第4章　三角関数

古代エジプト・バビロニアの時代から，人々は角度を利用していました．ちなみに，1° は地球が太陽を周るときの 1 日分の回転角として決められたといいます．角度を用いた計算が三角形の計量と深く結びついていることが明らかになってくると，その計算法は古代ギリシャ時代には「三角法」と呼ばれるようになり，天文学や地理学の発展をもたらしました．

天文学は最も古い科学の 1 つで，季節の変わり目を知ったり，時刻を計ったり，暦を作ったりする必要性から生じました．天文学を発展させた重要な要因は，商業の発達がもたらした陸路や海路での旅行でした．太古から，昼は太陽，夜は月や星が，日時や季節を知るのに役立つのはもちろん，大海原で船の位置を決定するのにも，また，隊商にとっては砂漠の真ん中で正しい方向を見分けるのにも役立ちました[1]．

天体観測の蓄積によって天体の位置を求める必要が生じました．学者たちは地上の遠い 2 地点と天体が作る三角形を考えて，遠い 2 地点間の距離とその両端の角度を測り，今で言うところの‘ 1 辺と両端の角 ’の知識を用いて残りの辺の長さ，つまり惑星や恒星までの距離を求めました．このようにして，天文学は三角形の辺や角を求める計算方法を開発し，そして三角法が生まれたのでした．古代バビロニアの学者たちは既に日食や月食を予想できたそうです．

古代ギリシャの学者たちは，三角形の辺や角の中の 3 つ（ただし，1 つは辺）を与えて，残りの辺と角を求める問題を提起しました．この問題を解くために，半径が一定の円の「中心角に対する弦の長さの表」が初めて作られました．円の半径が 1 のとき，この弦の半分の長さが現在の「正弦」(sine) に対応します．

---

[1] ここの表現は『グレイゼルの数学史II』（保阪秀正・山崎昇 訳，大竹出版）からお借りしました．

現在の正弦は，インドの天文学者たちによって 4〜5 世紀には既に採用され，また彼らは現在の「余弦」(cosine) も調べました．インドの三角法を習得したアラビアの学者はそれを熱心に発展させました．9〜10 世紀には垂直な壁に直角に立てた棒を用いた日時計の研究から現在の「正接」(tangent) の概念が生まれました．その量の応用は日時計以外にも急速に広がっていき，10 世紀の終りには正接は円周に対する接線を用いて定義されました．

アラビアの学問の成果は，十字軍の遠征によって東西の交流が活発になった 13〜14 世紀にヨーロッパに徐々にもたらされ，15 世紀のルネッサンス期を経て急速に発展しました．さまざまな物体の回転現象の観察を通して，角の概念は，ユークリッド以来用いられてきた「2 つの半直線のなす角」から，半直線が 1 点の周りを回る「回転量としての角」へと一般化されました．このことによって，一方では，360° 以上の角の考察が可能になり，他方では，‘ 回転の向き ’ によって正の角と負の角が区別されるようになりました．このように一般化された ‘ 実数の角 ’ を用いて，正弦・余弦・正接などの三角比は，18 世紀の中頃，スイスの偉大な数学者オイラー (Leonhard Euler，1707〜1783) によって，「三角関数」として初めて扱われました．

三角関数は，回転するもの・振動するもの・波や波動など，周期的に変動するものに対して応用されるようになり，現在では，ほとんどの科学・技術の分野で必須のものとなっています．また，複素数の演算は三角関数なしでは不可能です．

§4.1　三角関数の定義

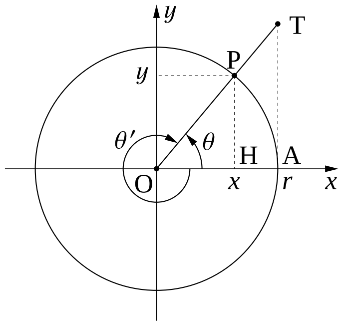
三角関数は角度に関係する多くの関数の総称です．それらの関数には代表的な余弦・正弦・正接の 3 つの関数があります．順次紹介しましょう．

4.1.1　余弦関数・正弦関数

三角関数を定義するに当たって，できる限り応用範囲が広くまた簡単なものを考えましょう．三角形の内角は 180° 未満ですが，自動車の車輪は何万回転もするし，逆回転もします．逆回転の角は負の角とすると都合がよいですね．

よって，角度は $-\infty^\circ$ から $+\infty^\circ$ まで扱えるようにしましょう．このように拡張された角度を **一般角** といいます．また，自転車の角なら扱えても小さな一輪車の角なら無理では困るので，車輪の大小にかかわらず対応できるようにしましょう．また，時計の針先は 1 回転すると同じ所に戻ってきます．よって，‘ 回転物体の位置が周期的に変わる性質を反映するもの ’ が望ましいわけです．

これらの要請を満たすものは意外と簡単に見つかります．図の円は中心が原点 O，半径が r です．円上の任意の 1 点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とします．また，円と x 軸との交点 $\mathrm{A}(r,\ 0)$ における接線と半直線 OP との交点を T としましょう．角度については，∠AOP を分度器で測れる 180° 以内の角として習ったと思います．我々の目的のためには，しかしながら，‘ ∠AOP は半直線 OP を半直線 OA の位置から原点 O の周りに回転して得られた回転角である ’ と考えるのが便利です．このとき，回転する半直線 OP を **動径** といい，また動径 OP の始めの位置の半直線 OA を **始線**，∠AOP を **動径 OP の表す角** といいます．上の図では，反時計回り（左回り）の角を正として，∠AOP = θ（シータ），また時計回り（右回り）の角を負として，$\theta' = \theta - 360^\circ$ です．



さて，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，角 θ の **余弦** (cosine) と呼ばれる比 $\dfrac{x}{r}$ によって余弦関数 $\cos\theta$（コサイン）を，および，**正弦** (sine) と呼ばれる比 $\dfrac{y}{r}$ によって正弦関数 $\sin\theta$（サイン）を定義しましょう：

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \qquad (r = \mathrm{OP}).$$

このとき，例えば点 P が第 1 象限にあるとき，

$$\frac{x}{r} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{TO}}, \ \text{および} \quad \frac{y}{r} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{OT}}$$

が成り立つので，‘ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は，円の半径 r に関係なく，角 θ のみの関数 ’ であることがわかります．

また，角 θ と反対に回る角 $\theta' = \theta - 360^\circ$ に対して，点 P の位置は同じなので，

$$\cos(\theta - 360^\circ) = \cos\theta, \quad \sin(\theta - 360^\circ) = \sin\theta$$

が成立します．さらに，何回転または逆回転しても点 P の位置は変わらず，

$$\cos(\theta + n \cdot 360^\circ) = \cos\theta, \quad \sin(\theta + n \cdot 360^\circ) = \sin\theta \quad （n \text{ は整数}）$$

が成り立ちます．このことは，この 2 つの関数が，**周期** を 360° として，周期的に変化する **周期関数** であることを示しています．一般に，“ 関数 $f(x)$ が（全ての x に対して）関係 $f(x+p) = f(x)$ を満たし，p がその関係を成立させる最小の正の定数のとき，関数 $f(x)$ は周期 p の周期関数である ” といいます．三角関数は周期関数の最も代表的なものです．

また，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ は独立した関数ではなく，3 平方の定理より $x^2 + y^2 = r^2$ だから $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$，よって，三角関数の相互関係

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

が成立します[2)]．

ここで少々練習しましょう．1 つの角が 30° の直角三角形などを描くと役立ちます．$\theta = 0^\circ$ のときは，三角関数の定義式において $x = r$，$y = 0$ だから，$\cos 0^\circ = 1$，$\sin 0^\circ = 0$．$\theta = 30^\circ$ のときは，$r = 2$ とすると，$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ だから，$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ です．$\theta = 45^\circ$ のときは，$r = \sqrt{2}$ とすると，$\mathrm{P}(1,\ 1)$ より，$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ですね．また，鈍角 $\theta = 120^\circ$ のときは，$r = 2$ とすると，$P(-1,\ \sqrt{3})$ より $\cos 120^\circ = \dfrac{-1}{2}$，$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．また，負の角 $\theta = -90^\circ$ のときは，$x = 0$，$y = -r$ より，$\cos(-90^\circ) = 0$，$\sin(-90^\circ) = -1$．では，$\cos(-135^\circ)$，および $\sin(-135^\circ)$ はいくらでしょうか？ 答は，$r = \sqrt{2}$ とすると，$P(-1,\ -1)$ より $\cos(-135^\circ) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，$\sin(-135^\circ) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ です．

ところで，$\sin 1^\circ$ はいくらになるでしょう．関数電卓をもっている人なら，$0.0174524064\cdots$ とすぐ出るでしょうが，直角三角形を用いる方法では ±30°

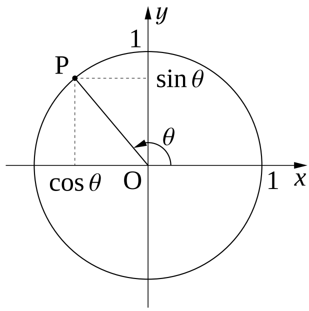
---

2) 簡略表現 $\cos^2\theta = (\cos\theta)^2$，$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$ を用いました．一般に，$f^n(x) = (f(x))^n$ です．なお，関係を表す等式（関係式）は恒等式であり，関係する変数の全ての値に対して成立します．

や ±45° およびそれらの倍数の角でないとダメです．いずれ,「加法定理」などの定理を知ると，15° や 75° など，もう少し多くの角について求められるようになります．任意の角について，いくらでも精度よく近似を求める方法は微分の章で議論します．その方法が関数電卓の原理です.

さて，三角関数は円の半径 r によらないことがわかったので，$r = 1$ としましょう．すると，$\mathrm{P}(x,\ y)$ において $x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ となり，よって，$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ が得られます．つまり,‘ **単位円**（中心が原点の半径 1 の円）と角が θ の動径との交点の座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$ ’となります.

これは非常にすっきりした結果なので，むしろ，こちらのほうが $\cos\theta$，$\sin\theta$ の定義とするのに適しています．以後，こちらのほうをそれらの定義としましょう：



動径 OP の表す角が θ のとき，OP と単位円の交点を点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ と定める.

つまり，単位円上の点の x 座標を $\cos\theta$，y 座標を $\sin\theta$ とするわけです.

なお，単位円上の点が $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表されることから，これら θ の関数の値域が

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1, \qquad -1 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

に制限されることがわかります．つまり，θ の変化に伴って，コサインとサインの値は -1 と 1 の間を振動することになります．このことは三角関数が振動する物体の運動を記述するのに適していることを示唆します．実際,「単振動」と呼ばれるバネの小さな振動は三角関数によって記述されることが知られています.

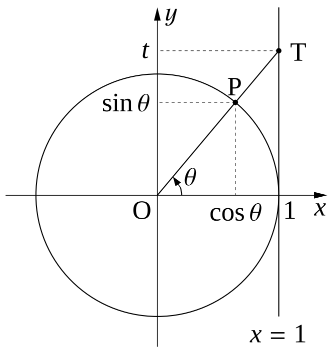
また，単位円上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を OP 方向に r 倍した点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を表すには，点 P の座標を x, y の両方向に r 倍すればよいので，直ちに

$$(x,\ y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

を得ます．よって，余弦関数・正弦関数を用いて平面上の任意の点を容易に表すことができます．例えば，$(1,\ \sqrt{3}) = (2\cos 60°,\ 2\sin 60°)$ です.

点 $\mathrm{Q}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は原点 O と Q の距離 r と，動径 OQ の回転角 θ によって定まるので，点 Q を $\mathrm{Q}(r,\ \theta)$ と表すこともあります．このとき，$(r,\ \theta)$ を Q の **極座標** といいます．

4.1.2　正接関数



正接 関数といわれる，もう 1 つの役に立つ三角関数 タンジェント $\tan\theta$ を導入しましょう．点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ に対して，$\tan\theta$ は直線 OP の傾きとして定義されます：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

このとき，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ t)$ とすると，比 $\dfrac{t}{1}$ は直線 OP の傾き $\tan\theta$ に等しくなるので $t = \tan\theta$．よって，$\mathrm{T}(1,\ \tan\theta)$ となり，‘ $\tan\theta$ は T の y 座標 ’ として表されます．

また，点 T を OP 方向に $r\ (>0)$ 倍した点を B，点 B から x 軸に下ろした垂線の足を点 A とすると，$0 < \theta < 90°$ のとき，$\mathrm{B}(r,\ r\tan\theta)$，$\mathrm{A}(r,\ 0)$ となるので，$\mathrm{AB} = r\tan\theta = \mathrm{OA}\tan\theta$ が得られます．これを用いると，「仰角」（水平面から見上げる角）θ を用いて，OA だけ離れた地点の物の高さを測ることができます．各自，図を描いて確認しましょう．

動径 OP を 1 回転すると元の傾きに戻るので

$$\tan(\theta + n\cdot 360°) = \tan\theta \qquad (n\ \text{は整数})$$

が成立します．また，半回転しても傾きは変わらないので

$$\tan(\theta + n\cdot 180°) = \tan\theta \qquad (n\ \text{は整数})$$

も成り立ちます．つまり関数 $\tan\theta$ は周期 180° の周期関数です．

練習に $\tan 45°$ を求めてみましょう．45° は傾きでいうと 1 のことだから，直ちに $\tan 45° = 1$．または，$\tan 45° = \dfrac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$ と考えることもできます．$\tan(-60°)$ はどうでしょう．傾きが $\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$ だから $\tan(-60°) = -\sqrt{3}$ ですね．

では，$\tan 90^\circ$ はどうでしょう．傾きが ∞（正しくは，-0 で割った場合も考えて，$\pm\infty$）だから $\tan 90^\circ = \pm\infty$．つまり，$\tan 90^\circ$ は，∞ が実数でないので，数学的には定義できないのです．したがって，関数 $\tan\theta$ は，$\theta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$（$n$ は整数）のとき傾きが ∞ になり，そこでは定義できません．それら以外の θ の値のときは，関数 $\tan\theta$ が連続的に変化するので定義できます．

4.1.3　弧度法

$\sin 1500^\circ$ を求めよ．大きな角度ですね．三角関数の周期性を用いて，

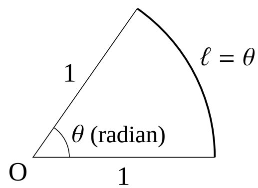
$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

です．大きな角を度で表すのはちょっと不便ですね．大きな角や周期を表すのに，また，理論的とり扱いをするのに便利な角の測り方，**弧度法** があります．円弧の長さ ℓ は円の半径 r と弧を望む中心角 θ に比例することはよく知られています：

$$\ell \propto r\theta.$$

したがって，半径 1 の円の円弧の長さ ℓ は中心角 θ だけで決まりますね．

弧度法は半径 1 の円の円弧の長さ ℓ を θ とすると，中心角も同じ数値 θ になるように測る方法で，単位はラジアン (radian) です．半径 1 の円の円周は 2π なので，



$$360^\circ = 2\pi \quad (\text{radian})$$

の関係があります．これから，$180^\circ = \pi\,(\text{radian})$，$90^\circ = \frac{\pi}{2}\,(\text{radian})$ などが得られます．一般に，$\theta\,(\text{radian})$ のときに α° となるとすると，

$$\alpha^\circ = \frac{360}{2\pi} \times \theta\,(\text{radian}) \quad \text{または} \quad \theta\,(\text{radian}) = \frac{2\pi}{360} \times \alpha^\circ$$

の関係があります．ちなみに，

$$1(\text{radian}) = \frac{360^\circ}{2\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$$

です．角が回転角のときも同様の対応をつけるのはいうまでもありません．

弧度法では，簡単のために，単位名 radian を省略するのが普通です．例えば，$60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$，$-30^\circ = -\dfrac{\pi}{6}$ です．

§4.2　三角関数の相互関係

我々は，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が単位円上にあることから，任意の角 θ に対して，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の基本的相互関係

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

を得ました．この両辺を $\cos^2\theta$ で割ると，$\tan\theta$ の定義より，

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

を得ます．これは三角関数の微分・積分を行う際に必須の公式になります．

周期性を表す自分との相互関係

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta,$$
$$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta, \qquad \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta, \qquad (n \text{ は整数})$$

も得られました．角の単位は radian です．

次に，対称性を表す相互関係を調べてみましょう．簡単な場合は説明の図をつけませんので，必要なら単位円を描いて点をとってください．

点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ の θ を $-\theta$ で置き換えた点を $\mathrm{P}'(\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$ とすると，2 点 P，P′ は x 軸対称の点になりますね．このことは，動径 OP が始線の位置（今の場合 x 軸の正の部分）から角 θ だけ回転して得られたのに対して，動径 OP′ は同じ始線の位置から角 $-\theta$ だけ回転して得られることから理解できるでしょう．このことは任意の角 θ に対して成り立ちます．この置き換えによって，三角関数の定義より，コサインは変わらず，サインは符号を変えるから

$$\cos(-\theta) = +\cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

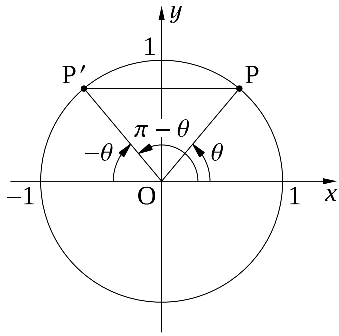
が成り立ちますね．

点 P($\cos\theta$, $\sin\theta$) の角 θ を π (= 180°) だけ進めた（遅らせた）点 P′，つまり θ を $\theta \pm \pi$ で置き換えた点 P′($\cos(\theta \pm \pi)$, $\sin(\theta \pm \pi)$) は，任意の角 θ に対して，点 P の原点対称の点です．この置き換えで，コサイン・サインは共に符号を変えるので

$$\cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta, \qquad \sin(\theta \pm \pi) = -\sin\theta$$

が成り立ちます．

点 P($\cos\theta$, $\sin\theta$) の y 軸対称の点 P′ は，π から θ だけ小さい角 $\pi - \theta$ の動径上にあるので，P′ の座標は ($\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\pi-\theta)$) ですね．よって，2 点 P，P′ の x 座標は符号が反対，y 座標は同じですから



$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \qquad \sin(\pi - \theta) = +\sin\theta$$

の関係が得られます．この関係式は，θ を随意に変化させて 2 つの動径 OP，OP′ の動きを読みとるとわかるように，任意の θ に対して成立しますね．

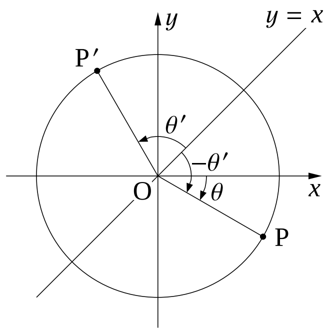
最後に，実用上，また加法定理を導くためにも重要な関係

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

を導きましょう．この関係式が‘任意の実数 θ に対して成立する’ことがよくわかるように少々回り道をして示します．

点 P($\cos\theta$, $\sin\theta$) をとります．このとき，動径 OP の始線は直線 $y = x$ の第 1 象限の部分であると考え，OP はそこから任意の角 $-\theta'$ だけ回転して得られたとしましょう．よって，

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \theta'$$



が成り立ちます($\frac{\pi}{4}$ = 45°)．また，直線 $y = x$ に関して点 P と対称な位置に点 P′ をとりま

しょう．よって，動径 OP′ は OP の始線の位置から角 $+\theta'$ だけ回転して得られます：

$$\mathrm{P}' = (\cos(\frac{\pi}{4} + \theta'),\ \sin(\frac{\pi}{4} + \theta')).$$

動径 OP′ と x 軸のなす角 $\frac{\pi}{4} + \theta'$ は，$\theta' = \frac{\pi}{4} - \theta$ より，$\frac{\pi}{4} + \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ となります．よって，点 P′ は

$$\mathrm{P}' = (\cos(\frac{\pi}{2} - \theta),\ \sin(\frac{\pi}{2} - \theta))$$

と表されます．

さて，2 点 P，P′ は，直線 $y = x$ に関して対称の位置にあるので，P′ の x, y 座標はそれぞれ P の y, x 座標になりますね：

$$\mathrm{P}' = (\sin\theta,\ \cos\theta).$$

よって，P′ の座標の 2 通りの表現を比較して，求める関係式

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta, \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$$

が得られましたね．

この § を終わるに当たって，得られた関係式の意味を理解しておきましょう．例えば，関係式 $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ は全ての θ について成り立つので，この式は θ についての恒等式です．よって，例えば $\theta = -c$ とおくと，$\cos(\frac{\pi}{2} + c) = \sin(-c)\ (= -\sin c)$ となりますが，θ が任意なので c も任意になります．よって，c を改めて θ と書き直すと，新しい関係式

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$$

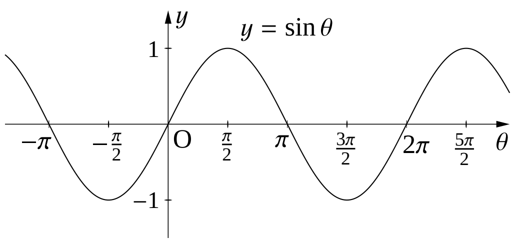
が得られます．つまり，元の関係式で θ を $-\theta$ で置き換えて新しい関係式を得たことになります．関係式，つまり恒等式に対するこのような操作はいつでも可能であり，一般に θ を随意の θ の式に置き換えて新たな関係式を導くことができます．例えば，θ を 1 次式 $a\theta + b$（a, b は定数）で置き換えてもよく，そのとき新たな関係式が得られます．

§4.3　三角関数のグラフ

今までは，三角関数の性質を調べるために，単位円上の点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考えてきました．三角関数の基本的性質を理解するにはこれで十分です．この§では，三角関数 $\cos\theta$ や $\sin\theta$ を‘ θ の関数 ’と考えてグラフを描き，理解を深めましょう．よって，そのグラフは‘ 横軸に θ をとる ’ことになります．それらのグラフは以下に見るように‘ 美しい波の形 ’をした曲線です．三角関数が波や波動の分析に欠かせないのはこの理由によります．

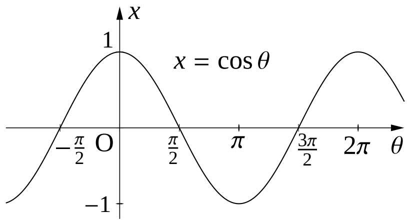
関数の式を表す場合には，点 P の x 座標が $\cos\theta$，y 座標が $\sin\theta$ ですから，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ とするのがむしろ自然です．つまり，表式 $x = \cos\theta$ においては，x は変数 θ の関数と見なし，そのグラフは縦軸に x をとることになります．今まで縦軸に y をとっていたのは，y を変数 x の関数としていたからです．x を θ の関数とする場合には横軸を θ，縦軸を x とするのが自然ですね．

なお，三角関数の値の精確な計算法は，一般の角の値については高校では教えません．その計算法は微分と数列の知識を必要とし，大学の講義で習うことになっています．ただし，それほど難しいことではないので，意欲のある人は高校生のうちに理解できます．我々はその計算法を微分の章で議論しましょう．



先に，$y = \sin\theta$ のグラフのほうを描きましょう．この関数は，θ の変化に伴って点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$ が単位円上を動くとき，その y 座標を考えることに当たります．$\theta = 0$ のとき $y = 0$，θ が増加すると y も増加し，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき y は最大値 1 に達し，以後減少に転じて，$\theta = \pi$ のとき $y = 0$ になり，さらに減少して，$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ $(= 270^\circ)$ のとき最小値 $y = -1$ に達し，その後増加して，$\theta = 2\pi$ のとき $y = 0$ を通過して，以後同様の増加・減少を繰り返しますね．得られた波形の曲線は **サインカーブ** と名がつく有名な曲線です．この曲線なら波や波動の研究に用いられても不思議はありませんね．

次に，$x = \cos\theta$ のグラフを描きましょう．今度は点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ の x 座標の動きを考えればよいですね．$\theta = 0$ のとき最大値 $x = 1$，θ が増加すると x は減少して，$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $x = 0$，さらに減少して，$\theta = \pi$ のとき最小値 $x = -1$ に達し，その後増加に転じて，$\theta = \frac{3\pi}{2}$ のとき $x = 0$ を通過して，$\theta = 2\pi$ のとき最大値 $x = 1$ に戻り，以後同様の減少・増加を繰り返しますね．

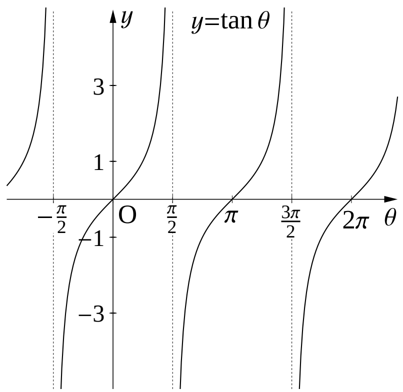


両者のグラフを比較して直ちに気づくことは，コサインのグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動するとサインのグラフになることですね．このことを，§§3.6.1 で学んだ平行移動の知識に基づいて，確かめてみましょう．関数 $y = f(x)$ のグラフを，x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動したものを表す関数は

$$y - q = f(x - p)$$

でしたね．この公式によると, 今の場合は, $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ となります．これは，関係式 $\cos(-\theta) = \cos\theta$ を用いると，$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ となり，前の § で求めた三角関数の関係式の 1 つに一致しますね．したがって，$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ は成立し，この平行移動の関係は間違いないことが確かめられます．

最後に，$y = \tan\theta$ のグラフを描きましょう．y は点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ の動径 OP の傾きになるので, OP の傾きのグラフを考えることになります．$\theta = 0$ のとき傾きは 0 だから $y = 0$, θ が増加すると傾き y は増加していき，θ が $\frac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていくと傾き y は $+\infty$ に近づきます．そして, θ が $\frac{\pi}{2}$ を越えたとたんに傾き y は $-\infty$ になってしまいますね．その後は $-\infty$ から

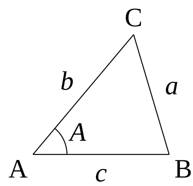


増加して，$\theta = \pi$ のとき傾き $y = 0$ に戻り，それからまた $+\infty$ に向かって増加していきます．よって，$y = \tan\theta$ のグラフは，不連続になる $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ は整数）の場合を除いて，常に増加していることがわかります．

§4.4　余弦定理・正弦定理

角と三角形を組み合わせて，人々は古代から多くの図形の問題を解決してきました．複雑な多角形の面積は，それを三角形に分けることで求められました．また，遠くの図形の大きさもわかります．太陽の周りを回る地球の公転を利用して，遠くの星までの距離も求められます．その原理は，君たちが苦しめられたであろう，三角形の合同条件と同じです．三角形の形状と大きさが決まるための条件は，（ア）3 辺が定まること，（イ）2 辺とその挟む角が定まること，（ウ）1 辺とその両端の 2 角が定まることの 3 つですね．これらの条件によって三角形が定まったとき，辺と頂角の間の関係を与える関係式が「余弦定理」と「正弦定理」です．余弦定理は加法定理を導くのにも利用され，理論的にも重要です．

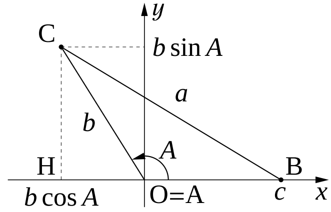
以後，三角形の辺と頂角を表すのに便利な記法を用いましょう．△ABC において，∠A, ∠B, ∠C を A, B, C で表し，対辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c で表しましょう．



4.4.1　余弦定理

余弦定理は，三角形が定まったとき，3 辺と 1 つの頂角の間に成り立つ関係式で，頂角が 90° のときに成り立つピタゴラスの定理の一般化に当たります．

△ABC の頂点の座標を A = O，B(c, 0) および C($b\cos A$, $b\sin A$) としましょう．また，この定理は，加法定理を導くのに必要で，一般角に対しても成立してほしいため，角 A は動径 OC の表す角としておきましょう．さて，頂点 C から x 軸に下ろした垂線



の足を H($b\cos A$, 0) とすると，余弦定理は△HBC に三平方の定理を用いて得られます．$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{HB}^2$ より，$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ を用いると，

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \end{aligned}$$

よって　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

が成り立ちます．これは任意の角 A に対して成立することに注意しましょう．この等式は，三角形が定まったとき，3 辺と 1 つの頂角の間に成り立つ関係を表していますね．関係式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を右辺から左辺に向かって読むと，2 辺 b, c とその挟む角 A が与えられると△ABC が定まり，そのとき頂角 A の対辺 a が求まると解釈されます．また，この関係式を変形して

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

とすると，3 辺 b, c, a が定まると△ABC が定まり，このとき頂角 A の余弦が求まると解釈されますね．また，このとき，$\cos A$ の正・負，つまり頂角 A の鋭角・鈍角は $b^2 + c^2 - a^2$ の正・負によって定まることがわかります．

3 辺 a, b, c と頂角 A, B, C をサイクリックに置き換えてやると，同様の関係式が得られます．これらが **余弦定理** です．まとめて書き下すと

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, &\qquad \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B, &\qquad \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C, &\qquad \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

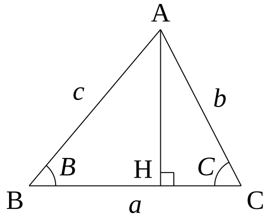
となります．複雑な式の割には覚えやすい定理です．

4.4.2　正弦定理と三角形の面積

正弦定理は，1 辺とその両端の角が与えられて三角形が定まったとき，両端の 2 角の正弦と残りの 2 辺との間の関係と考えてもよいでしょう．この定理

は三角形を扱うときにとても重宝で実用的な定理であり，三角形の外接円の半径とも関係があります.

まず，△ABC の頂点 A から対辺 BC に垂線 AH を引き，頂角 B，C を用いて垂線 AH を 2 通りに表しましょう．△ACH において $\mathrm{AH} = b\sin C$，△ABH において $\mathrm{AH} = c\sin B$ が成立します．したがって



$$b\sin C = c\sin B, \quad \text{または} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

が得られます．この関係式が頂角 B や C の鋭角・鈍角によらないことに注意しましょう．また，頂点 B から対辺に垂線を下ろして，同様に考えると

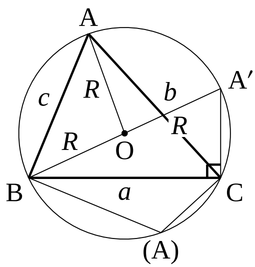
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

さらに，これらの比が△ABC の外接円（3 頂点を通る円）の半径 R の 2 倍，つまり直径に等しいことが示されます．ここでは

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つことを示しましょう．他の場合も同様です.

頂角 A の大きさによって場合分けが必要になります.



（ア）A が鋭角のとき，頂点 A と外接円の中心 O は弦 BC に対して同じ側にありますね．そこで，頂点 B を一端とする直径を BA′ とすると，円周角の定理により ∠BAC = ∠BA′C．また，△A′BC は ∠C が直角になるので $\mathrm{BC} = \mathrm{BA'}\sin A'$．よって，$a = 2R\sin A$，すなわち $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が得られます.

（イ）A が直角のとき，頂点 C は点 A′ の位置にきます．よって，$\sin A = 1$，$a = \mathrm{BA'} = 2R$ より $a = 2R\sin A$ が成り立ちます.

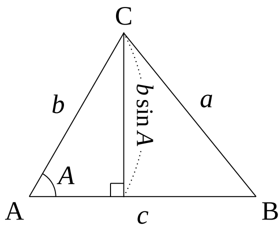
（ウ）A が鈍角のとき，2 点 A，O は BC に対して反対側にあります．したがって，今度は円に内接する四角形の対角の和が 180° であることを利用して $\angle \mathrm{BA'C} = 180° - \angle \mathrm{BAC}$．よって，$\sin A' = \sin(180° - A) = \sin A$．よって，$a = 2R\sin A' = 2R\sin A$ が得られます.

これらの結果をまとめると，**正弦定理**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が得られます．

ここで正弦定理や余弦定理を利用して三角形の面積を表す公式を求めておきましょう．



$$\text{三角形の面積} = \frac{1}{2}\text{底辺} \times \text{高さ}$$

ですね．△ABC において，底辺 AB = c，高さ $\mathrm{AC}\sin A = b\sin A$ なので，△ABC の面積を S とすると，直ちに

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

が得られます．同様にして，

$$S = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

が得られます（導いてみましょう）．

公式 $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ などは面積の問題を解くときなどによく用いる公式です．実際の大きな土地の面積を測るには，土地を三角形に分けて辺の長さ a，b を歩いて測りますが，これが結構手間がかかります．正弦定理の $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ を用いると 2 辺 a，b を測るのを 1 辺で済ませることができます．例えば b を消去すると

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$$

が得られ，1 辺と 2 角を用いて三角形の面積が表されます．

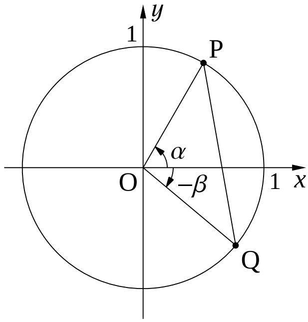
ところで，紀元前の古代エジプトの人々はこれらの面積公式を用いて毎年氾濫（はんらん）するナイル川の農地を測量していたのでしょうか．残念ながら，正弦の（2 倍の）表が作られたのは紀元後 2 世紀のギリシャ時代で，それは天文観測に利用されました．古代人は，はるか昔には単位正方形を敷き詰めて面積を算定し，紀元前 2〜3 千年頃からは，三角形の土地は‘底辺を半分にして高さを掛けて’求めるようになったとのことです．

§4.5　加法定理

加法定理は，任意の 2 つの角 α, β の和 $\alpha+\beta$ や差 $\alpha-\beta$ の三角関数を α や β の三角関数を用いて表す関係式です．加法定理は，役に立つ実用的な定理でもあり，また，それから派生的に導かれる定理は理論的にも重要です．

4.5.1　加法定理

α，β を任意の角として，単位円上に 2 点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ と $\mathrm{Q}(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$ をとり，この 2 点間の距離（の 2 乗）を 2 通りに表して，それらを比較すれば求める定理が得られます．



まず，△OPQ に余弦定理を適用しましょう．$\mathrm{OP}=1$，$\mathrm{OQ}=1$，$\angle\mathrm{QOP}=\alpha+\beta$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\,\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos(\alpha+\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

を得ます．ここで，頂角 $\alpha+\beta$ は，余弦定理を導いた際に示したように，任意の角でよいことに注意しましょう．

一方，2 点 $(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ の距離の 2 乗は $(a-c)^2+(b-d)^2$ であるから，（任意の角に対して成立する）関係 $\cos(-\beta)=+\cos\beta$，　$\sin(-\beta)=-\sin\beta$，および $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2\\ &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

よって，PQ^2 の 2 通りの表式を比較して，余弦の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

が得られます．この定理は任意の角 α，β に対して成立することに注意しましょう．

これを利用して正弦の加法定理を求めましょう．コサインからサインへの変換には関係式 $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$，および $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$ を用います：

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) \\
&= \cos\{(\frac{\pi}{2}-\alpha)+(-\beta)\} \\
&= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta).
\end{aligned}
$$

ここで $\cos(-\theta)=+\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ を用いると正弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

が得られます．

さらに，タンジェントの定義 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いると，正接の加法定理も得られます．

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.
\end{aligned}
$$

ここで，分子・分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

が得られます．

これら 3 つの定理をあわせて，三角関数の **加法定理** といいます．角 α,β は任意でよいのですが，実用的にはそれらを正の角とするほうが利用しやすいので，差 $\alpha-\beta$ についての加法定理も載せておきましょう．加法定理は関係式，つまり恒等式であるから，β を $-\beta$ で置き換えると直ちに求まります．得られた全ての関係式をまとめておきます：

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta, \\
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned}
\qquad \text{（加法定理）}
$$

加法定理から，例えば，$75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ を用いると $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ が，また，$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ より $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ が得られます．それらを示すのは簡単な練習問題です．

4.5.2　倍角・半角の公式と積和・和積公式

加法定理から直ちに導かれる実用的な公式を挙げておきましょう．

まず，$2\theta = \theta + \theta$ だから，加法定理から，必要なら $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて，**倍角公式** が得られます：

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta, \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta, \\
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.
\end{aligned}$$

また，$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ を利用すると，**半角公式** が得られます：

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}.$$

実用的というよりは三角関数の微分や波の合成の際に役に立つ理論的公式を載せておきましょう．暗記する公式ではなく，必要なときに加法定理から導くことができればよい公式です．$\cos(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$ の和・差，また，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha-\beta)$ の和・差を考えると，三角関数の **積和公式** が得られます：

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}, \\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}, \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}, \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}.
\end{aligned}$$

また，これらの積和公式で，$\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ とおくと，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$, $\beta=\dfrac{A-B}{2}$ だから，**和積公式** が得られます：

$$\begin{aligned}
\cos A+\cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\
\cos A-\cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},\\
\sin A+\sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\
\sin A-\sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.
\end{aligned}$$

4.5.3　三角関数の合成

サイン・コサインのグラフは理想的な波の形をしていました．一般に，波と波を重ね合わせる（合成する）と複雑な波になることが予想されます．簡単な場合に合成してみましょう．

4.5.3.1　三角関数の合成

この §§ では関数 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$（$a$, b は任意の実数）を考えます．これは 2 つの波 $a\sin\theta$ と $b\cos\theta$ を合成して得られる波と解釈されます．まず，数学的準備から始めたほうがよいでしょう．実数 a, b が与えられ，

$$a^2+b^2=r^2$$

であるとしましょう．その式の解釈はいろいろできますが，実数 a, b の組 $(a,\ b)$ を xy 平面上の点と考えると，点 $(a,\ b)$ は原点を中心とする半径 r の円上にあると考えることができます．よって，

$$(a,\ b)=(r\cos\delta,\ r\sin\delta)$$

と表すことが可能です．つまり，実数 a, b が与えられると，

$$\cos\delta=\frac{a}{r},\qquad \sin\delta=\frac{b}{r}$$

となる角 δ が，2π の整数倍の不定性を除いて，定まります．これで準備ができました．

2 つの波 $a\sin\theta$ と $b\cos\theta$ を合成してみましょう．上の議論と加法定理から，

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= r\cos\delta\sin\theta + r\sin\delta\cos\theta \\ &= r(\sin\theta\cos\delta + \cos\theta\sin\delta) \\ &= r\sin(\theta+\delta). \end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\delta) \qquad (r = \sqrt{a^2+b^2}\,)$$

となります．このグラフはサインカーブを r 倍して θ 軸方向に $-\delta$ だけ平行移動したものになりますね．

練習問題をやっておきましょう．$\sqrt{3}\sin\theta + 1\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\delta)$ の形に表せ．ヒント：$r = \sqrt{3+1} = 2$ を利用して

$$\sqrt{3}\sin\theta + 1\cos\theta = 2\left\{\sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\frac{1}{2}\right\}$$

と表し，$\cos\delta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\delta = \dfrac{1}{2}$ となる δ を求めます．$0 \leqq \delta < 2\pi$ とすると $\delta = \dfrac{\pi}{6}(= 30^\circ)$ なので，

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin\theta + 1\cos\theta &= 2\left\{\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となります．

ところで，実数の組 $(a,\ b)$ の代わりに $(b,\ a)$ を xy 平面上の点と考えると，今度は $(b,\ a) = (r\cos\delta,\ r\sin\delta)$ と表すことになり

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \cos\theta(r\cos\delta) + \sin\theta(r\sin\delta) \\ &= r\cos(\theta-\delta). \end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad a\sin\theta + b\cos\theta = r\cos(\theta-\delta) \qquad (r = \sqrt{a^2+b^2}\,)$$

と表されます．ただし，今度は $\cos\delta = \dfrac{b}{r}$，　$\sin\delta = \dfrac{a}{r}$ です．

$\sqrt{3}\sin\theta + 1\cos\theta$ を $r\cos(\theta-\delta)$ の形に表してみましょう．上の議論で得られた公式は忘れやすいので，公式に頼らない方法でやりましょう．関係式

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin\theta + 1\cos\theta &= r\cos(\theta-\delta) \\ &= r\{\cos\theta\cos\delta + \sin\theta\sin\delta\} \end{aligned}$$

は θ についての恒等式なので，それを利用して r と δ についての方程式が得られます．$\sin 0 = 0$，$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ に注意して，$\theta = 0$，$\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$1 = r\cos\delta, \qquad \sqrt{3} = r\sin\delta$$

が得られます．これは上式の $\cos\theta$，$\sin\theta$ の係数を比較して得られる結果に一致し，関数 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ が **独立**[3)] であることを表しています．上式を 2 乗して辺々加えると，

$$1 + 3 = r^2(\cos^2\delta + \sin^2\delta) = r^2, \quad \text{よって} \quad r = 2 \quad (r > 0)$$

が得られます．慣習上 $r > 0$ としましたが，$r < 0$ の解を選んでも構いません．$r = 2$ より

$$\cos\delta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって，$0 \leqq \delta < 2\pi$ とすると，$\delta = \dfrac{\pi}{3}$ が得られるので，答は

$$\sqrt{3}\sin\theta + 1\cos\theta = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

です．この方法は三角関数の合成問題にいつでも使えます．

4.5.3.2　**和積公式の応用**

次に，公式 $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を応用して波の重ね合わせをしてみましょう．異なる振動数の音を鳴らして，ある場所で時間 t と共に聞くことにします．簡単のために，$A = \omega t$，$B = \omega' t$ とすると[4)]

$$\sin\omega t + \sin\omega' t = 2\sin\frac{(\omega + \omega')t}{2}\cos\frac{(\omega - \omega')t}{2}$$

---

3) 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が等式

$$kf(x) + lg(x) = 0 \qquad (k,\ l \text{ は定数})$$

を恒等的に満たすのは $k = l = 0$ の場合に限るとき，関数 $f(x)$ と $g(x)$ は独立であるといいます．これは，要するに，‘$f(x)$ と $g(x)$ は比例関係にない関数である’ことを表しています．$f(x)$ と $g(x)$ が独立なとき，関係式

$$kf(x) + lg(x) = k'f(x) + l'g(x) \qquad (k,\ l,\ k',\ l' \text{ は定数})$$

は $k = k'$，$l = l'$ を意味し，逆も成り立ちます（導いてみましょう）．

4) ω（オメガ）はギリシャ文字 Ω の小文字です．

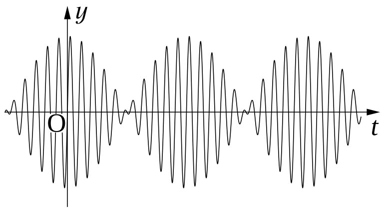
ですね．このとき,「角振動数」と呼ばれる ω と ω' がほぼ同じ値のとき，つまり $\omega' = \omega + \Delta\omega$ として $\Delta\omega$[5] が ω に比較して小さいとき

$$\sin\omega t + \sin\omega' t = 2\sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\ \cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$
$$\fallingdotseq 2\sin\omega t\ \cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$

となります．つまり，$\sin\omega t + \sin\omega' t$ は，始め $2\sin\omega t$ にほぼ等しいのですが，時間と共にずれが大きくなり，それがゆっくり振動する因数 $\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$ に現れます．つまり，

$$|\sin\omega t + \sin\omega' t| \leqq 2\left|\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right|$$

という特徴が現れます．



$y = \sin\omega t + \sin\omega' t$ のグラフをパソコンを使って描くと，右図のようになります．図では $\Delta\omega = 0.1\omega$ にとってあります．因数 $\cos\frac{\Delta\omega t}{2} = 0$ となる時間のときに振動の大きさが‘ 絞られる ’ことがわかります．この波は音波としていますが，その音はどのように聞こえるでしょうか？ ウオーン・ウオーンと大きな音と小さな音が交互にやって来る「うなり」と感じますね．

[5] Δ（デルタ）はギリシャ文字 δ の大文字です．