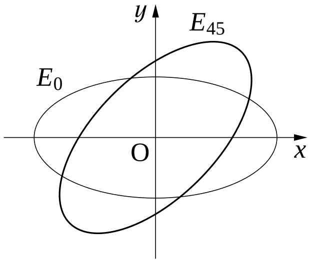
が得られます．

このように，図形の変換を利用して接線を求めるのは非常に強力な方法です．放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線を求めるのに，いったん，平面を直線 $y = x$ に関して折り返して，放物線を $x^2 = 4py$ に変換しておく方法があります．練習として手ごろな問題です．求める接線の方程式は

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

であることを確かめましょう．

5.3.2.4　楕円の回転



楕円の標準形 E_0 : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を原点の周りに 45° 回転して得られる楕円の方程式 E_{45} をパラメータ表示で求めてみましょう．§§5.1.6 と §§5.3.2.2 の議論から，楕円 E_{45} は，楕円の標準形 E_0 のパラメータ表示：$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ において，変数 x, y を

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$$

で置き換えればよい，つまり，パラメータ表示の (x, y) を原点の周りに $-45°$ 回転した点で置き換えれば得られます：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = a\cos\theta, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) = b\sin\theta.$$

整理して，

$$E_{45}: \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a\cos\theta - b\sin\theta) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a\cos\theta + b\sin\theta) \end{cases}$$

が得られます．コンピュータで作図するときにはこのパラメータ表示が用いられます．

なお，楕円 E_{45} の方程式は，関係式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を利用すると，$\cos\theta$, $\sin\theta$ を x, y で表して

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,a}(x+y)\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,b}(y-x)\right)^2 = 1$$

が得られ，整理すると

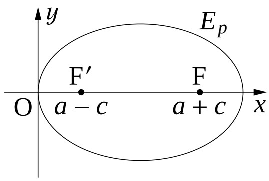
$$E_{45}: (a^2+b^2)(x^2+y^2) - 2(a^2-b^2)xy - 2a^2b^2 = 0$$

となりますね．対称軸が斜めになると，放物線の場合と同様，xy 項を含む 2 次の項が現れますね．

5.3.2.5　楕円と放物線の関係

楕円には焦点が 2 つあり，放物線には 1 つしかありません．また，楕円は閉じた曲線ですが，放物線は開いています．もし，楕円の焦点の片方が無限の彼方に飛んでいったらどうなるのでしょうか．調べてみましょう．

まず，楕円 $E_0 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を x 方向に a だけ平行移動して得られる楕円を E_p とすると，その方程式は $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，つまり，



$$E_p : y^2 = b^2\left(1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}\right) = b^2\left(-\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x}{a}\right)$$

となります．楕円 E_p の 2 焦点は $\mathrm{F}(a+c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(a-c,\ 0)$ になりますね．

ここで，焦点 F′ を固定しておいて，焦点 F を無限に飛ばすことを考えましょう．それには $a-c=p$ を一定にしておいて，a と c を無限に大きくしていけばよいわけです．$b^2 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c) = p(2c+p)$ より，楕円 E_p の方程式は c と p で表され，$\dfrac{p}{c}$ を p/c と書くと，

$$y^2 = -\frac{p(2c+p)}{(c+p)^2}x^2 + \frac{2p(2c+p)}{c+p}x = -\frac{p(2+p/c)}{(1+p/c)(c+p)}x^2 + \frac{2p(2+p/c)}{1+p/c}x$$

となります．

ここで，c を限りなく大きくしていくと，$2+p/c$ は 2 に，$1+p/c$ は 1 に，$c+p$ は ∞ に限りなく近づいていきます．また，我々が前提にしている領域は原点から有限の距離にある部分なので，点 $(x,\ y)$ の両座標は有限の値です．よって，楕円 E_p の方程式の 1 次項は限りなく $\dfrac{2p(2+0)}{1+0}x = 4px$ に近づいていき，2 次の項は $-\dfrac{p(2+0)}{(1+0)\infty}x^2 = 0$ に近づいていきます．よって，$c=\infty$ となる極限で，楕円 E_p の方程式は

$$E_p : y^2 = 4px$$

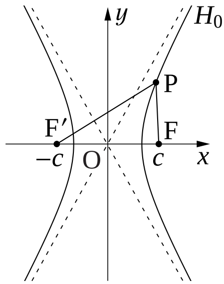
になります．

この方程式は前の §§ で得られた放物線の標準形そのものですね．したがって，‘ 放物線は片方の焦点が無限遠にある楕円 ’ と考えることができるわけです．

5.3.3　双曲線

前の §§ で，楕円の焦点の片方が無限遠に飛ぶと放物線になることを見ました．さらに，変数 x の値が正から負に変わるときに関数 $y = \dfrac{1}{x}$ の関数値が $+\infty$ から $-\infty$ に変わるように，∞ に消えた焦点が $-\infty$ のほうからひょっこり顔を出したとしたらどうでしょう．こんな場合に当たるのが双曲線です．

5.3.3.1　双曲線の標準形



双曲線 (hyperbola) の定義は焦点と呼ばれる 2 定点からの距離の差（の大きさ）が一定である点の軌跡です．双曲線の 2 つの焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ ($c > 0$)，距離の差を $2a$ (> 0)，軌跡上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，双曲線の定義は

$$|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'| = 2a,$$

つまり，$\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = \pm 2a$ です．これを座標で表すと，

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

です．楕円のときと同様，2 乗を 2 回行うと次の式が得られます．

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

ここで，$\triangle\mathrm{PFF}'$の成立条件より ($2c$ $=$) FF' $>$ $|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'|$ ($=$ $2a$)，よって，$c > a$ (> 0) に注意すると，$c^2 - a^2 = b^2$ ($b > 0$) とおけるので，両辺を a^2b^2 で割ると **双曲線の標準形** の方程式

$$H_0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = c^2 - a^2\ (b > 0))$$

が得られます．

2 焦点 FF' を通る直線を双曲線の **主軸**，主軸と双曲線の交点を **頂点**，2 つの頂点の中点を **中心** といいます．標準形 H_0 については，主軸は x 軸，頂点は $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，中心は原点で，グラフは x 軸・y 軸および原点について対称です．

双曲線の標準形 H_0 についても，楕円の場合と同様，簡単なパラメータ表示ができます．関係式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割って移項すると，関係式 $\dfrac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = 1$ が得られます．したがって，この関係式が H_0 の方程式と同値になるように，標準形 H_0 のパラメータ表示を

$$H_0 : \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$$

とすればよいことがわかります（標準形 H_0 の図はこのパラメータ表示を用いて描きました）．

なお，双曲線の標準形 H_0 のグラフを直線 $y = x$ に関して折り返すと，変換後には 2 焦点が $\mathrm{F}(0, c)$，$\mathrm{F}'(0, -c)$ $(c > 0)$ と y 軸上にあり，距離の差が $2a$ $(0 < a < c)$ の双曲線になります．その主軸は y 軸で，頂点は y 軸上にあり，方程式は，$c^2 - a^2 = b^2$ $(b > 0)$ として，

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,\ \text{つまり}\quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$

と表されることに注意しましょう．

主軸の周りに双曲線を回転すると，「回転双曲面」という曲面ができます．その曲面の焦点の側を鏡にすると，曲面の向こう側の焦点に向けて発射された光は曲面で反射されて手前の焦点に集まります．

5.3.3.2　**双曲線の漸近線**

双曲線の標準形 $H_0 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の図（前のページの図）を見ると，双曲線は，x，y の値が $\pm\infty$ になっていくと，ある直線（図の破線で表された直線）に近づいていくように見えます．一般に，曲線がある直線に限りなく近づくとき，この直線を曲線の **漸近線**（ぜんきんせん） といいます（漸＝だんだんに進むこと）．

標準形 H_0 の方程式を $H_0 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ と表してみるとわかるように，x^2，y^2 の値が無限に大きくなると，定数項 -1 は無視できます．よって，方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ はそこで双曲線 H_0 を近似的に表し，これから標準形 H_0 の漸近線

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

が得られます．ただし，この操作は，無限を直接扱うような形で行われているために，数学的には正当なものとは認められない操作であり，漸近線の見当をつける処方箋と見なされます．

正しい扱いは，完全に有限の範囲で行わなければなりません．そのために，漸近線（の候補）と双曲線の差を考え，その差が 0 に近づいていくという議論を行って正当化します．標準形 H_0 のグラフは，x 軸・y 軸に関して対称なので，第 1 象限の漸近線について調べれば十分です．H_0 の方程式を y について解くと，第 1 象限では

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

です．よって，上の関数と漸近線の候補 $y = \frac{b}{a}x$ との差を調べる，つまり，それらのグラフの高さの差を調べることになります：

$$\left|\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right| = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

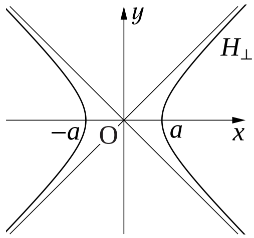
$x - \sqrt{x^2 - a^2}$ は，x の値が無限に大きくなると $\infty - \infty$ の形になり，このままでは調べられません．そこで，右辺の分母・分子に $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ を掛けます．すると，分子の根号が外れて，

$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

となります．この右辺の値は，第 1 象限にある双曲線 H_0 上の点に対応する全ての x（つまり $x \geqq a$）に対して有限であり，x の値が無限に大きくなると限りなく 0 に近づきます．よって，$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ は $\frac{b}{a}x$ に限りなく近づく，つまり，双曲線 H_0 上の点は直線 $y = \frac{b}{a}x$ に限りなく近づきます．

他の象限の場合についても同様に議論できて，双曲線の標準形 H_0 上の点 (x, y) は，$|x|$ の値が限りなく大きくなるとき，直線 $y = \pm\frac{b}{a}x$ に限りなく近づくことがわかります．したがって，この 2 直線が双曲線 H_0：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の漸近線であることが保証されます．

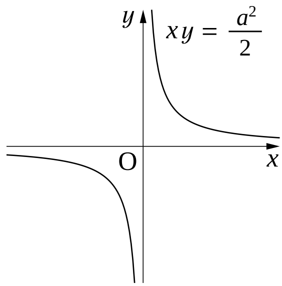
5.3.3.3　直角双曲線



2 つの漸近線が直交する双曲線を **直角双曲線** といいます．標準形 $H_0 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の 2 つの漸近線 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ が直交するのは，傾きの積が -1 の場合，つまり $\dfrac{b}{a}(-\dfrac{b}{a}) = -1$，よって $a = b$ の場合です．そのとき，直角双曲線の標準形は

$$H_\perp : x^2 - y^2 = a^2$$

と表すことができます．この双曲線の頂点は $(\pm a,\ 0)$，漸近線は $y = \pm x$ ですね．



さて，この直角双曲線の標準形 $H_\perp$ を，原点の周りに 45° だけ回転してください．どこかで見たような気がしませんか．そうです，そのグラフの $x > 0$ の部分は反比例のグラフですね．このことを確かめてみましょう．

直角双曲線の標準形 $H_\perp$ を原点の周りに 45° だけ回転するには，§§5.3.1.3 で学んだように，$H_\perp$ の方程式 $x^2 - y^2 = a^2$ の変数 $x,\ y$ にそれぞれ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$ を代入すれば得られますね．整理すると，確かに反比例の方程式

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

が得られますね．それを確かめるのは練習問題にしましょう．