第2章　方程式

未知の量を求めるときに，それが‘わかったような振りをして’方程式を立てれば簡単に求まる場合が多いですね．既に 4000 年以上も前，古代のバビロニア人やエジプト人は，方程式を実質的に用いて，さまざまな問題を解決していました．

紀元前 1850 年頃のパピルス紙に，次のような問題と解法が書かれています：「ある量とその 4 分の 1 は全部で 15 である」．未知数や等号に当たる記号がなかったので，等式表現はできませんでしたが，今風に表現すると $x + \frac{1}{4}x = 15$ ですね．その解答は，「(未知数を）4 としてみる．その 4 分の 1 は 1 で，合わせて 5 である $(4 + \frac{4}{4} = 5\ (= \frac{15}{3}))$．そして 15 を 5 で割り，その商 3 を 4 倍すれば，求める数は 12 である」．方程式を満たす数を求めようとしていることが読みとれると思います．

最初に記号や略号を用いて方程式を書き表したのは，古代ギリシャの数学者ディオファントス（Diophantus，246 頃～330 頃）でした．しかし，せっかくの記号を無視して計算を言葉で述べたそうです．彼は移項したり同類項を約すことを知っていました．ちなみに，「代数学」の語源 Algebra（アルジェブラ）は，9 世紀のアラビアの数学者，アル・ファリズミ（Al-Khwarizmi，780 頃～850 頃）の著書『アリトメティカ』のラテン語訳ですが，Algebra はもともとは移項や同類項の簡約を意味するそうです．アル・ファリズミは，2 次方程式に（正の）2 根と無理数の根を認めましたが，記号を用いないで言葉で表しました．15 世紀までは，全ての量や計算，条件や答は，ほとんど言葉だけで表されていました．したがって，当時の代数は「ことば代数」と呼ばれています．

等号に当たる記号が初めて用いられたのは 15 世紀のルネッサンス期に入ってからのことでした．現在の等号の記号＝は，イギリスの医師レコードが 1557

年に導入しました．16 世紀末に，フランスの数学者ヴィエト（François Viète, 1540〜1603）が，未知数ばかりでなく任意の数をも表すための文字を導入し，「記号代数」へ移行する一歩を踏み出しました．そして，18 世紀前半になってようやく代数学に通用する記号体系が確立されたのです．

§2.1　未知数・変数

2.1.1　未知数・変数の導入

小学校 6 年生のときの問題です：鶴と亀は合せて 13 匹，足は合せて 36 本です．鶴と亀はそれぞれ何匹いますか？　こんな問題に頭を悩ませたことがあったでしょう．15 世紀までは，子供ばかりでなく，世界中の大人がウンウン言いながら解いていたのです．ところが，中学生になると易しい問題になりましたね．**未知数** を用いて連立方程式を立てる方法を教わったからです．鶴を x 羽，亀を y 匹などと，答がわかったような振りをして，未知数 x, y を導入します．すると，鶴の足は 2 本，亀の足は 4 本だから，連立方程式

$$\begin{cases} x + y &= 13 \\ 2x + 4y &= 36 \end{cases}$$

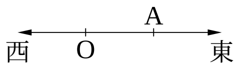
が成立します．君たちはこれを直ちに解いて，$x = 8$ 羽，$y = 5$ 匹 が求まりましたね．このように未知数 x, y を導入すると後は式の変形だけです：$x + y = 13$ より $y = 13 - x$，これを $2x + 4y = 36$ に代入して $2x + 4(13 - x) = 36$，よって $2x + 4 \cdot 13 - 4x = 36, \cdots$．したがって，‘ 方程式を解くことは式変形を正しく実行するだけで済む ’ ようになりました．式の変形は，詳細に調べられ整理されて，必要最小限の計算規則が選ばれました．それらが §§ 1.3.1 で議論した計算法則 (A3–5) となったのです．

また，方程式 $x + y = 13$, $2x + 4y = 36$ を眺めていると x, y の見当をつけてみたくなります．x, y の組 (x, y) に $x + y = 13$ を満たす整数の組 $(1, 12)$, $(2, 11), \cdots$ を代入していき，$2x + 4y = 50, 48, \cdots$ 等と様子を探っていくと，$(x, y) = (8, 5)$ のときに $2x + 4y = 36$ となることにすぐに気がつきます．つまり正しい答が求まったわけです．よって，未知数 x, y にいろいろな値を代入

する方法でも，正しい答が得られることがわかります．未知数は，定数としないで，**変数**（いろいろな値をとれる文字）のように扱うこともできるわけですね．未知数は，以後いつでも，変数としても扱いましょう．

2.1.2　文字の変数化

A 君は（東に向かって）時速 5 km で歩いています．今 O 地点を通過しました．x 時間後には O から 7 km の地点に着きました．x を求めよ．方程式は $5x = 7$，



つまり $5x - 7 = 0$ です．この問題を一般化しましょう．時速 a km（負のときは西へ向かうとして）で歩いたとき，x 時間後（負のときは 時間前として），O から b km の地点（負のときは O から西の地点として）に着きました．そのとき方程式は

$$ax - b = 0$$

です．この種の問題は全てこの形にまとめられます．時速 a と着いた地点 b はいろいろな値にとることができる定数です．通常は歩いた時間 x を求めるので x が未知数です．

さて，方程式 $ax - b = 0$ で，3 時間後 $(x = 3)$ には 12 km の地点 $(b = 12)$ に着いたとして時速 a を求めましょう．このように問題が変えられると，方程式は $3a - 12 = 0$ となって，今まで定数としていた a が未知数（変数）に化けてしまいますね．このようなことは高校数学ではむしろ頻繁に現れます．方程式 $ax - b = 0$ を $a = \dfrac{b}{x}$ と変形すると，x と b を定めると a が決まります．こんな変形はいつでも可能であり，‘ 文字は何であっても，いつでも変数に化ける ’ のです．方程式においては，変数に定数を代入すると残りの文字が変数に早変わりしますし，場合によっては，変数もその他の文字も全て変数として扱うこともあります．‘ 変数およびその他の文字を含む方程式の等号＝はそれらの文字の間の単なる相互関係を表す ’ ものであって，‘ 何を変数とするかは方程式を見る人間の都合による ’ のです．都合に合わせて方程式を読みとるようになれば，方程式を自在に操れるようになるでしょう．

§2.2　2 次方程式

2.2.1　方程式の解の定義と解法

縦の長さ x，横の長さ $x+4$，面積 45 の長方形があります．x を求めましょう．方程式は $x(x+4)=45$，つまり $x^2+4x-45=0$ という 2 次方程式です．x にある値 a を代入したら方程式の等号が成立するとき，つまり $a^2+4a-45=0$ が成り立つとき，“ a は方程式を満たす ”といい，a を方程式の **解** といいます．また，方程式の全ての解を求めることを“ 方程式を解く ”といいます．上の方程式の x にいろいろな値を代入して，$x=5$，-9 のときに左辺$=0$ が成立して方程式を満たすのでそれらが解となります．しかし，この問題では長さ x は正という制約があるので，負の解 $x=-9$ は捨てて，$x=5$ が正しい解です．始めから負の解を認めないようにするには，方程式を立てたときに x の **変域**（変数がとれる値の範囲）を $x>0$ としておけば済みます：$x^2+4x-45=0$ $(x>0)$.

x に値を代入して解を求めるのは骨が折れますね．因数分解すると素早くできます：

$$
\begin{aligned}
x^2+4x-45 &= x^2-5x+9x-5\cdot 9 \\
&= x(x-5)+9(x-5) \\
&= (x-5)(x+9)=0.
\end{aligned}
$$

念のため §§1.3.1 の計算法則に従って式変形していることを確認しましょう．これから直ちに $x=5,\ -9$ が方程式を満たすことがわかります．

もう 1 つ別の方法もあります．2 次方程式に有効な，平方根を用いる方法です．

$$x^2+4x-45=(x+2)^2-4-45=(x+2)^2-49=0.$$

$$\text{よって，}\quad (x+2)^2=49.$$

両辺の平方根を求めて，$x+2=\pm 7$．よって，$x=-2\pm 7=5,\ -9.$

以上の議論から，2 次方程式の解法は，解の定義による方法を含め，3 通りはありますね.

2.2.2　一般の 2 次方程式の解

2 次方程式の一般形は，a, b, c を実数の定数として

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

となります．$a \neq 0$ は 2 次方程式であるための条件です．この方程式の解は 2 次方程式の解の公式として知られています．ここでは，後に理論的な考察がしやすいように，因数分解の方法で導いてみましょう．

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\} \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\} = 0 \end{aligned}$$

ここで，$D = b^2 - 4ac$ とおいて，公式 $x = (\sqrt{x})^2$，$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ を用いると

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right\} \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right\} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

よって，解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad (D = b^2 - 4ac)$$

が得られます．これが 2 次方程式 $ax^2+bx+c = 0$ の解の公式です．ax^2+bx+c が因数 (x − 解) の積の形に因数分解されたことに注意しましょう．

では，練習問題です．2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ を因数分解の方法で解け．ヒントは不要でしょう．答は

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 1 - 1 = (x - 1)^2 - 2 = (x - 1)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) = 0$$

より，$x = 1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2}$．両者をまとめて $x = 1 \pm \sqrt{2}$ と表しましょう．

さて，係数 a, b, c に対応して解がどのように現れるか調べてみましょう．先ほどの例 $x^2 + 4x - 45 = 0$ のときは $x = 5,\ -9$ より異なる 2 実数解をもちます．このことは $D = b^2 - 4ac$ に反映されていて，$D = 4^2 - 4(-45) = 196 > 0$, つまり正の D に対応しています．また，$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$ のときは $x = -1, -1$ の **重解** をもち，このとき $D = 2^2 - 4 = 0$ となります．一般の方程式の場合は，解の公式からわかるように，$D > 0$ のとき $\pm\sqrt{D}$ 項は消えずに異なる 2 実数解をもち，$D = 0$ のときは $\pm\sqrt{D}$ 項が消えて重解となります．このように $D = b^2 - 4ac$ は 2 次方程式において解の種類を判別する重要な役割を果たすので，$D = b^2 - 4ac$ を **判別式** と呼ぶことにしましょう．

§2.3　虚数

2.3.1　判別式が負の解

さて，ここで，変な 2 次方程式 $x^2 + 1 = 0$ を考えましょう．こんな方程式が実生活で現れることはありませんが，理論的には興味があるものです．まず，判別式 D については，$D = 0^2 - 4 = -4 < 0$ より判別式は負です．このとき，解の公式より $x = \dfrac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm\sqrt{-1}$ です．$\sqrt{-1}$ ですって？　これは数？　これが実数とはどうしても考えられませんね．よって，$D < 0$ のときは実数の解をもたないことになります．どうしてこんな変な解が現れたのか，因数分解をして調べてみましょう．そのとき，$a = (\sqrt{a})^2$ つまり $\sqrt{a}$ は 2 乗して a になる数として定義されましたから，$\sqrt{-1}$ は 2 乗して -1 になる数として扱わねばなりません：$(\sqrt{-1})^2 = -1$．よって

$$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - (\sqrt{-1})^2 = (x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1}) = 0.$$

これはとんでもない因数分解です．しかしながら，悪い点は因数分解をするために $-1 = (\sqrt{-1})^2$ と変形した点だけのようです．

$\sqrt{-1}$ を i と表すと，i が満たすべき条件は $i^2 = -1$ です．i を用いてもう一度

因数分解してみましょう．

$$\begin{aligned} x^2+1 &= x^2-(-1) = x^2-i^2 \\ &= x^2 - ix + ix - i^2 = x(x-i) + i(x-i) \\ &= (x-i)(x+i) = 0. \end{aligned}$$

こうやってみると，変な数 $i = \sqrt{-1}$ が ‘ 生成される ’ ときには，§§1.3.1 の計算法則 (A3–5) に従っていることがわかります．それでは，その変な数 $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$) を用いて計算したとき，その数 i が計算法則に従っているかどうか見てみましょう．$\pm i$ は方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解ですから，それらは方程式を満たすはずです．左辺に代入して

$$x^2 + 1 = (\pm i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

が成り立ちます．よって，$\pm i$ は方程式を確かに満たし，それらは解に違いありません．ただし，$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ と計算しています．もし $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = +1$ とやったら，$x^2 + 1 = +1 + 1 = 2 \neq 0$ となって，$i = \sqrt{-1}$ は解でなくなってしまいますね．このことを解決するために，公式 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ は a，b が正または 0 の実数のときにのみ成立すると約束し直しましょう[1)]．

もう 1 題，$x^2 - 2x + 3 = 0$ $(D = -8 < 0)$ でやってみましょう．

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &= (x-1)^2 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2 \\ &= (x-1)^2 - (-2) = (x-1)^2 - 2i^2 = (x-1)^2 - (\sqrt{2}\,i)^2 \\ &= (x - 1 - \sqrt{2}\,i)(x - 1 + \sqrt{2}\,i) = 0. \end{aligned}$$

よって，この問題の解は $x = 1 \pm \sqrt{2}\,i$ ですね．やはり，-1 を i^2 に置き換えさえすれば，この解が生成されるときには計算法則に従っていますね．逆に，この解が方程式を満たすことを見るために，解を方程式の左辺に代入して，計算法則に従って計算してみましょう：

---

1) これで，紛らわしい $\sqrt{-1}$ を避けて，記号 i を用いる理由が明白になりましたね．今後は $\sqrt{-1}$ を用いた計算は避けましょう．記号 i は imaginary number（想像上の数＝虚の数）の頭文字です．

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 3 &= (1 \pm \sqrt{2}\,i)^2 - 2(1 \pm \sqrt{2}\,i) + 3 \\
&= (1 \pm \sqrt{2}\,i) \cdot (1 \pm \sqrt{2}\,i) - 2(1 \pm \sqrt{2}\,i) + 3 \\
&= 1 \pm 2\sqrt{2}\,i + (\pm \sqrt{2}\,i)^2 - 2 - 2(\pm \sqrt{2}\,i) + 3 \\
&= 1 \pm 2\sqrt{2}\,i - (\sqrt{2})^2 - 2 \mp 2\sqrt{2}\,i + 3 \\
&= 1 \pm 2\sqrt{2}\,i - 2 - 2 \mp 2\sqrt{2}\,i + 3 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

したがって，確かにこの i を含む奇妙な数 $x = 1 \pm \sqrt{2}\,i$ は計算法則に従うときに方程式を満たします．逆にいうと，方程式を満たすためには，奇妙な数 i は計算法則に従う必要があります．

一般の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 D が負の解についても，その解は計算法則に従うとき方程式を満たすことが確かめられます．

一般に，2 次方程式の解の公式から，D が負の解は $i = \sqrt{-1}$ $(i^2 = -1)$ として

$$a + b\,i \qquad (a,\ b \text{ は実数 } (b \neq 0))$$

の形をしていることがわかります．そして，これらの数は計算法則に従っているとしたときに正しい結果を与えます．我々にとって計算法則 (A3–5) は絶対ですが，‘変な解は計算法則に刃向かってはいません’．今のところ，変な方程式を考えたために，たまたま変な解が現れたという程度です．そこで，それらの i を含む数を **虚数** と名づけて，一応，数として認める立場に立ってみましょう．ただし，虚数そのものに $1 + 2i$ 個とか $3 - 4i$ kg とかの現実的な意味付けをするわけではありません．理論的には，虚数を認めると都合がよい点があります：

- 虚数は計算法則を満たすので，単に数の種類が増えただけと見なすことができる．
- 重解を 2 解と見なすと 2 次方程式は必ず 2 解をもつ．
- 2 次式は必ず 1 次式の積に因数分解できる．

こう考えると，数学理論にとっては，虚数はあながち無用な邪魔物ではないようですね．

2.3.2　カルダノの公式と虚数のパラドックス

虚数は 3 次以上の高次方程式でも表れます．虚数が問題になったのは実は 3 次方程式のほうでした（2 次方程式では虚数は無視されていました）．以下，数学者が虚数を受け入れざるを得なくなった経緯（いきさつ）を見てみましょう．

まずは 3 次方程式のレッスンから．方程式 $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ を考えましょう．左辺の 3 次式を $P(x)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) &= (x-1)(x^2+1) \\
&= (x-1)(x^2 - i^2) = (x-1)(x-i)(x+i)
\end{aligned}
$$

と因数分解できます．3 次式 $P(x)$ の x に $x = 1,\ i,\ -i$ を代入してみると，$P(1) = P(i) = P(-i) = 0$ が確かめられるので，それらは方程式 $P(x) = 0$ の解です（確かめましょう）．この因数分解から，3 次方程式は虚数解を含めると 3 解をもち，$P(x)$ は因数 $(x - \text{解})$ の積の形に表されると予想されます．

簡単にいってしまいましたが，虚数を受け入れるのは大変なことです．参考のために，物議を醸（かも）した 3 次方程式の解の公式に言及しておきましょう．

一般の 3 次方程式は

$$
ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)
$$

の形ですが，扱いやすくするために，これと同値な方程式に直しておきます．$x = X - t$ とおいて $t = \dfrac{b}{3a}$ ととると，X についての，2 次の項のない，3 次方程式が得られます（公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を利用して確かめましょう）．よって，2 次の項なしの 3 次方程式は一般の 3 次方程式に同値です．

そこで，一般の 3 次方程式に同値な方程式

$$
x^3 + 3px + 2q = 0 \qquad (p,\ q \text{ は実数})
$$

を考えましょう．16 世紀の前半，カルダノ（Girolamo Cardano，1501〜1576，イタリア）はこの 3 次方程式の解の公式を得ていました：

解を $x = u + v$ と和の形に表すと

$$
u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}}, \qquad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}} \qquad (\overset{\text{デルタ}}{\Delta} = q^2 + p^3).
$$

ホントかな．$x = u + v$ が $x^3 + 3px + 2q = 0$ の解であることを確かめましょう．要領よく行うために，まず $uv = -p$ を導きます：

$$(uv)^3 = (-q + \sqrt{\Delta})(-q - \sqrt{\Delta}) = q^2 - \Delta = -p^3 = (-p)^3.$$

よって，$uv = \sqrt[3]{(uv)^3} = \sqrt[3]{(-p)^3} = -p$．これから

$$\begin{aligned} x^3 + 3px + 2q &= (u+v)^3 + 3p(u+v) + 2q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3p(u+v) + 2q \\ &= u^3 + v^3 - 3p(u+v) + 3p(u+v) + 2q \\ &= -q + \sqrt{\Delta} - q - \sqrt{\Delta} + 2q = 0 \end{aligned}$$

となるので，確かに $x = u + v$ は方程式を満たしますね．

$\Delta \geqq 0$ の場合は何の問題も起こりませんでした．問題は $\Delta < 0$ の場合に起こりました．例えば，方程式

$$(x-1)(x-4)(x+5) = x^3 - 21x + 20 = 0$$

の解 $1,\ 4,\ -5$ は全て実数です．ところが，このとき，方程式 $x^3 + 3px + 2q = 0$ と比較すると，$p = -7$，$q = 10$ なので，$\Delta = 10^2 + (-7)^3 = -243$．よって，解 $x = u + v$ の u，v は

$$u = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}}, \qquad v = \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$$

と虚数の 3 乗根で表されます．この和 $u + v$ を方程式 $(x-1)(x-4)(x+5) = 0$ の x に代入して，左辺を展開してみると，左辺はちゃんと 0 になり，方程式は満たされます．よって，$u + v$ が解であることは疑いようもありません．しかしながら，

$$u + v = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}} = 1,\ 4,\ -5$$

が成り立つとはどうしても信じられません．$u + v$ は $1,\ 4,\ -5$ のどれでもないようですが，カルダノの公式は $u + v$ がそれらのどれにでもなることを要求しています．もしそれが本当なら，**虚数には重大な意味が隠されている**のに違いありません．

この虚数のパラドックスは，多くの数学者に強い興味を抱かせ虚数の研究に駆り立てました．以後，‘ 数学者は *300* 年間も虚数と格闘 ’ し続けました．その結果，18 世紀の終りには，虚数は代数学や微積分学およびそれらと関連した自然科学の問題の重要な研究手段の 1 つとなりました．これらの長い研究の間に，‘ 計算法則を満たす数は実数と虚数だけである ’ ことが示され，実数と虚数を合せて **複素数** と呼ぶことになりました．

19 世紀中頃に，複素数の演算を幾何学的に解釈することが確立しました．ようやく最終決着が得られたのです．複素数は無矛盾な数学体系をなすことが示され，数学者は複素数を自在に使いこなして多くの成果を上げました．遂に虚数の 3 乗根が計算できるようになり，そのパラドックスは肯定的に解決されたのです．虚数の 3 乗根は，3 次方程式が 3 個の解をもつのと同様に，3 個の虚数を与え，先の $u+v$ は 1, 4, -5 のいずれにもなりました．我々はそのことを複素数の章で実際に確かめましょう．

現在では，複素数は数学のみならず，電気工学を筆頭として，科学技術の広い分野においてなくてはならない存在になっています．虚数がよくわからないうちは虚数に対して ‘ 何か深遠な意味を付与しなければならない ’ という哲学的な議論が強かったのですが，虚数を自在に使いこなせるようになると，人はそんな議論をすっかり忘れてしまうようです．君たちも，実数の計算に慣れた今となっては，“ 負数は存在しない ” なんて議論に乗る人は少ないでしょう．数学にとっては「無矛盾なもの（できれば，役立つもの）が存在するもの」のようです．

虚数の歴史の話はこの辺にして，方程式の因数分解に戻りましょう．

§2.4　因数定理

一般の n 次式 $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$：

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

を総称して **整式** といいましょう．2 次・3 次のとき，整式 $P(x)$ は，方程式 $P(x) = 0$ の解を用いて，因数 $(x - 解)$ の積の形で表されました．この結果は，どうやら，一般の整式に対しても成立しそうです．

2.4.1　整式の割り算

割り算 $135 \div 11$ の求め方を知らない人はいないでしょう．10 進法なので正しくは

$$(1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) \div (1 \cdot 10 + 1)$$

です．これを ‘ x 進法？ ’ にすると

$$(1x^2 + 3x + 5) \div (1x + 1)$$

$$\begin{array}{rr} & 1x+2 \\ 1x+1 & \overline{)\,1x^2+3x+5} \\ & 1x^2+1x \quad \\ \cline{2-2} & 2x+5 \\ & 2x+2 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$$

と化けて，$x^2 + 3x + 5$ を $x + 1$ で割ることを表します．計算方法も $135 \div 11$ のやり方と同じです．右の計算式から読みとれるように，高次の項を順々に消していけばよいわけです．（x と $+$ を隠せば，今の場合，まさに $135 \div 11$ に当たりますね）．この計算式を等式を用いて表すと

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x + 5 - (x+1)\,x = 2x + 5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 3x + 5 - (x+1)(x+2) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 3x + 5 = (x+1)(x+2) + 3 \end{aligned}$$

となります．実際，最後の式の右辺を展開すると左辺 $x^2 + 3x + 5$ に一致することが確められますね．よって，この割り算の等式は全ての x について成立する**恒等式**です．任意の整式で割るときも高次の項を順々に消していけばよく，整式の割り算の一般形は

$$(\text{割られる整式}) = (\text{割る整式}) \cdot (\text{商}) + (\text{余り})$$

となります．この等式もやはり恒等式です．割る整式が 2 次以上のときは余りは一般に整式になり，（余りの次数）$<$（割る整式の次数）です．例えば，x^3 を $x^2 + 2x + 3$ で割ると $x^3 = (x^2 + 2x + 3)\,(x - 2) + x + 6$ です．

上で行った割り算の縦書き計算法は，高次の項を順番に消していく方法なので，商と余りをただ 1 通りに定め，さらに，それらの求め方の手順をも与えます．一般に，計算や問題を解くための明確な手順や手続きを「アルゴリズム」と呼んでいます．

2.4.2　剰余定理・因数定理

100 次の整式 $P(x)$ を具体的に

$$P(x) = 2x^{100} + 3x^{50}$$

とでもしましょう．このとき，$P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割った余り R を求めてみましょう．α は虚数でも構いません．とてもじゃないけど実際に割ってみる気は起こりませんね．以下の議論から得られる定理を用いると，あっと言う間に求まります.

1 次式で割るから余りは定数であり，商を $Q(x)$ とすると $P(x)$ は必ず

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R \qquad \text{（}R\text{ は定数）}$$

の形で表されますね．商 $Q(x)$ を具体的に求める必要はありません．割り算の等式は恒等式であったことを思い出して，両辺の x に α を代入してみましょう．商の項は消えて，$P(\alpha) = R$．よって，余り $R = P(\alpha) = 2\alpha^{100} + 3\alpha^{50}$ です．一丁上り！ このように $x-\alpha$ で割った式を考えておいて，商の項が消える x の値 α を代入すればよいのです．一般の場合も同じです． 任意の整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割った余りを R とするとき $R = P(\alpha)$，つまり

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R \quad \text{のとき} \quad R = P(\alpha). \qquad \text{（剰余定理）}$$

これを **剰余定理** といいます（剰余＝余り）.

さて, 本題の **因数定理** に入りましょう．任意の n 次の整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$（α は虚数でも構いません）で割ったら割り切れた場合を考えましょう．この場合，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$$

が成り立ちます． このとき，x に α を代入すると

$$P(\alpha) = 0.$$

よって，因数定理の半分を得ます：

$$\text{整式 } P(x) \text{ が 1 次式 } x-\alpha \text{ で割り切れる} \ \Rightarrow\ P(\alpha) = 0. \qquad (*)$$

このとき，$P(\alpha) = 0$ が成立しますが，それは α が n 次方程式 $P(x) = 0$ の解であることを意味します：

$$P(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ は } P(x) = 0 \text{ の解.}$$

因数定理の残り半分は $(*)$ の逆が成立することです：

$$P(\alpha) = 0 \implies P(x) \text{ は } x - \alpha \text{ で割り切れる.}$$

これを示すために，$P(x)$ を $x - \alpha$ で割った式をまた用いましょう：

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R.$$

今の場合，余り R が 0 とは限りません．x に α を代入して $P(\alpha) = R$．しかし，今の場合 $P(\alpha) = 0$ と仮定してあるので $R = 0$．よって，$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$．つまり，$P(x)$ が $x - \alpha$ で割り切れます．

したがって，因数定理をまとめると次のようになります：

任意の整式 $P(x)$ に対して

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - \alpha)\,Q(x). \qquad \text{（因数定理）}$$

この定理は，“ 方程式 $P(x) = 0$ の解に対して，$P(x)$ は $(x -$ 解$)$ の形の因数をもつ ”．また，その逆も成り立つと述べています．

では，ここで問題です．3 次方程式 $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ を解け．ヒント：因数定理ですね．解答：x に -1 を代入すると方程式を満たすので $x = -1$ は解．$P(x)$ を $x+1$ で割ると $P(x) = (x+1)(x^2+5x+6)$．$x^2+5x+6 = 0$ を解いて残りの解 $x = -2,\ -3$ が得られます．

2.4.3　*n* 次方程式と代数学の基本定理

複素数 α が任意の n 次方程式 $P(x) = 0$ の解ならば 1 次式 $x - \alpha$ は $P(x)$ の因数になることがわかりました．さらに，もし $\beta,\ \gamma,\ \cdots,\ \delta$ も方程式 $P(x) = 0$ の解ならば，$x - \alpha$ と同様に，$x - \beta,\ x - \gamma,\ \cdots,\ x - \delta$ も $P(x)$ の因数になります．したがって，n 次式 $P(x)$ は，解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots,\ \delta$ が全て異なれば，

$$P(x) = (x - \alpha)\,(x - \beta)\,(x - \gamma)\cdots(x - \delta)\,Q(x)$$

の形になるはずです．ただし，$Q(x)$ は $P(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\delta)$ で割ったときの商です．このとき，$Q(x)$ の次数は，両辺の次数が等しいから，$P(x)$ の次数 n から $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\delta)$ の次数を引いたものです．

この議論を完成する，つまり n 次方程式 $P(x)=0$ の全ての解を用いて，$P(x)$ を因数 $(x-$解$)$ の積の形に表し尽くす，よって $Q(x)$ が定数になるためには，あと 2 つの事柄が明確になる必要があります．1 つは重解について，もう 1 つは n 次方程式の解の個数についてです．

方程式 $P(x)=0$ が重解 α をもつ場合を考えましょう．2 次方程式の場合は，§§ 2.2.2 の ax^2+bx+c の因数分解の式で判別式 D が 0 の場合だから，2 次式 $(x-\alpha)^2$ が $P(x)=ax^2+bx+c$ の因数になることがわかります．

高次方程式の場合を考慮して別の方法でも示しましょう．$P(x)=0$ が解 α をもつとき，因数定理より $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ で，商 $Q(x)$ は 1 次式です．$P(x)=0$ が重解 α をもつとき，‘ 残りの解 ’ α は 1 次方程式 $Q(x)=0$ の解ですから，$Q(x)=(x-\alpha)a$　（a は $P(x)$ の 2 次の係数）．よって，$P(x)=a(x-\alpha)^2$．高次方程式の場合も同様にして因数 $(x-\alpha)^2$ が現れます．高次方程式の場合には，重解（2 重解）以外に 3 重解，4 重解なども一般には現れます．そのような場合も同様の手順を繰り返して，α が k 重解 $(k=2,3,\cdots)$ ならば k 次式 $(x-\alpha)^k$ が $P(x)$ の因数になります．

次に，方程式の解の個数について考えましょう．以下，k 重解は k 個の解と数えることにします．すると，2 次方程式は必ず 2 個の解をもちます．3 次方程式 $P(x)=0$ の場合は，解を 1 つ見つけると，$P(x)=(x-$解$)Q(x)$ と表されて $Q(x)$ は 2 次の整式になります．よって，$P(x)=0$ の残りの解は 2 次方程式 $Q(x)=0$ の解で，それは 2 個あることがわかっています．よって，3 次方程式は，少なくとも 1 個の解の存在を前提にして，3 個の解をもちます．

一般の高次方程式においても 3 次方程式の場合と同様の議論ができます．つまり，高次方程式が，その次数によらずに，少なくとも 1 個の解をもつことを仮定すれば，解の個数は方程式の次数に一致することが示されます．以下，そのことを議論しましょう．

一般の n 次方程式 $P(x)=0$ が 1 つの複素数解 α_1 をもつとしましょう．すると，因数定理より

$$P(x) = (x - \alpha_1)Q_{n-1}(x)$$

と因数分解できます．このとき，$Q_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の整式ですが，方程式は次数によらずに 1 個は解をもつと仮定したので，方程式 $Q_{n-1}(x) = 0$ は解をもちます．それを α_2 とすると

$$Q_{n-1}(x) = (x - \alpha_2)Q_{n-2}(x)$$

と因数分解されます．よって，

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_{n-2}(x)$$

と方程式 $P(x) = 0$ は 2 解をもちます．以下同様に続けていって，最後に 1 次方程式 $Q_1(x) = 0$ から

$$Q_1(x) = (x - \alpha_n)\,a$$

が得られます．ここで，a は整式 $P(x)$ の最高次数の係数です．よって，n 次式 $P(x)$ は，$P(x) = 0$ の解を α_k ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) とするとき，最終的に

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

と $(x - \text{解})$ の形の 1 次式の積に完全に因数分解されます．このとき，解 α_k ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) のいくつかまたは全部が一致しても構いません．したがって，k 重解は k 個の解と数えて

$$n\text{ 次方程式}\quad P(x) = 0\quad \text{は } n \text{ 個の複素数解をもつ}$$

ことがわかります．この事実は **代数学の基本定理** と呼ばれ，数学における最も重要な定理の 1 つになりました．

以上の議論で，‘任意の次数の方程式は少なくとも 1 個の解をもつ’という部分だけが，我々の最後の未解決問題として残りました．それを示すには，n 次の方程式 $P(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ をきちんと探さなければなりません．解 α は虚数の場合もあるので x は実数から複素数に拡張して探さねばなりません．このことは整式 $P(x)$ を x が複素数の場合として扱う，つまり $P(x)$ を複素数の関数とすることを意味します．ここでは最後の一歩まで迫ったことに満足し，その最後の一歩は複素数の章で踏み，定理を完成させましょう．