

第11章 数列

自然数の列 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ や、ガマの油売りのときに現れる数の列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ のようにある規則に従って順に数を書き並べたものを数列 (sequence) といいます。自然数の数列のある数と次の数の差は一定で、このような数列を「等差数列」といいます。またガマの油売りの数列のある数と次の数の比は一定で、このような数列を「等比数列」といいます。

4000 年くらい前には、古代バビロニア人や古代エジプト人は等差数列や等比数列を既に知っており、それらについての知識は生産物の分配や遺産の配分などといった経済生活や社会的実用性と結びついて発展しました。

紀元前 5 世紀、古代ギリシャでは既に自然数・偶数・奇数の数列の和の公式

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1),$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

が知られていました。ユークリッド (Euclid, 前 365 頃 ~ 275) の『原論』には、一般の等比数列の和の公式と実質的に同じ定理が載っています。

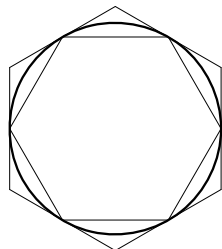
興味ある数列は素数の数列 $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ です。この数列の一般の n 番目の素数を知ることにはできませんが、既に紀元前 3 世紀には、アレクサンドリアの学者エラトステネス (Eratosthenes, 前 275 頃 ~ 194 頃) が特定の n 番目の素数を知する方法を述べています。この方法は「エラトステネスの篩ふるい」と呼ばれています。

アルキメデス (Archimedes, 前 287 頃 ~ 212) は, 幾何と力学のいくつかの問題を解くために, 自然数の平方の和の公式

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を導入しましたが, この公式は既に知られていたようです.

数列は, 円周率 π の計算などのように, 極限的計算を必要とする場合には必然的に現れます. 半径 r の円の円周は $2\pi r$ ですが, その円に内接する正 n 角形の周の長さを l_n , 外接する正 n 角形の周の長さを L_n とすると, 図を描いてみるとほぼ明らかなように



$$l_3 < l_4 < l_5 < \cdots < 2\pi r < \cdots < L_5 < L_4 < L_3$$

が成り立ちますね. テキストの図では内接・外接する正 6 角形を描いています.

アルキメデスは内接・外接する正 6 角形から始めて, 順に辺の数を倍にしていった正 96 角形の場合まで調べ, $l_{96} < 2\pi r < L_{96}$ から

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad (3.14084507 < \pi < 3.142857142)$$

であることを示しました. 彼の方法は, 2000 年間にわたって多くの著名な数学者に採用され, また現在まで広く用いられています. また, この方法は円の面積を求めるときにも用いられました.

アルキメデスが用いた不等式 $l_n < 2\pi r < L_n$ から直ちに厳密な議論が導かれます. この不等式が有限の n について成り立ち, $n \rightarrow \infty$ の極限で $l_\infty = L_\infty$ ならば

$$2\pi r = l_\infty (= L_\infty)$$

が成立しますね. これから π の値をいくらでも精度よく計算することが可能です. このような定理は「はさみうちの原理」といわれ, 極限に関する厳密な議論をするときには, 頻繁に用いられます. 1680 年代に始まった微分・積分の基礎付けはこの原理に負っているといってもよいでしょう. 数列の重要性はむしろ極限計算と結びついています.

§ 11.1 数列

11.1.1 数列

ある規則に従って順に数を並べたものを数列といいましたが，その 1 つ 1 つの数は項といわれます．数列は，その各項に順序を表す番号がつけられていて，一般に

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

などのように表され，これは簡単に $\{a_n\}$ とも書かれます．各項は，初めから，初項，第 2 項，第 3 項， \dots といい， n 番目の項を第 n 項といいます．第 n 項を各項の代表と考えるとき，それを一般項といいます．

数列全体の項の個数を項数といい，項数が有限な数列を有限数列，項が限りなく続く数列を無限数列といいます．有限数列の最後の項は末項といわれます．

数列の項を順に加えていって得られる和を級数といいます．無限数列 $\{a_n\}$ から作られた級数の最初の n 項の和：

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

は第 n 部分和と呼ばれる重要な量です．

数列には，基本的な等差数列や等比数列の他に，種々のタイプのものがあり，また一般項が未知な扱いにくいものが数知れずあります．扱いにくい数列の代表格を挙げれば，素数の数列 $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ でしょうか．

11.1.2 等差数列

初項を a_1 として，それに次々に定数 d を加えて作られた数列 $\{a_n\}$ ：

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, a_4 = a_3 + d, \dots$$

を等差数列といい，加えられる定数 d を公差といいます．等差数列 $\{a_n\}$ では，一般に

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

なので、隣り合う 2 項の差は一定です。 $a_1 = 1$, $d = 1$ の場合が自然数の数列ですね。

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、初項 a_1 に公差 d を $n - 1$ 回加えたのだから

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

と表されますね。

この等差数列の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n を求めてみましょう。

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_k + a_{n-(k-1)} = \cdots = a_n + a_1$$

に注意すると

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n - 1)d\} \end{aligned}$$

が容易に導かれますね。

ここで練習です。この章の始めに述べた、古代ギリシャ人が知っていたという自然数・偶数・奇数の数列の和の公式を導け。各自で導きましょう。

数列の問題には、ほとんど意味がないけれど、嫌らしいものが多くあります。1 題やってみましょう。初項 2 , 公差 3 の等差数列の初項からの和が初めて 170 を越えるのは第何項目か。ヒント：題意の不等式を求めた後の処理が本題です。一般項が $a_n = 2 + 3(n - 1)$ より、第 n 項目で 170 を越えるとすると、求める条件は

$$S_n = \frac{1}{2}n(3n + 1) > 170, \text{ よって } 3n^2 + n - 340 > 0$$

ですね。上の不等式を解くのに、自然数 n を実数 x に拡張しておいて

$$x < \frac{-1 - \sqrt{4081}}{6}, \quad \frac{-1 + \sqrt{4081}}{6} < x$$

と解き、 $\sqrt{4081} = 63.88 \cdots$ などとやっていると嫌になってきます。自然数で考えれば済むのだから

$$3n^2 + n - 340 > 0, \text{ よって } n^2 + \frac{n}{3} > 113 + \frac{1}{3}$$

と簡単にしておいて、見当をつけるのがスッキリしています。不等式の左辺は $n > 0$ で増加するのを見ておくと、 $n = 10$ は満たさないけれど、 $n = 11$ は満たすのを容易に確認できるでしょう。ある程度問題に慣れてきたら‘スッキリ感’を求めて努力するのが数学を嫌いにならずに済むコツです。

11.1.3 Σ 記号と階差

§§9.2.2.2 で Σ 記号を学びましたね。その定義を数列を用いて表しましょう。 p, q ($p \leq q$) が整数のとき

$$\sum_{k=p}^q a_k = \begin{cases} a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q & (p < q) \\ a_p & (p = q) \end{cases}$$

と表されます。これから 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について

$$\sum_{k=p}^q (a_k \pm b_k) = \sum_{k=p}^q a_k \pm \sum_{k=p}^q b_k$$

が得られます。また、定数 c について

$$\sum_{k=p}^q ca_k = c \sum_{k=p}^q a_k, \quad \sum_{k=p}^q c = c(q - p + 1)$$

が成り立ちます。

等差数列 $\{a_n\}$ については $a_{n+1} - a_n = d$ (d は公差) が成り立ちましたね。一般の数列 $\{a_n\}$ についても

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

は重要な量で、それから作られる数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列と呼ばれます (階差は階段の段差にたとえた用語)。このテキストでは、階差数列 $\{b_n\}$ の一般項 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を数列 $\{a_n\}$ の階差と呼ぶことにしましょう。

一般の数列 $\{a_n\}$ の階差 $a_{n+1} - a_n = b_n$ の和

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n - 1 \geq 1)$$

を考えると，左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) \\ &= a_n - a_1\end{aligned}$$

となり，階差の和 $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$ に現れる項は‘頭’と‘尻尾’を残して打ち消し合います．よって

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \text{ よって } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

が得られます．これは階差と元の数列の関係を表しています．

11.1.4 等比数列

数列 $\{a_n\}$ が初項 a_1 に対して次々に一定の実数 r を掛けて作られるとき， $\{a_n\}$ は等比数列と呼ばれ， r を公比といいます．このとき，一般に

$$a_{n+1} = a_n r, \text{ よって } \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

なので，隣り合う 2 項の比は一定です．

等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は，初項 a_1 に公比 r を $n-1$ 回掛けたものになるので

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

と表され， a_n は， $r \neq 1$ のとき， n と共に指数関数的に増加または減少します．

ここで複利計算の問題をやってみましょう．複利計算とは一定期間ごとに利息を元金に繰り入れ，その全体を元金とする利息計算です．年利率 $x\%$ の複利で a_0 万円を借りました． n 年後の借金 a_n 万円を求めましょう． k 年後の借金と $k+1$ 年後の借金の関係は，年単位の複利計算では

$$a_{k+1} = a_k + \frac{x}{100} a_k = a_k \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

です． $r = 1 + \frac{x}{100}$ とおくと， $a_{k+1} = a_k r$ と表され，複利の元利合計は等比数列になります．よって， n 年後の借金は

$$a_n = a_0 r^n = a_0 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n \quad (\text{万円})$$

となります．もし，ピッカピカのスポーツカーを衝動買いして，400 万円を年利 10% で借りたとすると，3 年後の元利合計は $a_3 = 400 \times 1.1^3 \approx 532$ 万円にもなりますね．たったの年利 10% ですよ．

次に，等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 r^{k-1}$$

を求めてみましょう．階差をうまく使います． $r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_1 r^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_1 r^{k-1} (r-1)}{r-1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_1 r^k - a_1 r^{k-1}}{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{r-1} \end{aligned}$$

と変形すると， $a_{k+1} - a_k$ は数列 $\{a_k\}$ の階差だから， $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ が成り立ち，よって

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_{n+1} - a_1}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

が得られます．なお， $r = 1$ のときは $S_n = n a_1$ ですね．

先ほど，年利率 $x\%$ で a_0 万円を借りたとき， n 年後の借金は $a_n = a_0 r^n$ 万円 ($r = 1 + \frac{x}{100}$) でしたね．そこで，1 年後から A 万円ずつ返していき， n 年後に完済するようにしましょう．この計算は，1 年後から年利率 $x\%$ の複利計算で，毎年 A 万円を定額貯金して， n 年後に a_n 万円になることと同じですね．

1 年後に返却した A 万円は n 年後に元利合計が $A r^{n-1}$ 万円になりますね．同様に， k 年後に返した A 万円の n 年後の元利合計は $A r^{n-k}$ 万円ですね．よっ

て、1 年後から n 年後まで返却した金額の元利合計が a_n 万円なので

$$\begin{aligned} a_n = a_0 r^n &= \sum_{k=1}^n A r^{n-k} = A r^{n-1} + A r^{n-2} + \cdots + A r + A \\ &= \frac{A r^n - A}{r - 1} \end{aligned}$$

が成立します。よって、

$$A = \frac{a_0 r^n (r - 1)}{r^n - 1} = \frac{a_0 (r - 1)}{1 - r^{-n}}$$

なので、 $a_0 = 400$ 万円を年利率 10% ($r = 1.1$) で借りたとして、 $n = 3$ 年で返そうとすると、毎年 $A \approx 161$ 万円必要になります。これは月に約 13 万 4 千円ですから無理ですね。5 年で返す場合は、 $A \approx 106$ 万円です。これでもまず無理でしょう。

§ 11.2 階差と数列の和

11.2.1 分数の和

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

を求めてみましょう。一見不可能に見えますが、階差を利用すると、手品ののように簡単になります。

分母の k と $k+1$ が 1 だけ異なることに注意すると

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = -\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

のように部分分数に分解できます。ここで $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ が数列 $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ の階差であることに注意すると

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

のように階差の項の頭と尻尾が残りますね。

ここで練習です .

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

を求めよ . ヒント : もちろん階差を利用します .

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

のように , 隣り合う自然数の積の形の部分分数に分解しておいて , さらに部分分数に分解します . よって

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

ですね . 最後の整理は君の仕事です .

11.2.2 隣り合う自然数の積の和

この章の始めで述べたように , アルキメデスは自然数の平方の和の公式

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

を導きましたが , あなたならどのように導くでしょうか . ここでは , 階差の規則性を調べることによって , 一般的議論からアルキメデスの公式を含む一連の公式を導いてみましょう .

2 次の数列 $\{k(k+1)\}$ の階差を考えると ,

$$(k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1)$$

ですから , 規則性があるように見えます . 3 次の数列 $\{k(k+1)(k+2)\}$ の階差は

$$(k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2) = 3(k+1)(k+2) .$$

さらに , 一般に数列 $\{k(k+1)\cdots(k+p)\}$ ($p = 1, 2, 3, \dots$) の階差は

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)\cdots(k+p+1) - k(k+1)\cdots(k+p) \\ &= (p+1)(k+1)(k+2)\cdots(k+p) \end{aligned}$$

となって，見事な規則性が見られます．この定理を実用するためには

$$\begin{aligned} & k(k+1)\cdots(k+p) - (k-1)k\cdots(k+p-1) \\ &= (p+1)k(k+1)\cdots(k+p-1) \quad (p=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

としておくほうがよいでしょう．この定理から $p=1$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \{k(k+1) - (k-1)k\} \\ &= \frac{1}{2} n(n+1). \end{aligned} \tag{p1}$$

$p=2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2). \end{aligned} \tag{p2}$$

$p=3$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned} \tag{p3}$$

など，隣り合う自然数の積の和の公式が得られます．

よって，(p1), (p2) より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n \{k(k+1) - k\} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

が導かれますね．

では，ここで問題です．

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

を導け．ノーヒントでやってみましょう．

§ 11.3 漸化式

11.3.1 漸化式

等差数列 $\{a_n\}$ が未知で、その階差数列 $\{b_n\}$ が既知であるときは、階差の関係式

$$a_{n+1} - a_n = b_n \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

より、もし初項 a_1 が与えられるならば、一般項 a_n が既知になる、つまり、数列 $\{a_n\}$ が既知になります。

未知の等比数列 $\{a_n\}$ についても、公比 r と初項 a_1 が与えられれば、一般項についての関係式 $a_{n+1} = r a_n$ から、一般項が $a_n = a_1 r^{n-1}$ と既知になりますね。

上の議論は容易に一般化できます。一般の未知の数列 $\{a_n\}$ についても、初項 a_1 および一般項についての関係式 $a_{n+1} = f(a_n)$ などを与えられれば、その数列は既知になることが以下の議論でわかります。ここで、 $f(a_n)$ は a_n の式で、関数 $f(x)$ の x に a_n を代入したものです。 $a_{n+1} = f(a_n)$ は、項 a_n が定まると隣の項 a_{n+1} が定まることを意味します。これを‘隣接関係’といいましょう。一般項についての関係式を具体的に書き表すと

$$a_{n+1} = f(a_n) \Leftrightarrow a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \quad a_4 = f(a_3), \quad \dots$$

ですから、初項 a_1 が与えられると a_2 が定まり、よって a_3 が定まり、よって a_4 が定まり、 \dots よって、数列 $\{a_n\}$ の全ての項が順次定まっていきますね。荒っぽい言い方をすれば、‘全ての項に対して隣接関係が与えられるとき、最初の項を定めると全てが定まる’でしょうか。

このように数列 $\{a_n\}$ を芋づる式に決定することを‘数列の帰納的定義’といい、それを可能にする一般項の隣接関係式を漸化式といいます。‘漸化’は‘だんだん漸と変化していくこと’を意味し、今の場合は関係式 $a_{n+1} = f(a_n)$ で n を変化させて用いることから、‘漸化式’は‘項を次々と変えていく等式’を意味します。今の場合の漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ は2つの項の間の隣接関係式なので‘2項間漸化式’といい、その代表的なものが等差数列・等比数列の関係式で

す．漸化式には $a_{n+1} = g(a_n, a_{n-1})$ ($= pa_n + qa_{n-1}$ など) のように 3 つの項の関係を与えるものもあり、これを「3 項間漸化式」といいます．

数列 $\{a_n\}$ の漸化式と初項を与えて「一般項 a_n を n の式として具体的に書き下す」ことを「漸化式を解く」といいます．ただし、漸化式と初項（必要なら初めの数項）から数列は必ず定まりますが、漸化式が解ける場合は実際には限られています．例えば、 $f(a_n)$ が a_n の 2 次式だったら、 a_n を n の式として書き下すことは特別の場合を除いて既に無理です．

11.3.2 2 項間漸化式

11.3.2.1 2 項間漸化式

ここでは、数列 $\{a_n\}$ の基本的な 2 項間漸化式

$$a_{n+1} = f(a_n) = pa_n + q \quad (p, q \text{ は定数})$$

を調べてみましょう．これは、 $p = 1$ のとき等差数列、 $q = 0$ のとき等比数列の漸化式になっていますね．それらについては既に調べたので、以下 $p \neq 1$ 、 $q \neq 0$ としましょう．

まず、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ の階差をとってみましょう：

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= (pa_{n+1} + q) - (pa_n + q) \\ &= p(a_{n+1} - a_n) . \end{aligned}$$

定数 q が消えましたね．よって、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、上式は数列 $\{b_n\}$ が公比 p の等比数列であることを示し、それから $\{b_n\}$ が求まり、よって数列 $\{a_n\}$ も求まります．それを実行するのは君たちに任せましょう．

上の漸化式の階差をとったことのメリットは等比数列にできたことです．漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を等比数列にするだけならばもっと簡単な方法があります．定数 q の一部 α を左辺に振り分けたとして、漸化式を

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \quad (\Leftrightarrow a_{n+1} = pa_n + q)$$

のように表せばよいわけです．どう振り分けたかは元の漸化式と比較すればわかります：

$$\alpha = p\alpha + q \quad (q = \alpha - p\alpha) . \quad (\text{特性方程式})$$

これから $\alpha = \frac{q}{1-p}$ と決まります．上式を「特性方程式」といいます．

よって， $b_n = a_n - \alpha$ とおくと， $b_{n+1} = pb_n$ が成り立ち

$$b_n = b_1 p^{n-1} \Leftrightarrow a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) p^{n-1}$$

が得られます．よって，初項 a_1 が与えられると数列 $\{a_n\}$ は定まりますね．

ここで，定数 α の意味を考えてみましょう．漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ において a_n, a_{n+1} の両方を α で置き換えると，特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ になるので， α は $a_n = a_{n+1}$ を満たす定数 a_n のことであると解釈できます．そんな $a_n = \alpha$ があるのでしょうか．それを調べるために $a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) p^{n-1}$ の絶対値を考えてみましょう：

$$|a_n - \alpha| = |a_1 - \alpha| |p|^{n-1} .$$

この等式から， $|p| < 1$ の場合には， $n \rightarrow \infty$ のとき (n が限りなく大きくなっていくとき) $|p|^{n-1} \rightarrow 0$ (限りなく 0 に近づいていく) だから，

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } |a_n - \alpha| \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow a_n \rightarrow \alpha)$$

が成り立ちます．よって， $a_\infty = \alpha$ が成立し，このとき $n = \infty$ ですから $a_n = a_{n+1}$ となります．よって，上述の解釈は可能です．

$|p| > 1$ の場合はどうでしょうか． $a_n = \alpha$ とすると， $|p|^{n-1} = \left| \frac{1}{p} \right|^{-n+1} = 0$ が成り立つためには $n = -\infty$ です．つまり， $a_{-\infty} = \alpha$ であることが要求されます． n は自然数としていましたから，このことは一見不可能のように思えます．しかし，うまい抜け道があります．いったん，数列 a_n を‘整数を定義域とする n の関数 $a(n)$ に拡張’しておいて (漸化式も同様に拡張)，我々が最後にとり出すのは n が自然数の部分だとすると問題は起こりません．詭弁のように聞こえるかもしれませんが，§§11.1.2 の練習問題の不等式を解く際に，自然数 n をいったん実数に拡張しておいて計算しましたね．それと同じことです．

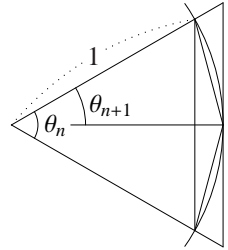
よって， $|p| < 1$ のとき $\alpha = a_\infty$ ， $|p| > 1$ のとき $\alpha = a_{-\infty}$ と解釈できます．

なお，特に $a_1 = \alpha$ の場合は， $a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) p^{n-1} = 0$ より，全ての n に対して $a_n = \alpha$ が成り立ちます．

11.3.2.2 アルキメデスの π の近似計算

この章の始めに述べたアルキメデスによる π の近似計算を現代風にアレンジして議論してみましょう。彼は円に内接・外接する正 6 角形から始めてそれらの辺の数を 2 倍・2 倍と大きくしていきました。何故でしょう。それは以下の議論でわかります。彼の漸化式の方法をより易くして議論しましょう。

半径 1 の円の円周を $l (= 2\pi)$, 円に内接, 外接する正 $6 \cdot 2^{n-1}$ 角形の周を改めてそれぞれ l_n, L_n としましょう。このとき 1 辺を望む中心角は $\theta_n = \frac{360^\circ}{6 \cdot 2^{n-1}}$ ですね。正 6 角形 ($n = 1$) のとき, $\theta_1 = 60^\circ$, $l_1 = 6 \cdot 2 \sin \frac{\theta_1}{2} = 6$, $L_1 = 6 \cdot 2 \tan \frac{\theta_1}{2} = \frac{12}{\sqrt{3}}$ ですね (右図を利用して確かめましょう)。



この手の問題を考えるときは漸化式を立てることを念頭におき, 正 6 角形と正 12 角形の関係を調べ, 正 $6 \cdot 2^{n-1}$ 角形と正 $6 \cdot 2^n$ 角形の関係に注意します。

内・外接する正 $6 \cdot 2^{n-1}$ 角形するとき, l_n, L_n については, 先の図より

$$l_n = 6 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 \sin \frac{\theta_n}{2}, \quad L_n = 6 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 \tan \frac{\theta_n}{2}$$

となるので, $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta$ (θ は任意の角) に注意すると

$$l_n = L_n \cos \frac{\theta_n}{2}$$

が成り立つことがわかります。この関係式より $l_n < l < L_n$ において $n \rightarrow \infty$ とすると $l_\infty = L_\infty$ が得られ, よって, この章の始めで説明したはさみうちの原理より $l = l_\infty$ となります。

辺の数を 2 倍にした正 $6 \cdot 2^n$ 角形するとき, l_{n+1} は同様に

$$l_{n+1} = 6 \cdot 2^n \cdot 2 \sin \frac{\theta_{n+1}}{2}$$

となります。このとき, 中心角の間に関係

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

が成り立ちますね．よって，倍角公式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ を用いると， l_n と l_{n+1} の関係，つまり漸化式が得られます：

$$l_n = 6 \cdot 2^n \sin \frac{\theta_n}{2} = 6 \cdot 2^n \sin \theta_{n+1} = 6 \cdot 2^n \cdot 2 \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} ,$$

$$\text{よって } l_n = l_{n+1} \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} .$$

この漸化式の n に $1, 2, 3, \dots, n-1$ を代入したものを辺々掛けると

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 \cos \frac{\theta_2}{2} \\ l_2 &= l_3 \cos \frac{\theta_3}{2} \\ &\dots\dots \\ l_{n-2} &= l_{n-1} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \\ \times) \quad l_{n-1} &= l_n \cos \frac{\theta_n}{2} \\ \hline l_1 &= l_n \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} \cdots \cos \frac{\theta_n}{2} . \end{aligned}$$

よって，

$$l_n = \frac{l_1}{\cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} \cdots \cos \frac{\theta_n}{2}}$$

が得られ，漸化式が解けたことになります．この操作は漸化式 $l_n = l_{n+1} \cos \frac{\theta_{n+1}}{2}$ の対数をとって得られる階差 $\log l_{n+1} - \log l_n = -\log \cos \frac{\theta_{n+1}}{2}$ を加えることと同じです．

$n = 5$ ，つまり正 96 角形するとき， $l_1 = 6$ ， $\theta_k = \frac{360^\circ}{6 \cdot 2^{k-1}}$ より，

$$l_5 = \frac{6}{\cos 15^\circ \cos \frac{15^\circ}{2} \cos \frac{15^\circ}{4} \cos \frac{15^\circ}{8}} = 6.2820639 \dots$$

となります．そこで， $l_5 = L_5 \cos \frac{\theta_5}{2}$ を用いて L_5 を求めると

$$\frac{l_5}{2} < \frac{l}{2} = \pi < \frac{L_5}{2} \Leftrightarrow 3.14103195 \dots < \pi < 3.1427146 \dots$$

が得られます．この結果はアルキメデスのものと有効数字 4 桁まで一致しています．

アルキメデスの生きた時代は紀元前 3 世紀ですからまだ三角関数の表はなく、彼が用いたのは $l_n = 6 \cdot 2^n \sin \frac{\theta_n}{2}$, $L_n = 6 \cdot 2^n \tan \frac{\theta_n}{2}$ および $\theta_n = 2\theta_{n+1}$ から得られる連立漸化式

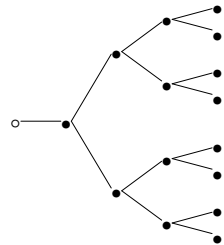
$$l_{n+1} = \sqrt{l_n L_{n+1}}, \quad L_{n+1} = \frac{2l_n L_n}{l_n + L_n}$$

でした。彼はこの漸化式をどのように用いたのか考えてみましょう。

11.3.3 フィボナッチ数列と 3 項間漸化式

11.3.3.1 フィボナッチ数列

細菌やアメーバのような単細胞生物は、環境がよいと、一定時間（簡単のために 1 時間とします）が経つたびに分裂して 2 倍・2 倍と増殖していきますね。すると、始め 1 個の細菌は n 時間後には 2^n 個にも増えてしまいますね。図の黒丸・●がその始めの様子を表しています。

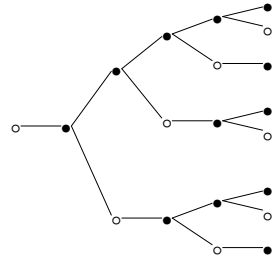


ところで、この図に白丸○の部分を加えると、木の枝が分かれていく様子に見えませんか。この図は実際の木の正確な枝分かれを表すわけではありませんが、多細胞生物の組織や個体の増殖でも似たような法則に従うことが考えられます。

13 世紀の初めというからまだ中世のまっただ中の頃です。イタリアの数学者フィボナッチ (Leonardo Fibonacci, 1174 頃 ~ 1250 頃) は、^{うさぎ} 兎の個体繁殖について考えある数列を見いだしました。話を理想化して議論しますが、得られた数列は、「フィボナッチ数列」と呼ばれ興味ある事柄を多く含みます。

雄雌 1 対の子兎がいます。子兎は 1 カ月後には成長して親になり、その後 1 カ月ごとに (雄雌) 1 対の子供を産むとしましょう。生まれた子供も同様に 2 カ月経つと 1 対の子供を産み始めます。最初の 1 対の子兎は n カ月後には何対になっているのでしょうか。とりあえずは 12 カ月後、つまり 1 年後の対の数を調べましょう。

最初の月を $n = 0$ とし, n カ月後には兎は a_n 対になるとしましょう. $a_0 = a_1 = 1$ 対は明らかですね. 2 カ月後には子供が生まれるので $a_2 = 1 + 1 = 2$ 対ですね. 3 カ月後には, 親はまた子供を産み, 子は親になるので $a_3 = 2 + 1 = 3$ 対になりますね. 図では $n = 5$ まで描いてありますが, 子供の対を白丸 \circ で, 親の対を黒丸 \bullet で表しています. それを参考にして一般項 a_n が



どのように表されるか調べましょう. 一気にはいかないので, 漸化式を考えましょう. 2 項間漸化式が無理なら 3 項間漸化式で, 全ての n で無理なら $n \geq 2$ で試みましょう.

まずは a_n を表にしてみましょう. この表をじっと眺めて, 何らかの規則性がないかどうかを考えましょう

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	1	1	2	3	5	8	...

(じっと凝視してみましょう...). $n \geq 2$ の場合を考えると, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$ だから, 全ての $n \geq 2$ について a_n はその前の 2 項を加えたもの, つまり

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

が成り立ちそうですね.

次に, これで間違いないことを確認しましょう. まず, 全ての $n \geq 0$ に対して, a_n は親の対 \bullet_n と子の対 \circ_n からなっていますね:

$$a_n = \bullet_n + \circ_n \quad (n \geq 0)$$

($\bullet_0 = 0$, $\circ_0 = 1$, および, $\bullet_1 = 1$, $\circ_1 = 0$ です). このとき, 子の対は必ず親の対から生まれるので, \circ_n は 1 カ月前の親の対 \bullet_{n-1} ($n \geq 1$) に等しいですね:

$$\circ_n = \bullet_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

また, 親の対は 1 カ月前には親の対か子の対のどちらかなので,

$$\bullet_n = \bullet_{n-1} + \circ_{n-1} = a_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

が成り立ちますね．また，この式は $n \geq 1$ で成り立つので， n を $n-1$ で置き換えて代わりに $n \geq 2$ とした

$$\bullet_{n-1} = \bullet_{n-2} + \circ_{n-2} = a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

も成り立ちますね．よって，これらのことから

$$a_n = \bullet_n + \circ_n = (\bullet_{n-1} + \circ_{n-1}) + \bullet_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

であることが確かめられました．

この漸化式に従ってもう一度表を作ってみましょう．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...

初め子供の 1 対であったものが 1 年後には 233 対にもなります．

この数列が現実の兎の繁殖の問題に適用できるかどうかはともかく，野の花の花弁（花びら）の枚数についてはある意味で適用できます．百合は 3 枚，キンポウゲや桜草は 5 枚，ヒエンソウは 8 枚，マリーゴールドは 13 枚，アスターは 21 枚，デイジーは 3 種類あってそれぞれ 34, 55, 89 枚など，ほとんどの花がフィボナッチ数列に該当する数の花弁をもつそうです．そうそう，クローバーの葉っぱは 3 枚でしたね．また，^{けやき} 欒の木の枝分かれの様子はこの数列にほぼ従うといわれています．これらの一致は単なる偶然とは思えませんね．

11.3.3.2 フィボナッチ数列と黄金比

兎の繁殖の問題から得られた数列が花や木と関係があるとは驚きますね．実は君たちをさらに驚かすフィボナッチ数列と植物の深い関係が知られています．そのキーワードは‘ひまわりの種の配置’ということにしておきましょう．そのことを調べるためには，フィボナッチ数列の隣り合う項の比 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の極限の値 b_∞ を必要とするので，先にその値について議論します．

まず， b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を並べてみましょう：

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34} = 1.6176 \dots, \frac{89}{55} = 1.618 \dots$$

以下の漸化式の議論で示されるように，この比はある値 Φ ^{ファイ} に近づきます：

$$b_{\infty} = 1.6180339887 \dots = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

実はこの値 Φ は特別な数で、比 $\Phi : 1$ (または、 $1 : \Phi$) は、なんと、人が最も美しいと感じるといわれる調和の比「黄金比」、つまり $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} : 1$ に一致します。黄金比は、線分 AB 上に点 P をとって $AP : PB = AB : AP$ を満たすようにしたときの比 $AP : PB$ のことです¹⁾。黄金比は古代ギリシャ時代から人々に好まれ、テレホンカードや新書版コミックスの縦横の辺の比など多くのものに用いられています。有名なギリシャ彫刻「ミロのビーナス」の「へそから計った上下の長さの比」は黄金比とのことです。

$b_{\infty} = \Phi$ を確かめるために、フィボナッチ数列の 3 項間漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 0, \quad a_0 = a_1 = 1)$$

を途中まで解いて調べましょう。この漸化式は、2 項間漸化式 $a_{n+1} = p a_n + q$ と同様、等比数列化して解くことができます。つまり、ある定数 α, β ($\alpha > \beta$) を導入して、問題の漸化式を

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \quad (\Leftrightarrow a_{n+2} = a_{n+1} + a_n) \quad (n \geq 0)$$

のように表すことができます。 $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とおくと、 $b_{n+1} = \beta b_n$ と等比数列の漸化式になりますね。

上式の α が黄金比 Φ になることが示されます。漸化式は n によらずに成り立つので、両漸化式の a_{n+1}, a_n の係数を比較することができ、

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

が得られます。この関係から、 α, β を解とする方程式 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ は $x^2 - x - 1 = 0$ となるので、

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \alpha, \beta \quad (\alpha > \beta)$$

が得られ、 α が黄金比 Φ であることがわかります。

¹⁾ $AP = x, PB = 1$ とすると、 $x : 1 = (x + 1) : x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ より、 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (> 0)$ が得られます。

さて、比 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ は n が大きくなるにつれて黄金比 Φ に近づいていくことを示しましょう。漸化式の両辺を a_{n+1} で割ると、

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \Leftrightarrow \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \alpha = \beta(1 - \alpha \frac{a_n}{a_{n+1}})$$

より

$$b_{n+1} - \alpha = \frac{\beta}{b_n}(b_n - \alpha)$$

が得られますね。この等式を具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} b_1 - \alpha &= \frac{\beta}{b_0}(b_0 - \alpha), & b_2 - \alpha &= \frac{\beta}{b_1}(b_1 - \alpha), & b_3 - \alpha &= \frac{\beta}{b_2}(b_2 - \alpha), \\ \dots, & & b_{n-1} - \alpha &= \frac{\beta}{b_{n-2}}(b_{n-2} - \alpha), & b_n - \alpha &= \frac{\beta}{b_{n-1}}(b_{n-1} - \alpha), & \dots \end{aligned}$$

ですから、それらを辺々掛け合わせて

$$b_n - \alpha = \frac{\beta^n}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}(b_0 - \alpha),$$

$$\text{よって } |b_n - \alpha| = \left| \frac{\beta^n}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} \right| |b_0 - \alpha|$$

を得ます。ここで、 $a_{k+1} > a_k > 0$ より $b_k > 1$ ($k \geq 0$)、かつ $|\beta| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ だから、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} > 1$ 、 $|\beta|^n \rightarrow 0$ となり、よって

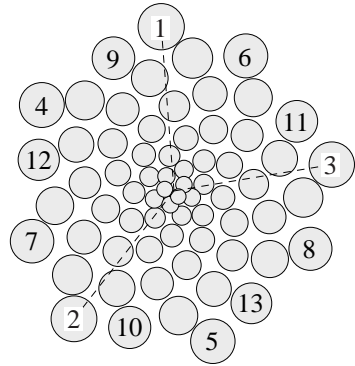
$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } |b_n - \alpha| \rightarrow 0 \Leftrightarrow b_n \rightarrow \alpha \left(= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \right)$$

が成り立ち、比 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ は黄金比に限りなく近づいていきますね。

11.3.3.3 黄金角と植物の成長

菊科の植物ひまわりは大きな花を咲かせますね。その花は、外周に舌状花と呼ばれる黄色の花びら（花弁）があり、その内側に、管状花または筒状花と呼ばれる褐色の小さな細長い花が千個ぐらいいぎっしりと詰まっています。理科事典などでその写真を見るとよいでしょう。内側の管状花はそれぞれ受粉して根元に黒い種をつけます。ひまわりの花はとても大きいのでその構造が肉眼でも観察できます。

右図を見てみましょう．これはひまわりの花の花弁と管状花の付け根の配置の模式図で，ほぼ種の配置に当たるものです．実際にはもっと数が多いのですが，模式図と同様に狭いスペースにぎゅうしりと収まる配置になっています．模式図では螺旋状の曲線が見えますね．しかも，(中心から外側に向かって)右回り(時計回り)のものと，それと交叉して左回り(反時計回り)のものが何



本もありますね．それらの本数を数えてみましょう(図の螺旋を鉛筆でなぞって感動しましょう)．右回りのものが8本，左回りのものが13本ありますね．その数8，13は，なんと，フィボナッチ数列の a_5 ， a_6 項です．

実際の花の配列も交叉する螺旋模様が見られ，右回りと左回りのものの本数が，ひまわりの種類によって，34と55，55と89，および89と144のものがあるそうです²⁾．これらの数もフィボナッチの数になっています．さらに，松の木の松かさやパイナップルの実の鱗模様にも右回り・左回りの螺旋が認められ，五葉松で5本と8本，赤松で8本と13本，パイナップルでは8本と13本あるとのことでした．

この螺旋の数が草花の花弁の数を基本的に説明します．右回りか左回りの螺旋の組の一方の螺旋の外縁に花弁が並ぶのです．すると螺旋の数が花弁の数に一致し，その配置も正しいものになります．上の模式図でいうと，①～⑧または①～⑬の位置に花弁がつくわけです．試しに庭の小菊の花を摘んで調べてみたところ，その構造はひまわりと同じで，外側は花弁がとり囲み内側には管状花がぎゅうしりと詰まっています，花弁の数はフィボナッチ数の55でした．

なぜフィボナッチ数がこれほどまでに顕著に現れるのでしょうか．これはもう単なる偶然で片づけられる問題ではありませんし，まさか植物の遺伝子がその数を意図的に選んでいるとも思えません．遺伝子が全てを決定するわけでは

²⁾ インターネットをやっている人は，「Fibonacci sunflower」で検索すると，この交叉螺旋模様が実物のひまわり写真で載っているウェブサイトがいくつも見つかります．

なく「物理的条件が加わってフィボナッチ数を導く」と考えるほうがむしろ自然でしょう。

植物の若芽の先端には成長点（茎頂；shoot apex）という盛んに細胞分裂をしている細胞群がありますね。成長点は、それをとり巻く頂点リング（apical ring）と呼ばれる環状領域に、「原基」（primordium）と呼ばれる新たな細胞を生み出し、各々の原基は 1 個の葉や花弁・管状花に成長していきます。よって、ひまわりの花弁や管状花の配置は原基の配置そのものであり、原基の生成過程のメカニズム（仕組み）がわかれば理解できます。そのメカニズムは管状花やその種がぎっしりと密に分布することを説明するはずでず。

花の原基は生まれた順に成長して花を咲かせていきます。ひまわりの花は外側のものから順に左回りに咲いていき次第に内側に至るそうです。このことはより先にできた原基はより外側にあることを意味します。ひまわりの花の模式図を利用してそれから何がわかるかを調べましょう。番号①～③は中心から遠い順、つまり原基ができた順を表します。著しい特徴が現れたのは、各原基と中心にある成長点を結び、ある原基と次に生まれた原基のなす中心角を計ってみたときでした。番号①と②の角は 137.5° に極めて近く、②と③の角も 137.5° 、③と④の角も、他の場合も同様に共通の角度 137.5° になります。

もし仮にこの共通の角度が 90° であったとしたら、原基は交叉螺旋ではなく十字の模様に連なり、原基のないスペースが大半になりますね。実際、この角度 137.5° は非常に厳しい角度であり、これから僅かに 0.5° ずれただけでも、左右に交叉する螺旋模様の片方の組はほとんど消え失せて残りの組の螺旋だけになり、隣り合う螺旋の間には原基が分布しないスカスカの部分が出てきます。よって、原基がぎっしりと密に収まる交叉螺旋模様はこの特別な角度に起因することがわかります。このことが知られたのは 1837 年のことでした。

人々はこの重要な角度を「黄金角」と呼び、それを導くことを試みました。もし黄金角が $360^\circ \times \frac{m}{n}$ （ m, n は自然数）の形であれば、それを n 倍すると 360° の倍数になるので、中心から見て同じ方向に原基が並ぶような配置になります。このような場合には原基がぎっしりと収まる配置にはなりません。よって、黄金角は何倍しても 360° の倍数にならないように、 $360^\circ \times$ 無理数 の形になる必要があります。その無理数もできるだけ簡単な分数では近似しにく難いもの

がよいわけです。整数論の数学者は、昔から、分数近似が最もし難い無理数が黄金比 $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$ であることを知っていました。

数学者はごく当然のように黄金比 Φ と黄金角の関係を調べました。最も単純なのは、黄金角が円周角 360° を文字通り黄金比 $\Phi : 1$ に分ける角、いや $\Phi > 1$ だから、黄金比 $1 : \Phi$ に分ける角です：

$$\text{黄金角} = 360^\circ \times \frac{1}{1 + \Phi} = 360^\circ \times \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

この値を計算してみましょう。まさに望ましい値

$$\text{黄金角} = 137.507764\dots(\text{度})$$

が得られますね。‘植物は角度に対して黄金比を体現している’のでした。このことを知ったら、君たちの教科書にもフィボナッチ数列が載っていることがうなず肯けるでしょう。

これでこの問題は一応の解決をみました。ただし、植物が黄金角を選ぶ理由を‘美の追究のため’とはいかないでしょう。より根本にある自然の摂理を求めるパイオニア的試みが、ごく最近の1993年になってから、フランスの二人の数理論理学者ドゥアディ(S. Douady)とクデ(Y. Couder)によってなされました。彼らの基本的考え(仮説)は「成長点の周りの頂点リング上に、原基は同じ時間間隔で次々に形成され、それらは同一の電荷が磁荷をもつかのように互いに反発して放射状に移動する」というものです。この仮定により、次々に生まれる原基はすぐ前にできた原基からできるだけ遠ざかるように移動し、より先にできたものは中心からより遠ざかることとなります。彼らは磁場の中(磁石のN極とS極の間)にシリコンオイルを張った丸い皿をおき、その真ん中に磁性(磁石の性質)をもつ小さな液滴を同じ時間間隔で垂らして、それらが散っていく様子を磁場の強さや液滴を垂らす時間間隔を変えながら観察しました。多くの場合に得られた液滴の配列模様は、まさにひまわりの花で観察された、黄金角と交叉螺旋のパターンになりました。また、そのことはコンピュータ実験でも確認されました³⁾。

³⁾ より詳しい解説は、イアン・スチュアート著『自然の中に隠された数学』(吉永良正訳、草思社)に載っています。この本は一種の啓蒙書で、知らず知らずのうちに読者を数学と自然科学の最新の研究動向にまで導きます。

彼らの研究は植物の成長に関する基本的なメカニズムを解明するためのヒントを与えていました．例えば，もし原基が花でなく葉の原基であって，それらが次々と生まれる間に茎や枝が成長すれば，葉は茎や枝の周りに螺旋状に配置される^{ごせい}互生といわれる葉のつき方になります．さらに，葉が枝に分化すると，枝分かれの様子がこのメカニズムで説明できます．全ての葉が最も効率よく日の光を受けるように配置されていることは，葉の原基の配置に現れる黄金角と交叉螺旋によって説明されるでしょう．

ドウアディとクデの仕事は，「^{フィロタクシス}phyllotaxis」と呼ばれ，原基に由来する全ての植物要素の配列を研究する，新たな分野を開拓しました．多くの数理物理学者・生物化学者が植物の成長に関する研究に着手し，細胞レベルや分子レベルで関係する問題が多方面から調べられ，今まさに phyllotaxis は発展の途上段階にあるようです．

11.3.3.4 3 項間漸化式

$a_{n+2} = f(a_{n+1}, a_n)$ の形の漸化式は，3 つの項が関係し，3 項間漸化式と呼ばれます．ここでは

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (p, q \text{ は定数})$$

のタイプのを議論しましょう． $q = 0$ のときは 2 項間漸化式になるので $q \neq 0$ とします．また，フィボナッチ数列との関係から，初項を a_0 としましょう．

既に見たように，このタイプのは，定数 α, β を導入して，等比数列化して解くことができます：

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n .$$

$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とおくと，等比数列の漸化式 $b_{n+1} = \beta b_n$ になっていますね．元の漸化式と比較して，

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q$$

が得られます．ここで， α, β を解とする方程式 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ を考えると，上式よりそれらを決定する方程式

$$x^2 = px + q \quad (x = \alpha, \beta) \quad (\text{特性方程式})$$

が得られます．この方程式は，形式的には，元の漸化式で a_{n+2} , a_{n+1} , a_n をそれぞれ x^2 , x , 1 で置き換えると得られますね．

$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とおいて漸化式 $b_{n+1} = \beta b_n$ を解くと

$$b_n = b_0 \beta^n \Leftrightarrow a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0) \beta^n \quad (n \geq 0) \quad (\text{A})$$

が得られます．ただし，これではまだ a_n が n の式では表されていませんね．そのためには，漸化式 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ が

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

とも表されることを使います． $c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ とおくと，同様に

$$c_n = c_0 \alpha^n \Leftrightarrow a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0) \alpha^n \quad (n \geq 0) \quad (\text{B})$$

が得られます．

2 式 (A), (B) の差をとると

$$-(\alpha - \beta)a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n - (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \quad (n \geq 0)$$

のように，不要な a_{n+1} が消えます．これから， $\alpha \neq \beta$ のときは， a_0 , a_1 を与えると，一般項 a_n が n の式として表され，漸化式が解けたことになります．

$\alpha = \beta$ のときは，(A) または (B) より

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0) \alpha^n \quad (n \geq 0)$$

となりますね．よって， $\alpha \neq 0$ なら両辺を α^n で割ることができて

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^n} - \frac{a_n}{\alpha^{n-1}} = (a_1 - \alpha a_0) \quad (n \geq 0)$$

が得られます．条件 $\alpha \neq 0$ は， $q \neq 0$ としていたので，関係式 $\alpha\beta = -q$ と $\alpha = \beta$ より保証されます．ここで， $d_n = \frac{a_n}{\alpha^{n-1}}$ とおくと，上の漸化式は等差数列の漸化式

$$d_{n+1} - d_n = (a_1 - \alpha a_0) \quad (n \geq 0)$$

になります．よって，

$$d_n = d_0 + (a_1 - \alpha a_0)n \Leftrightarrow \frac{a_n}{\alpha^{n-1}} = \frac{a_0}{\alpha^{-1}} + (a_1 - \alpha a_0)n \quad (n \geq 0)$$

が得られます．これで事実上解けましたね．

ここで、練習問題です．漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を解け．ただし、初項を a_1 として $a_1 = 2, a_2 = 5$ とする．ヒント：初項が a_0 でないので、単に公式に当てはめてもだめです．自分で公式を作る気持ちでやりましょう．答は一般項が $a_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$ ($n \geq 1$) ですね．

§ 11.4 数学的帰納法

11.4.1 帰納法の原理

2 項間漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad (a_1 = 1)$$

を解いてみましょう．うまい方法は後で行うことにして、ここでは一般項を泥臭い方法で予測して、それを正当化することを考えましょう．

$a_1 = 1$ と漸化式から、 $a_2 = \frac{1}{2}$ と決まり、それを漸化式に代入すると a_3 が求まり、 \dots とやっていくと、数列 $\{a_n\}$ が

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

となりますね．よって、一般項は

$$P(n): a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{命題})$$

と推測されますね．この等式は真か偽のどちらかであるので、一般項 a_n についての命題 $P(n)$ といきましょう．

さて、この命題 $P(n): a_n = \frac{1}{n}$ が全ての自然数 n に対して正しいことを証明しなくてはなりません．上の作業では $n = 5$ までは a_n を正しく求めています．その作業を単にそのまま続けていっても $n = 100$ までは続かないでしょう．たとえ $n = 1000$ まで a_n を求めたとしても証明にはなりません．

証明するためには、任意の自然数を代入できる、文字を用いる必要があります．例えば、文字 k を用いると、 $n = k$ のとき、漸化式 $a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 1}$ と推測の式 $a_k = \frac{1}{k}$ から

$$a_k = \frac{1}{k} \text{ が真ならば } a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \text{ も真である} \quad (\text{A})$$

ことが示されます（各自確認しましょう）。これが証明に必要な本質部分であり、上の論理関係 (A) は全ての自然数 k に対して成り立ちます。つまり、論理記号 \Rightarrow を用いてそれらをコンパクトに（簡潔に）書き下すと

$$a_1 = \frac{1}{1} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \cdots \quad (\text{B})$$

のように表され、論理の連鎖関係が得られます。

よって、証明を完成させるために必要なことは

$$P(1): a_1 = \frac{1}{1} \text{ が真であることを示す}$$

ことです。これは、初項が $a_1 = 1$ と与えられているので自明ですね。

このような証明方法、つまり、命題 $P(1)$ が真であることと論理関係 (A) を示すことによって、論理の連鎖関係 (B) から、全ての自然数 n について $P(n)$ が次々に真であることを示す方法は数学的帰納法と呼ばれています。この証明方法は、将棋倒しで、駒が次々と倒れていく様子に喩えることができます。つまり、駒を隣り合わせて立てることを論理関係 (A)、つまり論理の連鎖関係 (B) に対応させ、始めの駒を倒すことを $P(1)$ が真であることを示すことに対応させることができます。

厳密にいうと、数学では論理の出発点となる基本仮定は全て公理ということにするので、我々には自明に見える数学的帰納法の原理は、第 1 章で議論した対称律・推移律、および背理法の原理である排中律と並ぶ公理に当たります。

この問題の解答の書き方を述べておきましょう：一般項を $a_n = \frac{1}{n}$ と推測します。 $n = 1$ のとき、 $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$ ですから推測は真ですね。 $n = k$ ($k \geq 1$) のとき、 $a_k = \frac{1}{k}$ とすると、漸化式より $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$ が成立します。よって、 $n = k$ のとき推測が真であれば $n = k+1$ のときも推測は真です。したがって、数学的帰納法により、全ての自然数 n に対して $a_n = \frac{1}{n}$ が成立します。

ここで練習として、第 10 章複素数のところで学んだド・モアブルの定理を帰納法で厳密に証明することを宿題としておきましょう。

最後に、漸化式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ($a_1 = 1$) を帰納法を用いないで解いてみましょう。 a_n が分子・分母の両方にあるから複雑になっていますね。分子の a_n

を消しましょう． $a_n > 0$ ($n \geq 1$) は明らかなので，分子・分母を a_n で割ると

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

となりますね．この式をじっとにらむと，両辺の逆数をとればよいことがわかりますね：

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n} .$$

つまり， $\frac{1}{a_n}$ を b_n などおくと，等差数列の漸化式 $b_{n+1} = b_n + 1$ ($b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$) が得られますね．これを解いて $b_n = b_1 + (n-1) = n$ ．よって，帰納法と同じ結果 $a_n = \frac{1}{n}$ が得られます．

分数漸化式で分子の定数項がないタイプのもの

$$a_{n+1} = \frac{p a_n + 0}{r a_n + s}$$

は両辺の逆数をとって $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおけば，既に議論したタイプの漸化式になります．

11.4.2 不等式の証明

11.4.2.1 例題

帰納法でなければ解けない問題もあり，その代表格が不等式の問題です．1 題やっておきましょう． n を任意の自然数とするとき，不等式

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

を証明せよ．^{てごわ}手強そうですね．

この命題を $P(n)$ とし，左辺を $S(n)$ とおきましょう． $n = 1$ のとき， $P(1)$: $1 < 2\sqrt{1}$ となるが，これは明らかに成立します． $n = k$ ($k \geq 1$) のとき $P(k)$ が成立すると仮定します：

$$P(k) : S(k) = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} .$$

本題はここからです．頭の中で，成立すると仮定した命題 $P(k)$ と証明すべき命題

$$P(k+1): S(k+1) = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$$

を意識しながら進めます． $P(k)$ が成立するとき

$$S(k+1) = S(k) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

となりますが，これは項の数を少なくする重要なステップです．したがって

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \quad (*)$$

を示せばできあがりです．

普通の解答では，この不等式 (*) を証明するのに，「右辺 - 左辺」を考えてそれが正であることを導きますが，かなり巧妙な式変形の技術が^いります．ここでは不等式 (*) を，^{同値変形}によって自明な不等式に導きましょう．分母 (> 0) を払うことから始めて，両辺が正であることから，「 $x^2 < y^2 \Leftrightarrow |x| < |y|$ 」を利用して，両辺を 2 乗します：

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)} + 1 < 2(k+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)} < 2k+1 \\ &\Leftrightarrow 4k(k+1) < 4k^2 + 4k + 1, \quad k > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1, \quad k > 0. \end{aligned}$$

よって，(*) は成立します．

この式変形では同値記号 \Leftrightarrow の代わりに「よって」の記号 \Rightarrow などを用いてはいけません．そのために 2 乗したときに，元に戻せるように，「 $k > 0$ 」をつけ加えたわけです．よって，「 $0 < 1, \quad k > 0$ 」から (*) を導くことができます．また，いったん「 $0 < 1$ 」を導いておいて，それから式変形を逆にたどって (*) を導き直すような解答にする場合には，「よって」で^{つな}ぎいでいて構いません．

(*) が成立するので $P(k)$ ($k \geq 1$) が成立するとき $P(k+1): S(k+1) < 2\sqrt{k+1}$ も成立します．よって，数学的帰納法により，全ての自然数 n に対して

$$P(n): 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

は成立します．

11.4.2.2 二項係数・二項不等式

$(x+y)^n$ の展開式を一般の n に対してきれいに表すことができます．その表式は「二項定理」と呼ばれ、その展開係数を二項係数といいます．その導出は組合せの議論を用いて行うのが^{ふさわ}相応しいのですが、この章と微分の章で必要になるので、数学的帰納法を用いてここでとりあえず導いておきます．

2 次・3 次の場合は、 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 、 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ のように展開されることはよく知っていますね．これらの展開係数をスッキリと表すことを考えましょう．

n が任意の自然数のとき、展開式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} y^k = {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} y + \cdots + {}_n C_n y^n$$

によって二項係数 ${}_n C_k$ を定めると、それは

$${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

のように表されることが知られています．ただし、 n の階乗 $n!$ は、 n が自然数のとき $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ と定義されます．

$n!$ は（大学で習う）ある複素変数の関数の特別な場合、つまりその変数が自然数になった場合、とも見なすこともできます．ここではその関数から得られる結果に従って、 $n!$ を n が 0 および負の整数の場合に拡張して定めておきましょう⁴⁾： $0! = 1$ 、 $\frac{1}{n!} = 0$ ($n = -1, -2, -3, \dots$)．この拡張によって、望ましい結果 ${}_n C_0 = {}_n C_n = 1$ ($n \geq 0$)、および、 $k < 0$ または $k > n$ のとき ${}_n C_k = 0$ が自動的に得られます（確かめましょう）．

さて、帰納法によって、 ${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ が全ての自然数に対して成立することを示しましょう． $(x+y)^1 = {}_1 C_0 x + {}_1 C_1 y = x + y$ は明らかに成り立ちますね（2 乗・3 乗のときも確かめておきましょう）．

次に、 $(x+y)^{n-1}$ ($n \geq 2$) のときに成り立つと仮定する、つまり

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k x^{n-1-k} y^k$$

⁴⁾ その非常に興味ある関数については積分の章で議論します．

において,

$${}_{n-1}C_k = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

と仮定したとき, ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ が導かれることを示しましょう.

$(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y)$ なので

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k x^{n-1-k} y^k \right) (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k x^{n-1-k} y^{k+1}. \end{aligned}$$

ここで, 上式の第2項で $k+1=l$ とおくと, $0 \leq k \leq n-1$ より $1 \leq l \leq n$ だから,

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k x^{n-k} y^k + \sum_{l=1}^n {}_{n-1}C_{l-1} x^{n-l} y^l \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^n {}_{n-1}C_{k-1} x^{n-k} y^k. \end{aligned}$$

ここで, 上式を1つの Σ でまとめるために, ${}_{n-1}C_n = 0$, ${}_{n-1}C_{-1} = 0$ を利用すると,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n ({}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}) x^{n-k} y^k$$

と整理できます.

よって, ${}_nC_k$ の定義によって

$${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$$

となりますから, 成り立つと仮定した式 ${}_{n-1}C_k = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$ を用いて計算すると, $k! = (k-1)!k$ などに注意して

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \{(n-k) + k\}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

が得られます。

したがって、 $(x+y)^{n-1}$ のとき成り立つと仮定すると $(x+y)^n$ のときも成り立つので、数学的帰納法によって証明されました。

次に、 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} y^k$ から、不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2 \quad (n \geq 2, h > 0)$$

を導きましょう。これをこのテキストでは「二項不等式」といしましょう。

${}_n C_k > 0$ ですから、 $(1+h)^n$ で $h > 0$ のとき

$$\begin{aligned} (1+h)^n &\geq {}_n C_0 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2 \\ &= 1 + nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2 \end{aligned}$$

と、簡単に得られますね。

§11.5 数列・級数の極限

ようやく数列の最重要領域に立ちってきました。ニュートンやライブニッツに始まる近代数学は“極限に真正面から立ち向かう”学問でした。‘正しい極限操作を行うこと’は実数や関数の連続性を厳密に議論するために必須です。君たちは $0.999999 \dots = 1$ が当たり前と思いますか？

11.5.1 無限数列の極限

項が限りなく続く数列を無限数列といいましたね。無限数列 $\{a_n\}$ において、 n が限りなく大きくなっていくときの状態を、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限といいます。用語「極限」はもう既に使っていて、 $\{a_n\}$ の極限を‘ a_∞ ’などと表しました。しかしながら、 a_∞ それ自身は、 ∞ になったり、値が定まらない場合があるなど、きちんと定義されたものではありません。無限に関わりをもつ極限の議論はかなりデリケートであり、慎重に扱う必要があります。極限を考えると‘ n が有限であるきちんと定義された一般項 a_n から始めた議論のみが信用できる’のです。

‘ n が限りなく大きくなるとき、 a_n が有限なある一定の値 α に限りなく近づいていくならば、無限数列 $\{a_n\}$ は極限值 α に収束する’ といい、このことを

$$n \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \rightarrow \alpha,$$

$$\text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

などと表します。lim は limit (極限) を表す記号です。

例えば、 $a_n = 1 + 2^{-n}$ については、 $n \rightarrow \infty$ のとき a_n は極限值 1 に限りなく近づくので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ と表され、また数列 $\{a_n\}$ は 1 に収束するといわれます。なお、 $a_n = c$ (定数) のときにも表現「 $a_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$)」は使われ、また $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の簡略表現 $a_\infty = \alpha$ はよく用いられます。

数列の一般的な議論に備えて、‘ a_n が α に限りなく近づく’ とは、もう少し明確に、‘ a_n と α の差の大きさが限りなく 0 に近づく’ ということ、つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow |a_n - \alpha| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

と定めておきましょう。いずれ問題になるのは‘限りなく近づく’ というこの意味です。

無限数列 $\{a_n\}$ が収束しないときは、(ア) a_n の値が限りなく大きくなっていく、(イ) a_n が負で $|a_n|$ が限りなく大きくなっていく、(ウ) 大きくなったり小さくなったりを繰り返す、振動するなどの場合があります。その全ての場合に発散するといいい、それぞれ

$$(ア) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (\text{数列 } \{a_n\} \text{ は正の無限大に発散する})$$

$$(イ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (\text{数列 } \{a_n\} \text{ は負の無限大に発散する})$$

$$(ウ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ は存在しない} \quad (\text{数列 } \{a_n\} \text{ は振動する})$$

と表すこともあります。

無限大 ∞ は数でないので、表現 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ は‘ a_n が際限なく大きくなっていく状態を表している’ことに注意しましょう。(ウ) の振動する場合の代表例は $a_n = (-1)^n$ です。‘ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は n の偶数・奇数によらずに定数に近づくかどうかを問うている’ことに注意しましょう。

11.5.2 極限計算の例

極限の計算はかなり微妙です．しっかり練習しておきましょう．

11.5.2.1 基本例題

まずはいわゆる $\frac{\infty}{\infty}$ の形のものから：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{5}{n}} = \frac{2+0}{4-0} = \frac{1}{2} .$$

極限計算をするときには，分子・分母共に ∞ に近づく形を避けて， $\frac{\text{有限}}{\text{有限}}$ の形に直して計算します．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4n^2-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{5}{n}} = \frac{0+0}{4-0} = 0$$

のように，分母が 0 に近づかなければ分子は 0 に近づいても構いません．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{4n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{4 - \frac{5}{n}} = \infty$$

のように ∞ に近づく因数が避けられない場合，その因数は 1 個にするのがわかりやすいでしょう．

次に，いわゆる $\infty - \infty$ の形です：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1 .$$

分子から根号を外す，いわゆる「分子有理化」を行います．

11.5.2.2 無限等比数列

$a_n = r^n$ (r は実数) のとき， $r > 0$ ， $r \neq 1$ の場合は指数関数 r^x で定義域を自然数にしたものを考えればよいでしょう． $r = 1$ のときは $a_n = 1$ ですね．

$-1 < r \leq 0$ のときは $|r^n| = |r|^n < 1$ です。 $r = -1$ のときは $a_n = (-1)^n$ です。
 $r < -1$ のときは $|r| > 1$ で、 a_n の符号は交互に変わります。これらから

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty,$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1,$$

$$|r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0,$$

$$r \leq -1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \text{ は振動する (発散する)}$$

となることがわかります。

簡単な例題は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

です。 3^n も 2^n も無限大に発散しますが、大きくなるスピードは 3^n のほうがずっと速いことに注意しましょう。

11.5.2.3 重要な例題

4つの例題をとり上げます。1つ目は $\infty \times 0$ の形の定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0 \quad (|x| < 1)$$

です。これは初等的な証明が難しいことで知られており、先に §§ 11.4.2.2 で学んだ二項不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2 \quad (h > 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots)$$

を用います。与式に同値な $|nx^n - 0| = n|x|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ を示します。
 $|x| < 1$ より、 $|x| = \frac{1}{1+h}$ ($h > 0$) とおけるので、二項不等式より得られる不等式

$$(1+h)^n > \frac{1}{2}n(n-1)h^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{2}{n(n-1)h^2}$$

を用いると

$$(0 <) n|x|^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2n}{n(n-1)h^2} = \frac{\frac{2}{n}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)h^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となります。これは $n|x|^n$ が 0 と $\frac{2}{(n-1)h^2}$ に ‘挟まれ’、しかも $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{2}{(n-1)h^2}$ が限りなく 0 に近づいていくという状況です。こんなときには $n|x|^n$ は 0 に押しやられてしまいますね： $n|x|^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

このことは「はさみうちの原理」と呼ばれる重要かつ頻繁に用いられる定理で、高校数学の範囲内では証明ができないので‘原理’とされています。その定理の証明には極限に関する深い内容が潜んでいるので、次の §§ で議論しましょう。

なお、二項定理から得られるより強力な不等式を用いると、任意の自然数 p に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p x^n = 0$ ($|x| < 1$) を示すことができます。我と思わん方は挑戦してみてください。ヒント： $\frac{1}{2}n(n-1) = {}_n C_2$ は n の 2 次式です。 n の $p+1$ 次式を見つけるとうまくいきます。

次のものは指数関数 a^x が $x=0$ で連続であることを事実上示す定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 0)$$

です。関数 $f(x)$ が $x=c$ で連続とは、 x に c を単に代入した関数値 $f(c)$ と $f(x)$ の差が $x \rightarrow c$ のときいくらでも小さくなることでしたね。 $a(>0)$ によらずに上の等式が成り立つとき、 $a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) も成り立ち、よって $a^0 = 1$ ですから、 $a^x \rightarrow a^0$ ($x \rightarrow 0$) が成り立つ、つまり a^x が $x=0$ で連続なことを表していますね。

(ア) $a=1$ のときは明らかですね。(イ) $a>1$ のときは、二項不等式から得られるより簡単な不等式 $(1+h)^n > 1+nh$ ($h>0$) を用います。 $a>1$ より $\sqrt[n]{a} > 1$ だから、 $\sqrt[n]{a} = 1+h_n$ ($h_n > 0$) とおけます (h_n は h の値が n に依存することを表します)。このとき、 $a = (1+h_n)^n > 1+nh_n$ だから $0 < h_n < \frac{a-1}{n}$ が成り立ちます。よって、 $\frac{a-1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) だから、0 と $\frac{a-1}{n}$ に挟まれた h_n は、はさみうちの原理によって極限值 0 をもちます。よって、 $\sqrt[n]{a} = 1+h_n$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

が成り立ちます。

(ウ) $0 < a < 1$ のときは $\frac{1}{a} > 1$ だから, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 + h_n$ とおくと, (イ) の場合と同様にして, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), つまり $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) が得られます。

3 題目は ∞^0 の形の

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = 1$$

です。これは練習問題にしておきましょう。ヒント: $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ とおくと, $n = (1 + h_n)^n$ 。二項不等式を用いて上の例を参考にしながらやってみましょう。なお, ∞^0 の形のものが必ずしも 1 になるとは限りません。注意しましょう。

最後の例は君たちの誰もが一瞬ハテナ? と疑問に思う無限小数の問題

$$0.9999 \dots = 0.\dot{9} = 1 ?$$

です。おかしいと思う理由は 9 が限りなく並んでいる表式の意味がつかめないためです。「0.9999...」の意味は理解している”などと思っては決してなりません。まず, 問題の意味を明確にするために極限として 0.9999... となる数列 $\{a_n\}$ を考えましょう。我々は「有限なものはよく理解している」ので

$$a_n = 1 - \frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ 個}} \quad (n \geq 1)$$

から出発すればよいですね。よって問題の正しい立て方は

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } 0.\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ 個}} = 1 - \frac{1}{10^n} \rightarrow 1 ?$$

です。よって, この問題は「0. 以下の小数位に 9 を並べて得られる数列を考えると, それは 1 に向かって限りなく近づいていくか」と問うています。1 はこの数列の極限值, つまり「向かう先」を表すのであって, 9 を無限個並べ終えたときに得られる数は 1 に等しいという意味ではありません(数学は「無限回の操作をなし終える」などとは決して企てません)。よって, 無限小数 0.9999... の正しい表式は

$$0.9999\cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

です．このように捉えると明らかですね．答はもちろんイエスです．

よって，無限小数 $0.9999\cdots$ は極限値の意味で 1 つの実数を定め，その数が自然数 1 に等しいわけです．同様に無限小数 $1.000\cdots$ は 1 つの実数を定め，それも 1 です．つまり，自然数 1 の無限小数表示はただ 1 通りでないというだけのことです．他の自然数や有理数でも同様です．これで納得がいきますね．重要なことは ‘ある無限小数はただ 1 つの実数を定める’ というこゝで，これによって実数の連続性が保証されています．

11.5.2.4 極限の基本定理

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とします．このとき，和差積商などの極限について，次の基本定理が成り立ちます：

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \alpha$ (k は定数)，
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta$ ，
- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$ ，
- (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)．

どれも自明に思えるもので，これまでの議論で既に事実上使っていますが，非常に大切な定理です．以下の証明は，完全に厳密とはいえませんが，高校数学では十分でしょう．

(A) については， k が有限なので

$$|k a_n - k \alpha| = |k(a_n - \alpha)| \rightarrow |k(\alpha - \alpha)| = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha .$$

(B) についても同様に，

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| = |(a_n - \alpha) \pm (b_n - \beta)| \rightarrow |0 \pm 0| = 0 \quad (n \rightarrow \infty) .$$

(C) については, b_n, α が有限なので

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |(a_n - \alpha) b_n + \alpha (b_n - \beta)| \rightarrow |0 + 0| = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となって成立します.

(D) についても

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_n \beta - \alpha b_n}{b_n \beta} = \frac{(a_n - \alpha) \beta - \alpha (b_n - \beta)}{b_n \beta}$$

と変形すれば, 同様に示すことができます.

これらの定理を用いると, §§ 6.1.1 で議論した指数法則が実数の指数に対して成り立つことがわかります. 実数 p, q に収束する有理数の数列をそれぞれ $\{p_n\}, \{q_n\}$ とすると, 全ての自然数 n に対して

$$a^{p_n} a^{q_n} = a^{p_n + q_n}, \quad (ab)^{p_n} = a^{p_n} b^{p_n}, \quad (a^{p_n})^{q_n} = a^{p_n q_n}$$

が成り立つことまでは示されています. そこで, 極限の定理 (C), (B) より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n + q_n} \Leftrightarrow a^p a^q = a^{p+q}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{p_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b^{p_n} \Leftrightarrow (ab)^p = a^p b^p \end{aligned}$$

が得られます. ただし, $(a^p)^q = a^{pq}$ を示すには, 指数関数の連続性を用いるので, それは微分の章で行いましょう.

11.5.3 極限に関する定理

11.5.3.1 収束の厳密な定義とはさみうちの原理

はさみうちの原理は特殊な場合には既に用立てました. はさみうちの原理の一般的な形は以下の表現です:

3つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ があり, それらの一般項について,
 $b_n \leq a_n \leq c_n$ のとき,

$$b_n \rightarrow \alpha \text{ かつ } c_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

イメージ的には $n = \infty$ で $\alpha \leq a_\infty \leq \alpha$ ですから、成り立つのは当然ですが、極限の問題、つまり無限の問題の微妙さと、証明されない命題は公理とせざるを得ない数学の立場から、この原理を放置しておくわけにはいきません。以下、理論武装をしっかりとしてからこの原理を証明しましょう。

数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを、 n が限りなく大きくなる時 a_n は α に ‘限りなく近づく’ といいましたね。この ‘限りなく近づく’ ことをきちんとするにはどうすればよいでしょうか。極限の議論をする以前に用いられていた数学用語で述べるのは簡単ではありませんね。今から行う議論では、‘限りなく近づく’ という言い方をやめて、全て有限の範囲で議論し、収束することを不等式を用いて表すことを試みます。

「 $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$)」を有限の n の範囲で何とか表そうとすれば、「十分大きな n に対して近似 $a_n \doteq \alpha$ が成り立ち、 n を大きくすればするほどその近似をいくらでも上げることができる」という言い方ができますね。これがヒントです。このことは、不十分ながら、不等式を用いて次のように表すことができます：

十分大きな番号 n_ε をとると、 n_ε に応じて十分小さい正数 ε があり、
 $n > n_\varepsilon$ である全ての n に対して、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ とすることができる。

感覚的にはこれで ^{うなず}肯けると思いますが。不十分な点は、‘ ε がいくらでも小さくなることの保証がない’ ことです。この点を改良して、 ε のほうを先に定めておいて、番号 n_ε を後から決めるようにしたのが次の表現です：

任意に (小さな) 正数 ε を定めたとき、それに対応して
 (十分に大きな) 番号 n_ε を選ぶことができ、
 $n > n_\varepsilon$ である全ての n に対して、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき、この ε の値は、いくらでも 0 に近い正数 (例えば、 $\frac{1}{\text{千兆}}$) にとることができ、感覚的には ‘限りなく 0 に近い正数’ と見なしで構いません。この表現が現代数学における数列の収束の厳密な定義である、つまり「 $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$)」が意味することと定めます。以後、以上のことを簡潔に

$$a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow \text{全ての } n > n_\varepsilon \text{ に対して } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

と表すことにしましょう。

準備ができたところで、はさみうちの原理

$$b_n \leq a_n \leq c_n \text{ のとき, } b_n \rightarrow \alpha \text{ かつ } c_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

を証明しましょう。以下、簡単のために、紛れがないときは $n \rightarrow \infty$ を省略します。

収束の新たな定義を用いると、(0 にいくらでも近くとれる) 正数 ε を定めたとき、番号 n_ε をうまく選んで、

$$b_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \text{全ての } n > n_\varepsilon \text{ に対して } |b_n - \alpha| < \varepsilon \quad (\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon),$$

$$\text{かつ } c_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \text{全ての } n > n_\varepsilon \text{ に対して } |c_n - \alpha| < \varepsilon \quad (\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon)$$

と表すことができますね。ここで、 $b_n \leq a_n \leq c_n$ だから

$$\alpha - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$$

が成り立ち、よって

$$\text{全ての } n > n_\varepsilon \text{ に対して } \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つので、あっという間に証明されました。

ついでに、2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が関連する定理

$$a_n < b_n \quad (n > n_0) \text{ のとき } a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

も証明しておきましょう ($a_n \leq b_n$ としても成立します)。有限の n のとき $a_n < b_n$ なのに $a_\infty = b_\infty$ の場合があり、しかし $a_\infty > b_\infty$ はないということです。等号が成立する簡単な例は $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ などです。

$$a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta \text{ より}$$

$$\text{全ての } n > n_\varepsilon \text{ に対して } \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon, \quad \beta - \varepsilon < b_n < \beta + \varepsilon$$

が成り立ちます。ここで ε を十分に小さくとると $n_0 < n_\varepsilon$ とできて、 $a_n < b_n$ が成り立ち

$$\alpha - \varepsilon < \beta + \varepsilon \Leftrightarrow \alpha - \beta < 2\varepsilon$$

が得られます． ε はいくらでも 0 に近くとれるので

$$\alpha - \beta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$$

が成立します．実際，もし仮に $\alpha > \beta$ とすると $0 < \alpha - \beta$ ですが， ε はいくらでも小さい正数にとれるので，

$$0 < 2\varepsilon < \alpha - \beta$$

が成り立ちます．よって， $\alpha - \beta < 2\varepsilon$ および $2\varepsilon < \alpha - \beta$ より

$$\alpha - \beta < \alpha - \beta \Leftrightarrow 0 < 0$$

となって矛盾するので， $\alpha > \beta$ となることはありません．よって， $\alpha \leq \beta$ です．

11.5.3.2 収束の基本定理

数列 $\{a_n\}$ が収束するための条件を考えましょう．例として， $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ を考えると，この数列は

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

となるので，各項は単調に増加していきます．このような数列を単調増加数列といいます．またこの数列は

$$\text{全ての } n \text{ について } a_n \leq M \quad (M \text{ は } 1 \text{ 以上の任意の定数})$$

を満たしますね．このように数列の全ての項がある定数 M 以下のとき，その数列は上に有界であるといわれ， M をその数列の 1 つの上界といいます（界は限界の意味です）．

数列の収束に関する基本定理の 1 つは

上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する

というもので，直感的には明らかでしょう．全ての n について $a_n < a_{n+1}$ ， $a_n \leq M$ とすると，まず気づくのは，隣り合う項が限りなく近づいていく必要があることです：

$$a_{n+1} - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

もし、そうでないとすると、全ての n に対して $a_{n+1} - a_n > e$ を満たす正数 e が存在します。よって

$$a_2 - a_1 > e, \quad a_3 - a_2 > e, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} > e$$

より

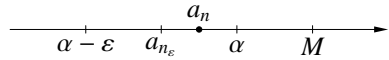
$$a_n - a_1 > e(n-1)$$

が成り立ち、右辺は n と共にいくらでも大きくなるので、 $a_n > M$ となる a_n が存在することになりますね。よって、 $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) です。これは直ちにわかるように

$$a_m - a_n \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

と同じことですね。

次に、上限と呼ばれる「最小の上界」を考えましょう。今の場合、この上限を α とすると、それが a_n の極限值になります。



$a_m - a_n \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) が成り立つので、次の 2 条件を満たす実数 α が存在し、それが数列 $\{a_n\}$ の上限になります：

(1°) 全ての n について $a_n \leq \alpha$.

(2°) 正数 ε を任意に定めるとき、 $\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$ となる項 a_{n_ε} がある .

条件 (2°) は α より小さい上界がないことを保証しています。よって、数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列なので、任意に (小さな) 正数 ε を定めると、全ての $n > n_\varepsilon$ について、 $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$ が成り立ちます。正数 ε はいくらでも小さくできるので、はさみうちの原理によって、 a_n の極限值は α です。よって、上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は α に収束します。

全ての n について $a_n > a_{n+1}$ となる数列 $\{a_n\}$ を単調減少数列といい、全ての n について $a_n \geq M$ となる定数 M があるとき数列 $\{a_n\}$ は下に有界 といいます。「下に有界な単調減少数列は収束する」ことを示すのは君たちの宿題にしましょう。単調に増加または減少する数列を単調数列 といいます。また、上にも下にも有界なとき、単に 有界 といいます。以上の議論から、数列の収束に関する基本定理：

有界な単調数列は収束する

が成り立ちますね。

11.5.4 級数の極限

11.5.4.1 無限級数

§§ 11.1.1 で述べたように、数列の各項を順に加えていったものを級数といいます。数列 $\{a_n\}$ が無限数列のときは、その級数 S は (初項を a_1 として)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

のように表され、無限級数 といひます。

実は、上の表現は無限大 ∞ が直に現れるので、無限級数の厳密な定義とはいえず、簡略表現と見なされます。厳密な定義は、まず第 n 項までの部分

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を用意しておいて、新たに無限数列 $\{S_n\}$ を考え、その極限

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

が有限な一定値に収束するならば、これを無限級数の和 S と定めるものです。無限級数が収束しないときは発散するといひます。

例えば、 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ($n \geq 1$) のとき

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

無限級数についての基本定理は §§ 11.5.2.4 の極限に関する基本定理 (A), (B) に類似なものです：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \text{ が収束して、その和を } A, B \text{ とすると、}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = k A \quad (k \text{ は定数}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B.$$

証明は、 $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ とすると、基本定理 (A) より

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} k A_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = k A .$$

他のものも同様に示されるので確かめましょう。

無限級数についての 1 つの注意は ‘加える項の順序を変えてはいけない’ ことです。たとえその無限級数が収束するときでも、加える順序を変えると、一般に、級数の和の値が変わることが知られています。このことについては § 11.7.1 で議論します。

11.5.4.2 無限等比級数

無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ ($n \geq 1$) の無限級数 S を考えましょう。部分和は

$$S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ an & (r = 1) \end{cases}$$

です。ここで、 $r \neq 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (|r| > 1, \text{ または } r = -1) \end{cases}$$

ですから、 $a \neq 0$ のとき

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1) \end{cases}$$

となりますね。

では、ここで練習問題です。無限級数を用いて $0.9999\cdots = 1$ であることを示せ。ヒント：

$$0.9999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots$$

ですから、

$$0.9999\cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k}$$

となりますね。部分和の計算でミスをしなれば 1 になります。

§11.6 ゼノンのパラドックスと極限

紀元前 5 世紀のギリシャの哲学者ゼノン (Zenon, 前 490 頃 ~ 429 頃) が考案したパラドックス (逆理, 背理) 「アキレスは亀に追いつけない」のことはよく知っていますね。彼はまた「飛んでいる矢は実は止まっている」とも主張しました。事実は、もちろん違いますね。しかしながら彼は単なるソフィスト (詭弁家) などではなく、曖昧でない首尾一貫した運動理論を構築することがいかに難しいかを指摘したのです。

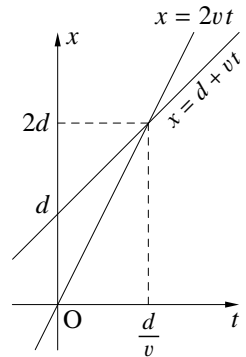
当時のピタゴラス派の数学者は自然数とそれらの比 (分数) のみを考え、無理数の存在をひた隠しにしたぐらいですから、数の連続性を議論できるわけもなく、ましてや、時間が連続的に流れることを数によって表現することは困難でした。論理を重視するギリシャ人は仕方なく幾何学に傾斜していき、‘動かないもの’を研究対象にしたのです。無限操作と真っ正面から向き合うことがいかに難しいことであったかは、その後 2000 年も経た 17 世紀後半になってから、ニュートンが速度を初めて正しく定義したことを思い起こすと納得できるでしょう。

11.6.1 アキレスと亀

正確を期すために、用語 ‘時刻’ と ‘時間’ を区別して用いましょう。時間は 2 つの時刻の間の意味で使います。時刻 0 でアキレスと亀は、それぞれ $x = 0$ と $x = d (> 0)$ の位置から走り出し、速度は一定として、亀の速度は $v (> 0)$ 、アキレスは (簡単のために) $2v$ としましょう (速度の厳密な定義は微分の章で議論します)。すると、任意の時刻 $t (\geq 0)$ でのアキレスと亀の位置 $x(t)_ア$, $x(t)_亀$ は

$$x(t)_ア = 2vt, \quad x(t)_亀 = d + vt$$

と表されます。これから直ちにアキレスが亀に追いつく時刻は $t = \frac{d}{v}$ 、位置は $x = 2d$ となりますね。現在ではこれほど簡単な問題なのです。ゼノンの時代



には ‘位置を時刻の関数として表す’ 考えはありませんでした。

ところがどっこい、ゼノンは問題を別な形で提起しました。アキレスが亀の位置 d まで進んだとき、アキレスの半分の速度の亀は $\frac{d}{2}$ だけ先の位置にいる、アキレスがそこに着いたときには亀はさらに $\frac{d}{2^2}$ だけ進み、そこにいくとさらに $\frac{d}{2^3}$ だけ先に亀はいる。よって、このことをいくら繰り返しても、アキレスは亀に “いつまで経っても追いつけない” というわけです。

いつまで経っても追いつけないかどうか、つまり ‘それらの時間の和が無限になるかどうか’ 計算してみましょう。アキレスが d だけ進むのにかかる時間は $\frac{d}{2v}$ 、 $\frac{d}{2}$ だけ進むのに $\frac{d}{2^2v}$ 、 $\frac{d}{2^2}$ には $\frac{d}{2^3v}$ 、 \dots 。よって、これらの時間の和 T が有限であれば追いつけることになります。

$$T = \frac{d}{2v} + \frac{d}{2^2v} + \dots + \frac{d}{2^n v} + \dots$$

より

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{v} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{v} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{d}{v}$$

が得られます。よって、先に行った初等計算に一致する有限の値になりましたね。

このような無限等比級数の和の問題に当時の数学者が既にとり組んでいたとの記録もありますが、数を無限個加えたときにその和が有限になる場合があるとはまだ思いつかなかったようです。ゼノンにこの結果を突きつけたらギャフンというでしょうか。

11.6.2 飛んでいる矢は止まっている

ゼノンはさらに次のような難問を提起しました。飛んでいる矢を各時刻で考える。各時刻はそれ以上分割できない瞬間であり、各瞬間において矢は止まっている。‘時間は瞬間から成り立っている’ のだから、各瞬間で静止しているものが飛べるはずがない。どうです。一見して説得力のある議論でしょう。これでたじろいはいけません。

この難問に立ち向かうには「瞬間」、つまり時間(間隔) Δt を「限りなく」小さくしていったで得られるものについて根本から考え直す必要があります。瞬間を捕えることから始めましょう。最もわかりやすいのは写真です。シャッターの露出時間 Δt を短くしていけば瞬間にたどり着けますね。現在では露出時間 Δt を $\frac{1}{\text{百万}}$ 秒にしても鮮明な写真が撮れるものがあるそうです。ただし、露出時間が 0 でない限り必ずピンボケ(ピントが合わないためにぼけるのでなく、矢が動いているために不鮮明になること) になります。

では、露出時間 Δt を限りなく小さくしていった、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では、つまり $\Delta t = 0$ ではどうなるでしょう。その極限ではシャッターを切らないのと同じだから、フィルムは真っ黒で何も写らないことは明らかです。つまり、我々が知覚可能な瞬間というのは Δt が非常に小さいけれども 0 ではない時間間隔であって、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限としての 0 瞬間は絶対に見ることができない想像上の瞬間です。よって、我々は「知覚可能な微小瞬間」と「極限としての 0 瞬間」を区別して考え、後者の 0 瞬間を扱うときには細心の注意を払わねばなりません。

以後、前者の微小瞬間を「可能瞬間」、後者の 0 瞬間を「極限瞬間」と呼びましょう。ゼノンがいう瞬間は極限瞬間 $\Delta t = 0$ のほうです。「各瞬間において矢は止まっている」と主張しましたが、もし仮に極限瞬間を写すことができたとなれば、ピンボケはまったくなくなり「矢は止まって見える」はずです。このことは「ある時刻に矢はある位置にある」と同じです。ゼノンは、極限瞬間を想像して、「止まって見える」ことを「止まっている」といったのであって、仮に極限瞬間の写真が連続的に撮れたとなれば矢の位置は移動することがわかるでしょう。もともと「矢が止まっている」かどうかは、「異なる 2 つの時刻で矢の位置が変化したかどうか」を調べることによるのみ判別可能なのです。1 つの時刻で運動の有無をわかつてみるのはどだい無理なのです。

可能瞬間と測定不可能な極限瞬間を区別しないとどうということが起こるかを具体的な極限操作で調べてみましょう。アキレスの位置 $x(t) = 2vt$ において、時刻 $t = \frac{d}{v}$ のとき、彼は亀に追いつきました。簡単のために $v = d = 1$ とすると $x(t) = 2t$ と表され、そのとき $t = 1$ で追いつき、 $x(1) = 2$ です。

ここで時刻 $t = 0$ と $t = 1$ の間を十分に大きな自然数 n で n 等分すると、時

時間隔 $0 \leq t \leq 1$ を可能瞬間 $\Delta t_n = \frac{1}{n}$ に n 等分することができます．そのとき

$$x(1) = 2(\underbrace{\Delta t_n + \Delta t_n + \cdots + \Delta t_n}_{n \text{ 個}}) = 2\Delta t_n \times n$$

が成り立ちますね．

このとき， n を限りなく大きくしていても構わないことは

$$x(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\Delta t_n \times n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(\frac{1}{n} \times n\right) = 2$$

が成り立つことからわかります（改めて注意しておきますが， n は限りなく大きくなっていきますが， ∞ には決してなりません）．このとき， $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の極限操作を受ける可能瞬間 Δt_n は ‘いくらでも 0 に近くなるが 0 そのものではない’ 量になります．正確にいうと，可能瞬間 Δt_n ($\neq 0$) は，‘任意の（小さな）正数 ε を定めたとき，適当な n_ε が選べて，全ての $n > n_\varepsilon$ に対して $|\Delta t_n| < \varepsilon$ となる’ 量です．このような量のことを無限小の量といい，数学で扱える対象になります．つまり，無限小量としての可能瞬間 Δt_n は 0 に収束する数列の項であり，そのとき数学の対象になるわけです．

さて，可能瞬間 Δt_n を極限瞬間にすることは Δt_n を $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t_n = 0$ にすることです．それは絶対にやってはいけない誤り

$$x(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\Delta t_n \times n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} n = 0 \times \infty$$

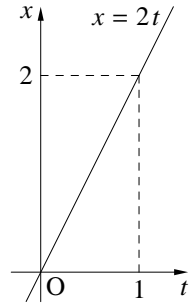
を犯すことを意味します． $0 \times \infty$ としてしまうと，その値は定まりませんね．このことは，‘極限瞬間を直接用いるような計算は無意味である’ ことを意味し，極限瞬間は数学が扱う対象にはなり得ません．したがって，微分の章で（瞬間の）速度を定義するのは無限小量としての可能瞬間を用いて実行される時にのみ可能です．我々が使いこなせる瞬間は，決して 0 になることがない，無限小としての瞬間であることを肝に銘じておきましょう．

現在ではゼノンのパラドックスは数学者・自然科学者にとってはもはや解決済みの問題と見なされ，哲学者にとっては無限をどのように認識するかの問題として残されているようです⁵⁾．

⁵⁾ 無限や極限のパラドックスに興味をもった人は，足立恒雄 著『無限のパラドクス』（講談社）を一読されることを勧めます．無限や極限の理解が深まり，歴史的背景もわかります．著者が冒頭で「数学的無限論には今やパラドクスも謎も存在しない」と先に結論を述べているのは強烈です．

11.6.3 瞬間の個数

ゼノンのパラドックスより遥かに頭をひねる難問？を紹介しましょう．アキレスの位置と時刻の関係 $x = 2t$ ($0 \leq t \leq 1$) を表す座標平面を考えましょう．横軸の区間 $[0, 1]$ には時刻または極限瞬間に対応する点が連続的に並んでいます．縦軸の区間 $[0, 2]$ にはアキレスが各々の極限瞬間に占めた位置を表す点が連続的に並びます．区間 $[0, 2]$ 上にある点の個数は区間 $[0, 1]$ 上にある点の個数の 2 倍あるでしょうか．大きさがない点の不思議な性質を覗いてみましょう．



関係 $x = 2t$ を用いて調べます．実数 t を区間 $[0, 1]$ 上で任意に 1 つ定めると区間 $[0, 2]$ 上の実数 $x = 2t$ がただ 1 つ対応し，異なる t には異なる x が対応しますね．よって，区間 $[0, 1]$ 上の点と区間 $[0, 2]$ 上の点は 1 : 1 に対応します．ということは何を意味するかというと，両区間上にある点の個数は等しいということです．そんな馬鹿な！と絶対に否定する人，ホントかな？と疑いながらも理屈は通っていると思う人，自分は正解を知っているよという人などさまざまでしょう．

同様の問題を時間軸の 2 つの区間で考えると，極限瞬間^{たち}の質の悪さがより浮かび上がってきます．対応関係 $T = 2t$ ($0 \leq t \leq 1$) を考えると，区間 $[0, 1]$ 上の点と区間 $[0, 2]$ 上の点は 1 : 1 に対応しますね．よって，両区間上にある点の個数は等しくなりますが，時間軸上の点は時刻，つまり極限瞬間を表すので， $[0, 1]$ にある極限瞬間の個数は $[0, 2]$ にある極限瞬間の個数に等しいこととなります．つまり，1 分間にある瞬間の数と 2 分間にある瞬間の数は同じだといっています．ここまでいわれたら，もう，馬鹿にするのもいい加減にしる！ですね．(ごめんしてちょ.)

このようなインチキ議論の間に，君たちはその悪の元凶に気づいたことと思います．長さが 0 でない区間に点や極限瞬間は無数にあります．2 つの区間上の点の間に 1 : 1 対応をつけたとしても，‘所詮は無限個と無限個の大小を比較している’わけです．それらが比較できるはずがないことは，無限大の性質

$2 \times \infty = \infty$ から明らかですね．極限瞬間をもち出すと必ず無限大の困難に遭遇します．以上の議論が示していることは，線分を切ると無数の点が現れる，つまり線分の要素は点である，がしかし，点を連続的に無限個並べても（長さが一定の）線分にはならない，つまり‘線分は点を並べて得られるものではない’ということです．

瞬間とは無限小の可能瞬間 Δt ($\neq 0$) のことであるとすると，瞬間の個数は時間 $[0, 1]$ では $\frac{1}{\Delta t}$ 個，時間 $[0, 2]$ では $\frac{2}{\Delta t}$ 個となって当然な結果，つまり両者とも有限で後者のほうが 2 倍多い，になりますね．

最後に，無限大には大小関係はつかないといいましたが，1:1 対応がつかない場合には無限大の‘サイズ’の違いを計ることができる理論があります．第 1 章で言及したドイツの数学者カントル (Georg Cantor, 1845 ~ 1918) は，1870 年代に，1:1 対応の概念を武器にして「無限集合論」をうち立てました．彼は無限集合の要素の個数（もちろん，無限個）に対応する量を「基数」(濃度)と呼び，基数の大小で集合の大小を比較しました．例えば，区間 $[0, 1]$ と区間 $[0, 2]$ については 1:1 対応がつくのでそれらは同じ基数の集合であるという具合です（両区間における極限瞬間の個数は基数の意味で同じです）．自然数の集合と有理数の集合も同じ基数です．しかしながら，彼は，有理数の集合と実数の集合では 1:1 対応が成り立たず，後者の基数のほうが大きいことを示しました．つまり，荒っぽくいえば，有理数より無理数のほうが‘遙かに多く’，数直線上の有理数の近所は無理数ばかりというわけです．

§11.7 無限級数の積

微分の章で指数関数や三角関数を無限級数を用いて表します．そこで必要になる無限級数の積についての議論を前もってしておきます．

11.7.1 無限級数の絶対収束

§§11.5.4.1 で，無限級数は収束する場合でも，一般に，加える項の順序を変えてはいけないことに注意しました．事実，後で示すように，項の順序を変え

ると和の値が変わる場合があります。もちろん，順序を変えて加えてもよい場合もあり，それは，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ に対して，各項をその絶対値で置き換えた無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束する場合です。そのとき，その無限級数は絶対収束するといいい，以下の定理が成り立ちます：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ が絶対収束するとき，項の順序を変えて得られる級数を } \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \text{ とすると}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a'_k = A .$$

無限数列 $\{a'_k\}$ は，例えば， $\{a_k\}$ の奇数番目の項と偶数番目の項を全て入れ替えたものを考えればイメージがわくでしょう。もちろん，項の順序は任意に変更して構いません。以下，この定理を証明しましょう。

無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束することは，すぐ後で見るとように，それが絶対収束することから自然に導かれます。

まず， $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ を示しましょう。それには，意外な方法ですが， $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ および $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ を示せばよいですね。 $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|$ において， a'_1, a'_2, \dots, a'_n は，番号 N を十分に大きくとると， a_1, a_2, \dots, a_N の中に含まれるので

$$\sum_{k=1}^n |a'_k| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \text{よって} \quad \sum_{k=1}^n |a'_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

が成り立ちます。この不等式は n によらないので， $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

が成り立ちます (§§ 11.5.3.1 のはさみうちの原理のところで示した定理： $a_n \leq b_n$ のとき， $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $\alpha \leq \beta$ において $b_n = \beta$ (定数) とした場合と考えるとよいでしょう)。同様に， $\sum_{k=1}^n a_k$ において， a_1, a_2, \dots, a_n

は番号 N' を十分に大きくとると $a'_1, a'_2, \dots, a'_{N'}$ に含まれるので

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{N'} |a'_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|, \text{ よって } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|$$

が成り立ち、したがって、両不等式から

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (*)$$

が得られます。これは、無限級数が絶対収束するときには、項の絶対値の無限級数において項を加える順序を変更しても収束値が変わらないことを意味します。

上の結果 (*) を利用して $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ を示しましょう。

$$a_k = \begin{cases} p_k & (a_k \geq 0) \\ -q_k & (a_k < 0) \end{cases}$$

とおくと ($a_k = p_k$ のとき $q_k = 0$, $a_k = -q_k$ のとき $p_k = 0$ とします), $p_k \geq 0$, $q_k \geq 0$ で, $\sum_{k=1}^n a_k$ はそれらを用いて

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n p_k - \sum_{k=1}^n q_k$$

と表されます。よって、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n p_k - \sum_{k=1}^n q_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q_k$$

と表すことができ、 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ と $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ は収束するので、 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束します。

同様に、

$$a'_k = \begin{cases} p'_k & (a'_k \geq 0) \\ -q'_k & (a'_k < 0) \end{cases}$$

とおくと、 $p'_k (\geq 0)$, $q'_k (\geq 0)$ を項とする級数は収束するので

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n p'_k - \sum_{k=1}^n q'_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p'_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q'_k$$

となります．ここで， $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p'_k$ は p_k の順序を変えて全て加えた級数，また $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q'_k$ は q_k の順序を変えて全て加えた級数です．それらは絶対収束するので (*) より加える順を元の p_k, q_k の順に戻しても収束値は変わりません：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p'_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

よって，絶対収束する無限級数は項の順序を任意に変えて加えてもよいこと：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

が示されました．

最後に，収束はするけれども絶対収束ではない無限級数についてコメントしておきましょう．そのような無限級数は条件収束するといわれ，加える項の順を変えると収束値が変わります．一例を挙げると

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots = \log 2$$

であることが知られていますが，無限級数 B の項をその絶対値で置き換えて得られる級数

$${}^u B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

は，君たちの教科書にも載っているように，発散します．

級数 B で項の順序を変更して，例えば，正の項を 2 個，負の項を 1 個ずつ交互にとって作った級数にすると

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \log 2$$

となります．一般に，級数 B で正の項を p 個，負の項を q 個ずつ交互にとって作った級数の和は $\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$ であることが知られています．

何故このようなことになるかを直感的に理解するには，‘加える項の先取りと後回しが果てしなく続く’と考えれば不思議ではなくなるでしょう．任意の

条件収束級数に対して，原理的には，項の順序をうまく変えると望みの値に収束させることもできることが証明されています．

11.7.2 無限級数の積

絶対収束する無限級数は加える項の順を任意に変えてよいことを利用し，無限級数の積を考えましょう．条件収束する無限級数に対しては以下の議論は成り立ちません．

絶対収束する2つの無限級数を $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $B = \sum_{l=1}^{\infty} b_l$ としましょう．それらの第 n 項までの和を $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{l=1}^n b_l$, 項の絶対値の和を $\|A_n\| = \sum_{k=1}^n |a_k|$, $\|B_n\| = \sum_{l=1}^n |b_l|$, および $\|A\| = \|A_{\infty}\|$, $\|B\| = \|B_{\infty}\|$ と表しておきましょう．

無限級数の積 AB は無限和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ を先に計算してからそれらの積を求めるという意味ですね．今の場合， $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ が収束するので

$$AB = A_{\infty}B_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n ,$$

$$\text{よって } AB = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n$$

が成り立ちます．積 AB を展開すると，項 $a_k b_l$ の無限和の形で表されますが，項の順を任意にとってよいかどうかが問題です．もし任意でよいとすると

$$\begin{aligned} AB &= a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) \\ &\quad + (a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4) + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \chi_k \quad (\chi_k = a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \cdots + a_2 b_{k-1} + a_1 b_k) \end{aligned}$$

のように表すことができます．以下，絶対収束する級数 A , B についてはこのことが成り立つことを示しましょう．

$$X_n = \sum_{k=1}^n \chi_k = \sum_{k=1}^n (a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \cdots + a_1 b_k) , \quad X = X_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \quad \text{とおき, また}$$

$$\|\chi_k\| = |a_k| \|b_1\| + |a_{k-1}| \|b_2\| + \cdots + |a_1| \|b_k\| ,$$

$$\|X_n\| = \sum_{k=1}^n \|\chi_k\| , \quad \|X\| = \|X_{\infty}\| \quad \text{とおいて, まず, } \|X\| = \|A\| \|B\| \text{ を示しましょう.}$$

nX_n の全ての項は ${}^nA_n{}^nB_n = \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot \sum_{l=1}^n |b_l|$ を展開して得られる項に含まれますね。よって、

$${}^nX_n \leq {}^nA_n{}^nB_n, \text{ よって } n \rightarrow \infty \text{ のとき } {}^nX \leq {}^nA{}^nB$$

が成り立ちます。同様に、 ${}^nA_n{}^nB_n$ の全ての項は

$${}^nX_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} (|a_k| |b_1| + |a_{k-1}| |b_2| + \cdots + |a_1| |b_k|)$$

に含まれますね。よって、

$${}^nA_n{}^nB_n \leq {}^nX_{2n-1}, \text{ よって } n \rightarrow \infty \text{ のとき } {}^nA{}^nB \leq {}^nX$$

が成り立ちます。したがって、両不等式より

$${}^nX = {}^nA{}^nB$$

が得られます。

次に、 X_n の全ての項は $A_n B_n$ に含まれるので、差 $A_n B_n - X_n$ をとると、 X_n の項は全て打ち消され、 $A_n B_n$ の項のみが残ります。 ${}^nA_n{}^nB_n - {}^nX_n$ でも同様です。よって、

$$|A_n B_n - X_n| \leq {}^nA_n{}^nB_n - {}^nX_n$$

が成り立ちますが、このとき ${}^nX = {}^nA{}^nB$ だから

$$|A_n B_n - X_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立ちます。そこで $|AB - X_n|$ を考えると

$$|AB - X_n| = |AB - A_n B_n + A_n B_n - X_n| \leq |AB - A_n B_n| + |A_n B_n - X_n|$$

ですが、 $|A_n B_n - X_n| \rightarrow 0$ です。 $|AB - A_n B_n|$ については

$$|AB - A_n B_n| = |(A - A_n)(B - B_n) + (A - A_n)B_n + A_n(B - B_n)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

です。したがって、無限級数 A, B が絶対収束するとき

$$\begin{aligned} |AB - X_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) &\Leftrightarrow AB = X \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \cdots + a_1 b_k) \end{aligned} \quad (X_{\infty})$$

が示されました。