第10章　複素数

第 2 章の方程式で見たように，複素数 $x + iy$ (x, y は実数，$i^2 = -1$) は，2 次方程式の判別式が負の場合に，解が虚数になることにその起源があります．そのことが知られたのは負数でさえ数と認めない時代ですから，複素数を数と認めるには長い長い期間が必要でした．例えば，9 世紀のアラビアの数学者アル・ファリズミ（Al-Khwarizmi，780 頃〜850 頃）は虚数はもちろん負数の解をもつ 2 次方程式もわざと扱いませんでした．それらを数と考えなかったからです．他の国々の数学者も 16 世紀までは同様でした．複素数が実数と同様の数とはっきり認められるのは 19 世紀になってからです [1]．

1545 年に出版されたイタリアの数学者カルダノ（Girolamo Cardano，1501〜1576）の著作には 3 次方程式の解の公式が載っていました．その公式によると，§§2.3.2 で見たように，実数解をもつ場合であっても，計算の途中の段階で解の式がいったん虚数の 3 乗根の和の形になり，その和が実数になるとはとうてい思われませんでした．このことは多くの数学者の興味を複素数へ向かわせ，その後 300 年もの間，虚数と格闘させることになりました．

ほとんど全ての数学者が負数解や虚数解を認めない中，オランダの数学者 A. ジラールは，1629 年の著書の中で，それらに大きな注意を払っています．ようやく複素数を受け入れる小さな流れができたのです．

§1.1 で議論したように，デカルトは 1637 年の著作『幾何学』において実数と数直線上の線分の対応を考え，それによって正数と共に負数も数直線上の点として表すことができました．複素数についても，それがある意味で自然な存在として受け入れられるためには，‘ 複素数の幾何学的解釈 ’ が必要であった

---

[1] 複素数の歴史およびトピックスはポール・J・ナーイン著『虚数の話』（好田順治訳，青土社）に詳しく載っています．

と思われます．2 つの複素数 $p+iq$，$r+is$ の和

$$(p+iq)+(r+is)=(p+r)+i(q+s) \quad （p,\ q,\ r,\ s \text{ は実数}）$$

は 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ の和

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$$

と同様の規則に従います．よって，複素数を平面上に表す試みは自然な発想でした．

複素数を平面上に点として表してそれらの和をベクトルの和のように扱い，さらに，§§4.1.1 で学んだ極座標のように，その点を長さと角を用いて表す，いわゆる「極形式」を導入し，複素数の積を平面上で表すことに成功したのは，デンマークの地図制作者・測量技術者のウェッセル（Caspar Wessel，1745〜1818）でした．その研究は 1797 年に発表されました．極形式には上述したカルダノの虚数のパラドックスを解く鍵が潜んでいたのです．第 7 章 ベクトルの始めに述べたように，彼の仕事は 100 年もの間日の目を見ることはなく歴史に埋もれてしまいました．

やや遅れて 1806 年にフランスの数学者アルガン（Jean Robert Argand，1768〜1822）もウェッセルと同様の複素数演算の幾何学的解釈を試みましたが，それを多くの学者が知り活発な議論が起こったのは 1813 年以後になってからのことでした．複素数はその計算規則が実数のものと同じであり，それを使うと一連の問題が解きやすくなり，内部矛盾をまったく含まないので，次第に複素数の理論的基礎付けを待つ雰囲気になっていったようです．

数学の王者ガウス（Karl Friedrich Gauss，1777〜1855，ドイツ）は，早くから複素数演算の幾何学的解釈が身近なものになっていましたが，彼は自分の研究の発表には慎重で，虚数認知派の勢いが強まったタイミングを計ったかのように，1831 年になってから数全般に関する研究を公表しました．彼は，その研究の中で初めて「複素数」(complex number) の用語を用い，それまでの呼び名「架空の数」を精算しました．正・負の実数を特別な場合として含む数，つまり複素数を一般的・形式的に完全に基礎づける理論が得られたのです．複

素数は，これまで実数に対して成立していた全ての計算法則を満たす最も一般的な数として「複素平面」と呼ばれる平面上の点と 1 : 1 の対応がなされました．また，i は‘数’$\sqrt{-1}$ というよりは複素数を表すための‘記号’と見なされました．この究極的考察によって，19 世紀の中頃には，複素数の意味付けとその公認は事実上終わりました．

§10.1　複素数

10.1.1　複素数の計算規則

今まで漠然としていた複素数の概念と計算規則を明確にし，その計算法則を書き下すところから始めましょう．

$$a+ib \qquad （a,\ b \text{ は実数},\ i^2=-1）$$

の形で表される数を **複素数** といい，特に $b=0$ の場合は実数を表します．$b \neq 0$ のときは **虚数** といい，特に $a=0,\ b\neq 0$ の場合の ib を **純虚数** といいます．記号 i を **虚数単位** と呼びましょう．複素数を表すのに文字 z やギリシャ文字などがしばしば用いられます．複素数 $z=a+ib$ の a を z の **実部**，b を **虚部** といい，それを表すのに便利な記号

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z \qquad (z=a+ib)$$

を用いることもあります．

2 つの複素数 $a+ib,\ c+id$ が等しいことは

$$a+ib=c+id \iff a=c,\ b=d \qquad （a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数}）$$

と定義しなければなりません．なぜならば，$a-c=i(d-b)$ と移行して両辺を 2 乗すると $(a-c)^2=-(d-b)^2$（左辺 $\geqq 0$，右辺 $\leqq 0$）となるからです．これから複素数 $a+ib,\ c+id$ の和・差は

$$(a+ib)\pm(c+id)=(a\pm c)+i(b\pm d)$$

と定義され，複素数の和・差はまた複素数になります．複素数 $a+ib,\ c+id$ の積は $i^2=-1$ より

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

と定義されます．この式は複素数の積がまた複素数になることを意味します．複素数 $a+ib$，$c+id$ の商 $\dfrac{a+ib}{c+id}$ は

$$\frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{(c+id)(c-id)} = \frac{c-id}{c^2+d^2}$$

に注意すると

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad （ただし\ c^2+d^2 \neq 0）$$

と定義すべきことになります．よって複素数の商もまた複素数です．

これらの四則演算の定義を理論の出発点とすると，もはや虚数単位 i は複素数を表すための単なる記号になり，$i^2=-1$ を使うことなく議論を進めることができます．これが公式に認められた複素数の理論です．とはいっても，$i^2=-1$ を使うほうが簡単なので，我々は公式の理論を念頭におきつつ，$i^2=-1$ を用いて議論を進めていきましょう．

上の四則演算の定義から，任意の複素数 z_1，z_2，z_3 に対して，

$$z_1+z_2 = z_2+z_1, \qquad z_1z_2 = z_2z_1, \qquad （交換法則）$$
$$z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3, \qquad z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3, \qquad （結合法則）$$
$$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3, \qquad (z_1+z_2)z_3 = z_1z_3+z_2z_3 \qquad （分配法則）$$

が成り立ちますね．これらの法則と §§1.3.1 で学んだ真の基本仮定としての公理

$$z_1 = z_2 \ \Rightarrow\ z_2 = z_1, \qquad （対称律）$$
$$z_1 = z_2\ \ かつ\ \ z_2 = z_3 \ \Rightarrow\ z_1 = z_3 \qquad （推移律）$$

によって複素数の計算が実行されます．

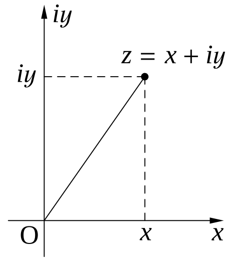
なお，複素数の商のところで，複素数 $z=a+ib$ に対して複素数

$$z = a-ib = a+i(-b)$$

を考えましたが，これは z の **共役複素数** $\bar{z}$ と呼ばれる重要なものです：

$$z = a+ib\ \ に対して\quad \bar{z} = a+i(-b) \qquad (z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \quad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z).$$

10.1.2　複素数と平面上の点の対応

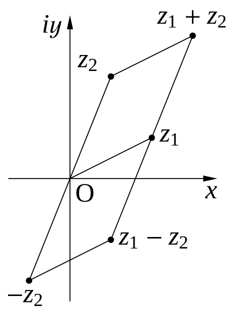


実数 x, y の組 $(x,\ y)$ に対して座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を 1 : 1 に対応させることができました．同様に，複素数 $z = x + iy$ を表すのに架空の座標平面を考えて，座標が $(x,\ y)$ である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させれば，平面上の点と複素数は 1 : 1 に対応します．このような平面を **複素平面** といいましょう．複素数 z を表す点 P を点 P(z) と表したり，その点を単に‘ 点 z ’ということもあります．実平面を複素平面に置き換えるには，点 $(x,\ y)$ を点 $z = x + iy$ に替えるだけで済みます．

ここでは，座標 $(x,\ y)$ を‘ 座標 $(x,\ iy)$ ’と表してより複素数の座標らしくしましょう．実数に対応する点 $(x,\ i0)$ がその上にある座標軸を **実軸** と呼び x で表しましょう．また，純虚数に対応する点 $(0,\ iy)$ がその上にある座標軸を **虚軸** と呼び iy で表しましょう．

複素数を平面上の点として表すと，‘ 複素数の四則演算を目で見る ’ことができ，この忌まわしい数？の理解の大きな助けになります．

10.1.3　複素数の和・差



2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ の和・差は，

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

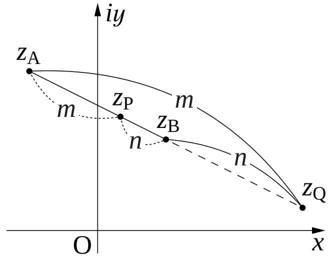
ですから，z_1，z_2 の実部と虚部の和・差で表され，平面ベクトルの和・差と同じように‘ 平行四辺形の法則 ’を用いて考えれば済みます．このことから，まだベクトルがなかった時代に，複素数で代用したことがうなずけます．

それらの共役複素数 $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$，$\overline{z_2} = x_2 - iy_2$ の和・差は

$$\overline{z_1} \pm \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2) = \overline{z_1 \pm z_2}\,,$$

$$\text{よって}\quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}\,.$$

位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に実数 k を掛けたベクトル $k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を k 倍した位置ベクトルです．同様に，複素平面上の点 A に対応する複素数を $z = a + ib$ とし，それに実数 k を掛けると $kz = (ka) + i(kb)$ になり，この複素数は位置ベクトル $k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の終点に対応します．このことは，2 点 A，B を $m : n$ に内・外分する点 P，Q を表すのに用いられた公式



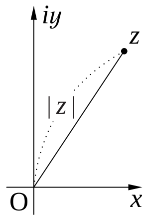
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}} - n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m-n}$$

が，ベクトルを複素数に替えれば，そのまま成り立つことを意味します．よって，複素平面上の 2 点 z_A，z_B を $m : n$ に内分，外分する点 z_P，z_Q は

$$z_P = \frac{mz_B + nz_A}{m+n}, \quad z_Q = \frac{mz_B - nz_A}{m-n}$$

によって与えられます．

10.1.4　極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して，複素平面上の点 z と原点 O の距離を複素数 z の **絶対値** といい，$|z|$ で表します：

$$z = x + iy \text{ のとき} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

このとき，z の共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ を考えると

$$z\bar{z} = |z|^2, \qquad |z| = \sqrt{z\bar{z}}, \qquad |\bar{z}| = |z|$$

であることに注意しましょう．

2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ の差の絶対値 $|z_1 - z_2|$ を考えます．$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ だから，$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$．したがって，

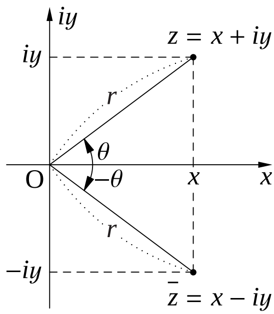
$$|z_1 - z_2| \text{ は 2 点 } z_1,\ z_2 \text{ の距離}$$

を表すことがわかります．

では，ここで問題です．$z = x + iy$ を複素数の変数として，方程式 $|z - z_0| = r$ $(r > 0)$ は複素平面上でどんな図形を表すか．ヒント：2 点 z，z_0 の距離が一定値 r です．答は，中心が z_0，半径が r の円です．$z_0 = x_0 + iy_0$（x_0，y_0 は実数）とおいて確かめてみましょう．$z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = (x - x_0) + i(y - y_0)$ と実部・虚部に分けると

$$|z - z_0| = r \iff |(x - x_0) + i(y - y_0)|^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

ですから，確かに中心 $z_0 = x_0 + iy_0$，半径が r の円ですね．一般に，複素平面上の図形の方程式は，実変数 x，y を用いて表すと，実平面上の方程式に一致します．



複素平面上で，複素数 $z = x + iy$ を表す点を P(z) とするとき，$r = \mathrm{OP} = |z|$ とし，動径 OP の表す一般角（つまり，回転角）を θ $(-\infty < \theta < \infty)$ とすると

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ですから，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{（極形式）}$$

と表すことができ，複素数 $z = x + iy$ の **極形式** といいます．r は z の絶対値で，θ は z の **偏角** (argument) と呼ばれ，$\arg z$ で表します：

$$\theta = \arg z\,.$$

複素数 $z = x + iy$ の極形式に対して，その共役複素数 $\bar{z} = x + i(-y)$ の極形式は

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

と表されます．よって，

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg\bar{z} = -\arg z$$

が成り立ちます．

$z = x + iy$ の絶対値 r は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ですから，z の偏角 θ は

$$\cos\theta = \frac{x}{r}\,, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

を満たす角 θ として求められます．このとき，θ に対して，通常は $0 \leqq \theta < 2\pi$，または，$-\pi < \theta \leqq \pi$ の範囲で考えても問題はないのですが，累乗根を求めるときなどには $-\infty < \theta < \infty$ の範囲で考える必要が出てきます．偏角の重要性は追々理解していくでしょう．

ここで練習問題をやってみましょう．$z = \sqrt{3} + i$ を極形式で表せ．ただし，偏角については $-\infty < \arg z < \infty$ とする（可能な偏角を全て書き下せということです）．ヒント：$r = \left|\sqrt{3} + i1\right| = \sqrt{3+1} = 2$ より，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ ですね．よって，$\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$（$n$ は整数）と表されます．

これらより，答は

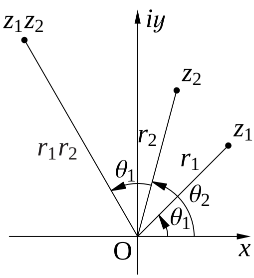
$$\sqrt{3} + i = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\right\} \qquad (n \text{ は整数}).$$

10.1.5　極形式を用いた複素数の積・商

10.1.5.1　複素数の積

複素数の積を極形式で計算してみましょう．2 つの複素数 z_1，z_2 を

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$



とすると，加法定理がうまく使うことができ

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}, \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

が得られます．これから積 z_1z_2 は絶対値が r_1r_2，偏角が $\theta_1 + \theta_2$ の複素数であることがわかります．よって，2 つの複素数 z_1，z_2 の積 z_1z_2 について

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

が成り立ちます．雑な表現をすると，‘複素数 z_1 に複素数 z_2 を掛けることは，点 z_1 を原点の周りに $\arg z_2$ だけ回転して $|z_2|$ 倍すること’といってもよいでしょう．

z の共役複素数 $\overline{z}$ が $\left|\overline{z}\right| = |z|$,　$\arg \overline{z} = -\arg z$ を満たすことに注意すると，z_1，z_2 の共役複素数 $\overline{z_1}$，$\overline{z_2}$ の積については

$$\left|\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right| = \left|\overline{z_1}\right|\left|\overline{z_2}\right| = |z_1||z_2| = |z_1 z_2|,$$

$$\text{よって}\quad \left|\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right| = |z_1 z_2|,$$

$$\arg\left(\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right) = \arg \overline{z_1} + \arg \overline{z_2} = -\arg z_1 - \arg z_2 = -(\arg z_1 + \arg z_2) = -\arg(z_1 z_2),$$

$$\text{よって}\quad \arg\left(\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right) = -\arg(z_1 z_2)$$

が成り立ちます．これは

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{(z_1 z_2)}$$

であることを示しています．

ここで練習です．$i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおいて i^2 を求め，r と θ を決定せよ．ヒント：$i^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ ですね．これを $i^2 = -1$ と比較すると $r^2 \cos 2\theta = -1$，$r^2 \sin 2\theta = 0$ ですから，$\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$ を用いて $r = 1$ が決まります．よって，$\cos 2\theta = -1$，$\sin 2\theta = 0$ より $2\theta = \pi$，よって $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となります．この問題の意図は，$\arg i = \dfrac{\pi}{2}$ であるのを確かめることで，純虚数がその上にある‘ 虚軸は実軸に直交する ’ことを確認してもらうことです．なお，$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ より，z に i を掛けることは点 z を原点の周りに 90° だけ回転した点に移すことを意味します．

10.1.5.2　**複素数の商**

複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,　$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ の商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ を求めましょう．$z_2\overline{z_2} = |z_2|^2 = r_2^2$ に注意して，

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2))}{|z_2|^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)\end{aligned}$$

が得られます．よって，複素数 z_1，z_2 の商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ について，

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

が成り立ちます．商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ が表す点は，点 z_1 を原点の周りに角 $-\arg z_2$ だけ回転して $\dfrac{1}{|z_2|}$ 倍したところにあります．

z_1，z_2 の共役複素数 $\overline{z_1}$，$\overline{z_2}$ の商 $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ に対して，

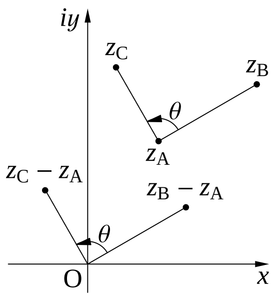
$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \qquad (z_2 \neq 0)$$

が成り立ちます．これを示すのは君たちの練習問題にしましょう．

10.1.6　複素平面上の角

複素平面上に 3 点 $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$，$\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$，$\mathrm{C}(z_\mathrm{C})$ をとり，$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ を求めましょう．複素数 $z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$，$z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}$ が表す点をそれぞれ B′，C′ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ が成り立ちますね．よって，$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{B'OC'}$ です．このとき

$$\angle\mathrm{B'OC'} = \arg(z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}) - \arg(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}) = \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right)$$



に注意すると

$$\angle\mathrm{BAC} = \theta = \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right)$$

が得られます．ただし，角 θ については，半直線 AB を点 A の周りに回転して半直線 AC に重ねるときの回転角と見なすので $-\pi < \theta \leqq \pi$ とします．

では，偏角に関する問題をやってみましょう．複素平面上に 2 定点 $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$，$\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ をとる．このとき，$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{A}}{z - z_\mathrm{B}}\right) = \theta$（＝一定）を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ はどのような図形を描くか．ここでは，簡単のために $z_\mathrm{A} = a > 0$，$z_\mathrm{B} = -a$，$\theta = +90^\circ$ とします．出題のねらいは，表式

$$\arg\left(\frac{+a - z}{-a - z}\right) = +90^\circ$$

を眺めて，答が見えるようになることです．

複素数 $\dfrac{z-a}{z+a}$ の偏角が与えられているので，偏角が定義できるための条件 $z \fallingdotseq \pm a$ に注意すると，偏角の条件は複素数 $\dfrac{z-a}{z+a}$ の極表示を用いて

$$\begin{aligned}\frac{z-a}{z+a} &= \left|\frac{z-a}{z+a}\right|(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) \\ &= i\left|\frac{z-a}{z+a}\right| \qquad (z \fallingdotseq \pm a)\end{aligned}$$

のように表すことができます．

ここで両辺の実部・虚部を比較すればよいのですが，そのままやるとグジャグジャになります．今の場合は

$$\frac{z-a}{z+a} = X + iY \qquad (X,\ Y \text{ は実数})$$

とおいて，実部・虚部についての条件を求めるとスッキリします．

$$\begin{aligned}\frac{z-a}{z+a} = i\left|\frac{z-a}{z+a}\right| &\iff X + iY = i|X+iY| \iff X = 0,\ Y = |Y| \\ &\iff X = 0,\ Y \geqq 0\end{aligned}$$

ですから（確かめましょう），求める条件は

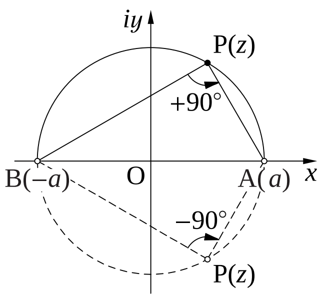
$$\frac{z-a}{z+a} = X + iY,\ X = 0,\ Y \geqq 0 \qquad (z \fallingdotseq \pm a)$$

に同値です．$(z+a)\overline{(z+a)} = |z+a|^2$，および

$$(z-a)\overline{(z+a)} = z\bar{z} - a^2 + a(z-\bar{z}) = |z|^2 - a^2 + 2aiy \qquad (y = \mathrm{Im}\, z)$$

に注意すると，

$$\frac{z-a}{z+a} = \frac{(z-a)\overline{(z+a)}}{(z+a)\overline{(z+a)}} = \frac{|z|^2 - a^2 + 2aiy}{|z+a|^2}$$



なので

$$X = 0,\ Y \geqq 0 \iff |z|^2 - a^2 = 0,\ 2ay \geqq 0,$$

$$\text{よって}\quad |z| = a,\ y \geqq 0 \qquad (z \fallingdotseq \pm a)$$

を得ます．よって，答は線分 AB を直径とする半円です．

半円となったのは $\arg\left(\dfrac{+a-z}{-a-z}\right) = \angle\mathrm{BPA} = +90^\circ$ を複素数の偏角，つまり回転角としたためです．この結果は，2 定点 A，B と動点 P に対して，

$$3 \text{ 点 A，B，P が同一円周上にある} \iff \angle\mathrm{BPA} = \text{一定}$$

という，いわゆる「円周角の定理」の一例になっています．

この例にならって，A(a)，B($-a$)，$\theta =$ 一定 の場合を試みるとよいでしょう．今度は，半円でなく円弧になります．

§10.2　ド・モアブルの定理

10.2.1　ド・モアブルの定理

複素数における重要な定理を証明しましょう．$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると，複素数の積の性質から，

$$z^2 = zz = \cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$
$$z^3 = z^2 z = \cos(2\theta+\theta) + i\sin(2\theta+\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

これを繰り返すと，任意の自然数 n に対して，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n \text{ は自然数})$$

が成り立ちます．これを **ド・モアブルの定理** といいます．

この定理は容易に一般化できます．$z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき，$|z| = 1$ なので，

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{\bar{z}^{\,n}}{(z\bar{z})^n} = \frac{\bar{z}^{\,n}}{|z|^{2n}} = \bar{z}^{\,n}, \qquad \text{よって} \qquad z^{-n} = \bar{z}^{\,n}$$

となり，したがって

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} &= (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n \\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) \qquad (n \text{ は自然数})\end{aligned}$$

が成り立ちます．これはド・モアブルの定理の指数が整数に拡張できることを意味します．

一般に，複素数 z と自然数 n に対して，方程式 $w^n = z$ を満たす複素数 w を z の n 乗根といい，$z^{\frac{1}{n}}$ で表します：

$$w^n = z \iff w = z^{\frac{1}{n}}.$$

この記法は $\sqrt[n]{a}$ が一般に実数を表すのと区別するために用いられ，$a^{\frac{1}{n}}$ は複素数になります．

上の定義によって，ド・モアブルの定理の拡張限界が現れます．まず，$w = 1^{\frac{1}{n}}$ つまり n 次方程式 $w^n = 1$ の解は，$\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$（$k$ は整数）に注意すると，ド・モアブルの定理を用いて確かめられるように，

$$w = 1^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n-1)$$

です（詳細は次の §§ で議論します）．このことは $(\cos\theta + i \sin\theta)^{\frac{1}{n}}$ を求める際に利用できます．$\left\{\left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n}\right) \cdot 1^{\frac{1}{n}}\right\}^n = \cos\theta + i \sin\theta$ に注意すると，

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n-1)$ となることがわかります．この結果は，期待されない付加的な偏角 $\dfrac{2k\pi}{n}$ をもたらしますね．

10.2.2　1 の n 乗根

1 の n 乗根（n は自然数）を求めましょう．この問題は複素数の偏角にまつわる微妙な問題を含んでいるので，2 通りの解法をしましょう．1 の n 乗根は n 個の異なる複素数を解にもちます．

$z = 1^{\frac{1}{n}} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ とおきましょう．このとき $1^{\frac{1}{n}}$ の偏角 θ については，$0 \leqq \theta < 2\pi$ と制限しても構いません．よって

$$z^n = r^n(\cos\theta + i \sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1$$

より，実部・虚部を比較して $r^n \cos n\theta = 1$，$r^n \sin n\theta = 0$ を得ます．これより $r = 1$，および $0 \leqq \theta < 2\pi$ とすると，$n\theta = 2k\pi$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n-1)$，よって $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ となるので，

$$1^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n-1)$$

が得られます．このとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の周期性から，$k<0$，または，$k \geqq n$ の場合の解は $k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$ のもののどれかに一致することに注意しましょう．例えば，$k=n$ のとき $\cos\dfrac{2n\pi}{n}=\cos 0$，$\sin\dfrac{2n\pi}{n}=\sin 0$ ですから，その場合は $k=0$ の場合に一致します．

もう 1 つの解法は前の §§ のド・モアブルの定理を使う方法です．$|1|=1$，また，1 の偏角については一般に ‘ $\arg 1 = 2k\pi$（k は整数）である ’ ことに注意すると，

$$1=\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

と表されます．よって，下式の両辺を n 乗するとわかるように

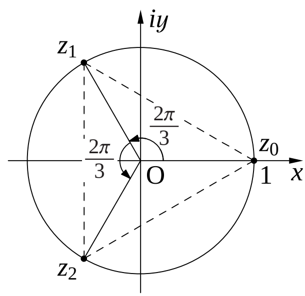
$$1^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k \text{ は整数})$$

です．このとき，3 角関数の周期性より，$k=0, 1, 2,\cdots, n-1$ と制限することができます．

以上の議論から，1 の n 乗根は n 個の異なる解をもちますね．一般の複素数 α の n 乗根 $z=\alpha^{\frac{1}{n}}$ についても同様のことがいえます．というのは z は n 次方程式 $z^n=\alpha$ の解として得られるからです．

1 の 3 乗根 $1^{\frac{1}{3}}=\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$ の各々を z_k と記して具体的に書き下すと，

$$\begin{cases} z_0=\cos 0+i\sin 0=1 \\ z_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ z_2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



となります．z_0，z_1，z_2 は複素平面上の単位円の円周を 3 等分する点で，正三角形の頂点になります．同様に，1 の n 乗根が表す点は単位円周を n 等分し，正 n 角形の頂点になります．

1 の 3 乗根については，もちろん，3 次方程式 $z^3-1=0$ を解いても得られますね．$z^3-1=0 \iff (z-1)(z^2+z+1)=0$ より，再び解 $z=1,\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ が得られます．

では，ここで問題をやりましょう．原点を中心とする半径 r の円周上に正 n 角形 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$ を描く．ただし，$A_0(r,\ 0)$ とする．ここで，x 軸上に点 $P(a,\ 0)$ $(a>0)$ をとり，P と各頂点 A_k との距離 PA_k を考えるとき，それらの積について

$$PA_0PA_1\cdots PA_{n-1}=|\,OP^n-r^n\,|$$

が成り立つことを示せ.

これはコーツの定理と呼ばれる有名なものです．超難問のように感じませんか？ すぐピーンときた人は 1 の n 乗根をよ〜く理解した人です．ヒント：複素平面上で考えます．正 n 角形の各頂点 A_k は r^n の n 乗根 z_k：

$$z_k=(r^n)^{\frac{1}{n}}=r\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\qquad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

が表す点です．ここで

$$\begin{aligned}PA_0PA_1\cdots PA_{n-1}&=|\,a-z_0\,||\,a-z_1\,|\cdots|\,a-z_{n-1}\,|\\&=|\,(a-z_0)(a-z_1)\cdots(a-z_{n-1})\,|\end{aligned}$$

および $|\,OP^n-r^n\,|=|\,a^n-r^n\,|$ に注意するとそろそろ見えてくるでしょう.

n 次式 z^n-r^n は，方程式 $z^n-r^n=0$ の解 $z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1}$ を用いて

$$z^n-r^n=(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$$

と因数分解できますね．因数分解の等式は恒等式なので，$z=a$ とおいて両辺の絶対値をとればほぼできあがりです．仕上げは君たちの仕事です.

§10.3　方程式

10.3.1　複素係数の 2 次方程式

例として，方程式 $z^2-2iz-2-i\sqrt{3}=0$ を解いてみましょう．因数分解は簡単にはできそうもありませんね．複素数は，実数と同じ計算法則を満たすので，2 次方程式の解の公式はそのまま使えます．よって,

$$z=i\pm\sqrt{D'},\quad \text{ただし}\quad D'=(-i)^2+2+i\sqrt{3}=1+i\sqrt{3}$$

です.

この解が複素数であることを示しましょう．$(\pm\sqrt{D'})^2 = D'$ だから $\pm\sqrt{D'}$ は $(D')^{\frac{1}{2}}$ のことです．$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$（$k$ は整数）に注意すると

$$D' = 1 + i\sqrt{3} = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right\} \qquad (k \text{ は整数})$$

と表されます．議論をスッキリさせるためには複素数の積の性質を逆に使い

$$D' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) \qquad (k \text{ は整数})$$

としておくほうがよいでしょう．すると，拡張されたド・モアブルの定理より

$$(D')^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\cos k\pi + i\sin k\pi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 1^{\frac{1}{2}}$$

が得られます．ここで k の偶数，奇数に対応して

$$1^{\frac{1}{2}} = \cos k\pi + i\sin k\pi = \pm 1$$

となるので，

$$(D')^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$$

が得られます．よって，最終的に

$$\begin{aligned} z &= i \pm \sqrt{D'} = i \pm \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) \\ &= \pm\frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \qquad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となります．確かに複素数になりましたね．

もう 1 題やってみましょう．方程式は $z^2 - (3 + i4)z - 1 + i5 = 0$ です．解の公式より

$$z = \frac{3 + i4 \pm \sqrt{D}}{2}, \qquad D = -3 + i4$$

を得ます．ここで判別式 D については

$$\begin{aligned} D = -3 + i4 &= 5\{\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\} \\ &= 5(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi), \end{aligned}$$

$$\text{ただし}\quad \cos\theta = \frac{-3}{5},\ \sin\theta = \frac{4}{5} \qquad (-\pi < \theta \leqq \pi,\ k \text{ は整数})$$

と表すことができます．

今度は θ をすぐには求められませんね．先の問題と同様にして

$$\pm\sqrt{D} = D^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

が得られます．ここで半角公式

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

を用います．今の場合，$0 < \theta < \pi$ に制限できるので，$\cos\frac{\theta}{2} > 0$，$\sin\frac{\theta}{2} > 0$ に注意して

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} &= \pm\sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right) \\ &= \pm\sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)}\right) \\ &= \pm(1+i2) \end{aligned}$$

が得られます．よって，最終的に

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left(3+i4+D^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(3+i4\pm(1+i2)\right) \\ &= 2+i3, \quad 1+i \end{aligned}$$

を得ます．元の方程式 $z^2-(3+i4)z-1+i5=0$ が $(z-2-i3)(z-1-i)=0$ と因数分解できることを確かめましょう．

以上の例から，一般の複素係数 2 次方程式の解法は明らかになったでしょう．まず，解の公式を用いて解き，判別式 $D = a+ib$（a，b は実数）を極表示します：

$$\begin{aligned} D &= a+ib \\ &= r\left(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)\right) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi), \qquad (-\pi < \theta \leqq \pi,\ k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

$$\text{ただし}\quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

次に，

$$\pm\sqrt{D} = D^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

を半角公式を用いて計算し，解の公式に代入して整理すればできあがりです．

10.3.2　3 次方程式とカルダノのパラドックス

§§2.3.2 カルダノの公式と虚数のパラドックスで議論したことを検証しましょう．一般の実数係数 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ から得られるそれに同値な 3 次方程式

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \qquad （p,\ q\ は実数）$$

を考えます．カルダノが得たこの方程式の解の公式は，解を $x = u + v$ とすると

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\varDelta}}\,, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{\varDelta}}, \quad ただし \quad \varDelta = q^2 + p^3$$

と表されます（この 3 乗根は複素数を与えると見なします）．この公式が‘正しい解’を与えることはそれが方程式を満たすことから確かめられましたね．

物議をかもす問題は $\varDelta < 0$ の場合に起こりました．例えば，方程式

$$(x-1)(x-4)(x+5) = x^3 - 21x + 20 = 0$$

の解 1, 4, −5 は全て実数です．ところが，このとき，$p = -7$, $q = 10$ なので，$\varDelta = -243$．よって，解 $x = u + v$ の u, v は

$$u = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}}\,, \quad v = \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$$

と表されます．和 $u + v$ が 1, 4, −5 であることは上の方程式から一目瞭然です．しかし，u, v は虚数の 3 乗根です．その和が実数 1, 4, −5（のどれか，または，全部）になるとはその当時は信じられませんでした．

以下，電卓の助けも借りながら，$x = u + v = 1,\ 4,\ -5$ となることを示しましょう．まず，$D = -10 + \sqrt{-243}$ とすると $-10 - \sqrt{-243}$ はその共役複素数 $\overline{D}$ ですね．よって，偏角の不定性に注意すると

$$\begin{aligned} D,\ \overline{D} &= -10 \pm i\sqrt{243} \\ &= \sqrt{343}\,\{\cos(\pm\theta \pm 2k\pi) + i\sin(\pm\theta \pm 2k\pi)\} \\ &= \sqrt{343}\,\{\cos(\pm\theta) + i\sin(\pm\theta)\}\{\cos(\pm 2k\pi) + i\sin(\pm 2k\pi)\}, \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{-10}{\sqrt{343}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{243}}{\sqrt{343}} \qquad （-\pi < \theta \leqq \pi,\ k\ は整数）$$

と表すことができます．

これから

$$\begin{aligned} u,\ v &= D^{\frac{1}{3}},\ \overline{D}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[6]{343}\left\{\cos\left(\pm\frac{\theta}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\theta}{3}\right)\right\}\left\{\cos\left(\pm\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2k\pi}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

となります．したがって，どの k についても $v=\overline{u}$ が成り立ち

$$x=u+v=u+\overline{u}=2\,\mathrm{Re}\,u=\text{実数}$$

であることがわかります（ $\mathrm{Re}\,(a+ib)=a$（$a,\ b$ は実数））．

ここで

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[6]{343}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt[6]{343}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\cdot 1^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

です．

関数電卓を用いましょう．$\cos\theta=\dfrac{-10}{\sqrt{343}}$ だから，$\theta=122.6801839°$．よって，$\dfrac{\theta}{3}=40.89339465°$ が得られます（数値はもちろん近似値です）．この値から $\cos\dfrac{\theta}{3}=0.755928946$，$\sin\dfrac{\theta}{3}=0.65465367$ となりますが，$\sqrt[6]{343}=2.645751311$ を用いて

$$\sqrt[6]{343}\cos\frac{\theta}{3}=2,\qquad \sqrt[6]{343}\sin\frac{\theta}{3}=1.732050808=\sqrt{3}$$

に注意し，また，既に得た結果 $1^{\frac{1}{3}}=1,\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ を用いると，最終結果

$$x=2\,\mathrm{Re}\,u=\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt[6]{343}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}+i\sin\dfrac{\theta}{3}\right)\cdot 1\right)=4 \\ 2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt[6]{343}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}+i\sin\dfrac{\theta}{3}\right)\cdot\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)=-5,\ 1 \end{cases}$$

が得られ，カルダノの公式は‘ 正しい解を全て与える ’ことがわかります．

以上の議論から，複素数の不思議で面白い性質が読みとれたと思います．その性質は一見無用とも思える偏角の不定性に起因していますね．複素数 $a+ib$ は，本当は，$(a+ib)(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$（$k$ は整数）のことであると考えているほうがよいでしょう．

10.3.3　代数学の基本定理

§§2.4.3 で議論したように，n 次の方程式は，k 重解を k 個の解と見なすと，n 個の解をもつことが知られています．§§2.4.3 では果たせなかった「代数学の基本定理」の証明，つまり「複素係数 n 次方程式は少なくとも 1 個の複素数解をもつ」をここで示しましょう．

証明の骨子は，複素係数の n 次の複素数の多項式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

について，その絶対値 $|P(z)|$ の最小値は 0 であることを示すことです．これは $P(z) = 0$ を満たす複素数 z が存在することを意味します．以下，多少の準備をしてから本題に入りましょう．

10.3.3.1　複素数の連続関数

証明に必要なことは‘ 多項式 $P(z)$ が z の連続関数であること ’です．それは何故かを考えながら以下を読みましょう．連続性の厳密な議論は微分の章に回すことにして，ここでは直感的な議論で間に合わせます．

実数の関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，関数値 $f(a)$ が存在し，変数 x が a からごく僅かに変化するとき $f(x)$ も $f(a)$ からごく僅かに変化することです．関数のグラフでいうと，‘ グラフが $x = a$ で切れてない ’ことです．ある範囲で切れるところがない関数は，その範囲で連続関数です．2 次・3 次関数など，君たちの知っている関数のほとんどは，切れてるところがなく，実数の全範囲で連続関数です．不連続な点をもつ代表的な関数は $f(x) = \dfrac{1}{x}$ などの分数関数で，分母が 0 のところで不連続です．

複素変数 z の関数 $f(z)$ についても同様のことがいえます．$z = \alpha$ で $f(\alpha)$ が存在し，変数 z が α からごく僅かに変化した（$|z - \alpha|$ がごく小さい）とき，$f(z)$ も $f(\alpha)$ からごく僅かに変化する（$|f(z) - f(\alpha)|$ がごく小さい）とき，関数 $f(z)$ は $z = \alpha$ で連続であるといいます．関数 $f(z)$ が複素 z 平面上のある領域の各点で連続であるとき，$f(z)$ はその領域で連続であるといいます．

$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ と極形式で表しておいて，z の多項式の連続性を調べま

しょう．z の変化は r と θ の変化として表され，それらが共に連続的に変化するならば，z の実部 $r\cos\theta$ と虚部 $r\sin\theta$ は共に連続的に変化し，したがって，z が連続的に変化します．

複素係数の単項式 $a_k z^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ については，

$$|a_k z^k| = |a_k| r^k, \qquad \arg(a_k z^k) = \arg a_k + k\theta$$

ですから，r と θ が連続的に変化するとき，つまり z が連続的に変化するとき $a_k z^k$ は連続的に変化します．よって，$a_k z^k$ は全複素平面上で z の連続関数です．

多項式を調べるために, 複素平面上に 2 点 $\mathrm{P}(a_k z^k)$, $\mathrm{Q}(a_l z^l)$ $(k,\ l = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ をとりましょう．2 項式 $a_k z^k + a_l z^l$ はベクトルの和 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に対応します．z が連続的に変化するとき，$a_k z^k$，$a_l z^l$，よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は連続的に変化し，したがって平行四辺形の法則によって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が連続的に変化するので，対応する $a_k z^k + a_l z^l$ も連続的に変化します．項数が増えても，同様にベクトルに対応させれば，z と共に連続的に変化することがわかります．よって，多項式 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ は全複素平面上で z の連続関数になります．

10.3.3.2　定理

定理を 2 つほど学んでおきましょう．複素平面上に 2 点 $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$，$\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ をとると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$$

が成り立ちますね．等号成立は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が同じ向きのときです．同様に

$$\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\right| \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$$

が成り立ちます．等号成立は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が反対向きのときです．これらを複素数 z_A，z_B を用いて表すと

$$||z_\mathrm{A}| - |z_\mathrm{B}|| \leqq |z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}| \leqq |z_\mathrm{A}| + |z_\mathrm{B}|$$

のようになります．

次に，和 $r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^q$（$r \neq 1$，$p$，$q$ は整数，$p < q$）を求める公式を導きましょう．

$$(1 - r)(r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^q) = r^p - r^{q+1}$$

より，頻繁に用いられる公式

$$r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^q = \frac{r^p - r^{q+1}}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

が得られます．

10.3.3.3　代数学の基本定理

準備が整いました．複素係数の n 次多項式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

は複素変数 z の連続関数です．よって，複素平面上の 2 点 O と $P(z)$ の距離 $|P(z)|$ は z の実数値連続関数になります．

まず，$|P(z)|$ の振る舞いを調べましょう．$z \neq 0$ のとき

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

と表せます．これから $|z|$ が十分に大きいとき，先に示した絶対値の定理より

$$|P(z)| = |z^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geqq |z^n| \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right)$$

が成り立ちます．このとき $\left| \dfrac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^n} \right|$ は十分に小さくなり，例えば

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| < \frac{1}{2} |a_n|$$

のようにできます．よって，$|z| = R$ が十分に大きいとき（$x < y \iff -x > -y$ に注意して）

$$|P(z)| > R^n \left(|a_n| - \frac{1}{2} |a_n| \right) = \frac{1}{2} |a_n| R^n$$

となるので，$|z| \to \infty$ のとき $|P(z)| \to \infty$ が成立します．

一方，$|z| = r\,(< R)$ のとき

$$\begin{aligned}|P(z)| &= \left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\right| \leqq |a_n z^n| + \left|a_{n-1}z^{n-1}\right| + \cdots + |a_0| \\ &= |a_n|r^n + |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_0|\end{aligned}$$

となります．ここで $|a_0|$, $|a_1|, \cdots, |a_n|$ の最大のものを A とすると，

$$|P(z)| \leqq A\left(1 + r^1 + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n\right) = A\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

が得られます．ここで，十分に大きな R に対して，$|z| = r << R$ のとき

$$|P(z)| \leqq A\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} << \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

が成り立つことに注意しましょう．

以上のことから，荒っぽい言い方をすると，$|P(z)|$ は複素平面上の z に対して，お椀(わん)のような形になる関数値の分布をしていて，その最小値を $|z| < R$ の領域で，つまり有限の領域でとることがわかります．そこで，$|P(z)|$ は $z = \alpha$ で最小として，最小値を $|P(\alpha)|$ としましょう．

次に，最小値 $|P(\alpha)|$ が 0 であることを示します．その方法は $|P(\alpha)| \neq 0$ と仮定して矛盾を引き出すいわゆる背理法です．そのために，複素関数

$$f(z) = \frac{P(z + \alpha)}{P(\alpha)} \qquad (P(\alpha) \neq 0)$$

を考えて，$|f(z)|$ を 1 より小さくできることを導きます．この方法は，0 でない最小値 $|P(\alpha)|$ ならば，それより小さなものが存在することを示そうということです（悪魔の呟(つぶや)き：0 で割ったら，どんなインチキもできるわさ！）．

$P(z + \alpha)$ は n 次の多項式，$P(\alpha)$ は定数ですから，$f(z)$ は n 次の多項式になり，特に $f(0) = 1$ ですから

$$f(z) = 1 + b_1 z + \cdots + b_n z^n \qquad (b_n \neq 0)$$

のように表されます．$b_1 = 0$ などの可能性があるので，b_1, $b_2, \cdots, b_n$ のうち 0 でない最初のものを b_m（m は 1, $2, \cdots$, n のどれか）とすると，

$$f(z) = 1 + b_m z^m + \cdots + b_n z^n \qquad (b_m \neq 0)$$

と表されます．

さて，$\arg(b_m z^m) = -\pi$ となるように $z = z'$ を選んで，$|z'| = r$ とすると，

$$b_m z'^m = -|b_m| r^m$$

と表すことができます．ここで $|b_m| = b$ とおいて，$|b_m|, \cdots, |b_n|$ のうちで最大のものを B としましょう．すると，十分に小さな r に対して

$$\begin{aligned} |f(z')| &= |1 + b_m z'^m + \cdots + b_n z'^n| \leqq |1 + b_m z'^m| + \left|b_{m+1} z'^{m+1}\right| + \cdots + |b_n z'^n| \\ &\leqq |1 - br^m| + B(r^{m+1} + \cdots + r^n) = 1 - br^m + B\frac{r^{m+1} - r^{n+1}}{1 - r} \\ &< 1 - br^m + B\frac{r^{m+1}}{1 - r} = 1 - \frac{r^m}{1 - r}(b - br - Br) < 1, \end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad |f(z')| = \frac{|P(z' + \alpha)|}{|P(\alpha)|} < 1$$

が成り立ちます．よって，$\beta = z' + \alpha$ とおくと，$P(\alpha) \fallingdotseq 0$ ならば

$$|P(\beta)| < |P(\alpha)|$$

が成り立つことになり，$|P(\alpha)|$ が最小値であることに反します．したがって，$P(\alpha) = 0$ を満たす複素数 α が存在しなければなりません．

よって，複素係数 n 次方程式 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ は，次数 n によらずに，少なくとも 1 個の複素数解をもつことが示されました．

この基本定理から，上の n 次方程式 $P(z) = 0$ は，既に §§2.4.3 で議論したように，重複を含めて n 個の解 α_k $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ をもつことが示され，n 次多項式 $P(z)$ は

$$P(z) = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

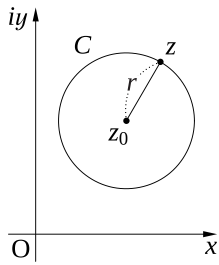
のように因数分解されます．

§10.4　複素平面上の図形と複素変換

ベクトルの方程式が図形を表すのと同じように，複素数の方程式は図形を表します．また，ベクトルの関数が変換（例えば，線形変換）を表すように，複素数の関数は複素平面上の変換を表します．この複素変換は科学・技術の両分野で重要です．

10.4.1　複素平面上の図形

10.4.1.1　円



円を表す最も簡単な方法は方程式を用いることです．方程式

$$C : |z - z_0| = r$$

は複素平面上の 2 点 z, z_0 の距離が常に一定値 r であることを表しますから，C は中心が z_0，半径が r の円を表します．

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

と実数で表すと，$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$ ですから，

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

のように表され，実平面上の方程式と同じ形になります．

平面ベクトルを用いた円 C のパラメータ表示

$$C : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

がありましたが，複素数を用いても

$$C : z = z_0 + r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

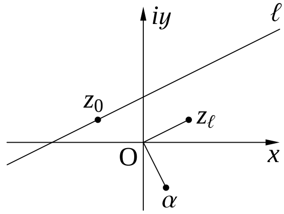
のように，円 C のパラメータ表示ができます．点 z は点 z_0 を実軸方向に $r\cos\theta$，虚軸方向に $ir\sin\theta$ だけ移動した点になっていますね．

ここで練習問題です．方程式 $z\bar{z} - (2+i)\bar{z} - (2-i)z = 0$ は複素平面上でどんな図形を表すか．ヒント：$2 - i = \overline{2+i}$ に注意します．

$$\begin{aligned} z\bar{z} - (2+i)\bar{z} - (2-i)z &= z\bar{z} - (2+i)\bar{z} - \overline{(2+i)}z \\ &= (z - (2+i))(\bar{z} - \overline{(2+i)}) - (2+i)\overline{(2+i)} \\ &= |z - (2+i)|^2 - |2+i|^2 = 0 \end{aligned}$$

のように変形されます．よって，$|z - (2+i)| = |2+i|$ が得られるので，答は，中心 $2 + i$，半径 $\sqrt{5}$ の円ですね．

10.4.1.2　直線



実平面上で，点 (x_0, y_0) を通り方向ベクトル $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ の直線 ℓ のパラメータ表示は

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は実数})$$

と表されましたね．ここで

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad z_\ell = l + im$$

とおくと，複素平面上の直線のパラメータ表示

$$\ell : z = z_0 + tz_\ell$$

が得られます．

ベクトル表現の ℓ でパラメータ t を消去するには，ベクトル方程式の両辺に法線ベクトル $\begin{pmatrix} m \\ -l \end{pmatrix}$ を内積すればよく，直線 ℓ の内積表示

$$\ell : \begin{pmatrix} m \\ -l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

が得られます．

この内積表示を複素数で表すには，ℓ の法線ベクトル $\begin{pmatrix} m \\ -l \end{pmatrix}$ に対応する複素平面上の点 $\alpha = m - il$ を導入して，内積 $\begin{pmatrix} m \\ -l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = mx - ly$ をうまく表すようにするのが理に適っています．ただし，積 αz ではうまくいかず，$\overline{\alpha} z$ を考えると

$$\overline{\alpha} z = (m + il)(x + iy) = mx - ly + i(lx + my)$$

となって $mx - ly$ が現れます．このとき実部だけが関係するので

$$\ell : \mathrm{Re}\,(\overline{\alpha} z) = \mathrm{Re}\,(\overline{\alpha} z_0)$$

のように表すことができます．なお，$\alpha = -iz_\ell$ なので，α は点 z_ℓ を O の周りに $-90°$ だけ回転した点です．

ここで練習問題です．複素平面上で方程式 $|z - \alpha| = |z - \beta|$ $(\alpha \neq \beta)$ を満たす点 z はどのような図形を描くか．ヒント：z と α の距離が z と β の距離に等しいですね．答は 2 点 α，β を結ぶ線分の垂直 2 等分線です．

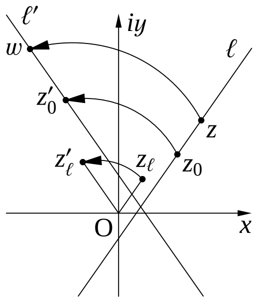
10.4.2　複素平面上の変換

平面上の点を平面上の点に移すことを平面上の **変換** といいます．複素平面上の点 z が変換 f によって複素平面上の点 w に移されるとき，これを

$$w = f(z)$$

と表し，これを複素関数といいます．このとき点 z がある図形 D 上を動くならば，一般に点 w はある図形 D' 上を動きます．このことを変換 f は D を D' に移すといい，D は原像，D' は D の像といわれます．

10.4.2.1　変換の例



複素平面上の点 z が直線

$$\ell : z = z_0 + tz_\ell \quad (z_0 = x_0 + iy_0,\ z_\ell = l + im)$$

上を動くとき，関数

$$w = f(z) = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z$$

によって得られる点 w はどのような図形上を動くでしょうか．

点 z が直線 ℓ 上にある条件 $z = z_0 + tz_\ell$ を関数に代入すると，w についての方程式，つまり ℓ が変換 f によって移った像

$$\ell' : w = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z_0 + tr\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z_\ell$$

が得られますから，点 w は点 $z_0' = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z_0$ を通り，方向ベクトルに当たる複素数が $z_\ell' = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z_\ell$ の直線上を動きますね．これは関数 $f(z)$ が点 z を原点の周りに角 α だけ回転し，r 倍した点に移すことを考えれば当然のことですね．

同じ変換によって，円 $C : z = z_0 + R\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ はどんな図形に移されるか調べましょう．

$$\begin{aligned} w &= r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z_0 + r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,R\,(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,z_0 + rR\,(\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)) \end{aligned}$$

とするまでもなく，中心 $z_0' = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z_0$，半径 rR の円に変換されることがわかりますね.

今度は円 C の方程式を

$$C : |z - z_0| = R$$

とパラメータを用いないで表し，同じ変換 $w = f(z) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ によって，円 C が移される図形 C' を考えましょう.

円 C はその方程式 $|z - z_0| = R$ を満たす点 z の集合ですね．同様に，図形 C' は C' の方程式を満たす点 w の集合です．よって，C' の方程式，つまり変数 w が関係する方程式を導けばよいわけです．w と z は変換の式 $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ によって結びつけられ，また z の方程式 $|z - z_0| = R$ は用意されています．そこで，$w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ を z について解き，w で表された z を方程式 $|z - z_0| = R$ に代入すれば w の方程式が得られますね.

$$w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z \iff z = \frac{1}{r}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\}w$$

と $|z - z_0| = R$ より，w の方程式

$$\left|\frac{1}{r}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\}w - z_0\right| = R$$

が得られます．後はこれを整理するだけです．$|\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)| = 1$ に注意すれば簡単な練習でしょう.

$$C' : |w - r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z_0| = rR$$

が得られますね．これは先ほど円 C のパラメータ表示を用いて得られた結果に一致します.

10.4.2.2　1 次分数変換

複素平面上の変換で重要なものは 1 次分数変換です．ここでは，複素平面上の円 $C : |z - a| = 1$ が変換

$$w = f(z) = \frac{1}{z - 2}$$

によって移される図形 C' を調べます．簡単のために，$a = 2,\ 1$ の場合を考えましょう.

先に議論したように，変数 z で書かれている方程式 $|z-a|=1$ を w で表せば図形 C' の方程式になります．$w=\dfrac{1}{z-2}$ より，$z=\dfrac{2w+1}{w}$，よって

$$C':\left|\frac{2w+1}{w}-a\right|=1 \iff \left|\frac{(2-a)w+1}{w}\right|=1$$

が得られるので，後はこれを整理するだけです．

$a=2$ のとき，直ちに $C':|w|=1$ となるので，C' は単位円ですね．もし，元の図形が，円 $C:|z-2|=1$ の代わりに，円 C の外側 $|z-2|>1$ ならば，移される図形は不等式

$$\left|\frac{1}{w}\right|>1 \iff |w|<1$$

で表されるので，単位円の内側になりますね．

$a=1$ のときは，

$$C':\left|\frac{w+1}{w}\right|=1 \iff |w+1|=|w|$$

だから，C' は 2 点 -1，0 から等距離にある点の軌跡，つまり直線 $\mathrm{Re}\,w=-\dfrac{1}{2}$ になります．

では，ここで問題です．上の問題で $a=0$ の場合には C' はどんな図形となるか．ヒント：$C':\left|\dfrac{2w+1}{w}\right|=1$ となります．（これを

$$C':\frac{\left|w+\dfrac{1}{2}\right|}{|w|}=\frac{1}{2}$$

と変形して，アポロニウスの円に気づくのは初めての人には難しいでしょう）．今の場合 $w=u+iv$（u，v は実数）とおいて，u，v の方程式を求めるのが確実な方法です．C' の方程式に代入して整理すると

$$C':\left(u+\frac{2}{3}\right)^2+v^2=\frac{1}{9}$$

が得られるので，C' は中心 $-\dfrac{2}{3}$，半径 $\dfrac{1}{3}$ の円です．C' の方程式を w で表すには，

$$\left(u+\frac{2}{3}\right)^2+v^2=\left|u+\frac{2}{3}+iv\right|^2=\left|w+\frac{2}{3}\right|^2$$

より $C':\left|w+\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$ と表すことができます．

最後に興味ある問題をやってみましょう．変換

$$w = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

によって複素平面の上半面 D : $\mathrm{Im}\, z > 0$ はどのような領域に移るか．まず，変換式 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ を z について解いて，不等式 $\mathrm{Im}\, z > 0$ を w で表すのは今までと同じです．

$$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\left(-i\,\frac{w+1}{w-1}\right) > 0 \qquad (w \neq 1)$$

となるので，後はこれをうまく整理すればよいですね．分母を実数にするために，分母・分子に $\overline{w-1}$ を掛けると

$$\mathrm{Im}\left(-\,i\,\frac{(w+1)\overline{(w-1)}}{|\,w-1\,|^2}\right) > 0$$

となりますが，分母の $|\,w-1\,|^2 > 0$ より，この条件式は

$$\mathrm{Im}\left(-i(w+1)\overline{(w-1)}\right) > 0$$

と簡単になります．ここで

$$\mathrm{Im}\,(-i(a+ib)) = -a = -\mathrm{Re}\,(a+ib) \qquad \text{（}a,\ b\text{ は実数）}$$

ですから，さらに簡単になり，

$$-\mathrm{Re}\left((w+1)\overline{(w-1)}\right) > 0 \iff \mathrm{Re}\left(|\,w\,|^2 - (w-\overline{w}) - 1\right) < 0$$

となります．ここで，$w - \overline{w} = 2i\,\mathrm{Im}\, w$ より，最終的に

$$|\,w\,|^2 - 1 < 0 \iff |\,w\,| < 1$$

が得られます．よって，変換 $w = f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ によって，複素平面の‘上半面が単位円の内部に移されます’．このような変換は理論的に重要なものです．なお，この変換によって無限遠 $|\,z\,| = \infty$ は 1 点 $w = 1$ に移されることを確認しましょう．

10.4.3　非線形変換と非実数性

前の §§ で議論した複素変換 $w = f(z)$ を，$w = u + iv$，$z = x + iy$ と実変数を用いて表してみましょう．例えば，$f(z) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ は行列の章で議論した線形変換

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数})$$

の形になりますが，多くの場合は，例えば $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ のように，線形変換では表すことができない，**非線形変換**

$$\begin{cases} u = f(x,\ y) \\ v = g(x,\ y) \end{cases} \qquad (f(x,\ y),\ g(x,\ y) \text{ は実数関数})$$

の形になります．$w = f(z)$ の形の変換は上の形に書けますが，その逆は一般に成り立ちません．

線形変換の場合は，変換式を $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すと明らかなように，A^{-1} があるときは，当然のことながら同値関係

$$x,\ y \text{ が実数} \iff u,\ v \text{ が実数}$$

が成り立ちます．非線形変換の場合にも，先に議論した例については，変換式 $w = f(z)$ および z を w で表した式からわかるように「$x,\ y$ が実数 $\Leftrightarrow$ $u,\ v$ が実数」が成り立ちます．しかしながら，このことは実数変数で表された一般の非線形変換については成り立ちません．以下，受験生を悩ませた典型的問題で例解しましょう．

その非線形変換は

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

という簡単なものです．$x,\ y$ が実数のとき $u,\ v$ は実数であるのは明らかです：

$$x,\ y \text{ が実数} \implies u,\ v \text{ は実数}.$$

逆に u, v が実数のとき x, y は実数となるかどうか調べましょう．上の関係式を x, y について解きます．$v = xy = x(u-x) = (u-y)y$ より，2 次方程式，つまり非線形方程式

$$x^2 - ux + v = 0, \qquad y^2 - uy + v = 0$$

が得られ，$u = x + y$ に注意すると

$$x,\ y = \frac{u \pm \sqrt{D}}{2}, \qquad D = u^2 - 4v$$

となります．このとき $v = xy$ が成り立つことに注意すると

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases} \Leftrightarrow\ x,\ y = \frac{u \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = u^2 - 4v$$

であることがわかります．

上の同値関係は，x, y が実数であるときはもちろん，それらが互いに複素共役な虚数のとき（$D < 0$ のとき）も u, v は実数になることを表しています．実際，p を任意の実数，q を任意の負数とするとき，

$$x,\ y = \frac{p \pm \sqrt{q}}{2} = \frac{p \pm i\sqrt{-q}}{2}$$

は実数の

$$u = p, \quad v = \frac{p^2 - q}{4}$$

を与えます．このように，非線形変換においては‘u, v を実数に制限しても x, y が実数にならない場合’があります．

このような現象のために，次の非線形問題は要注意です．

点 $P(x, y)$ は原点を中心とし半径 1 の円（単位円）の内部を動く．このとき，変換 $u = x + y$，$v = xy$ によって移された点 $Q(u, v)$ の動く領域を求めよ．ヒント: u と v の満たす不等式を求めます．

点 $P(x, y)$ は単位円内にあるので，変換式を利用して

$$x^2 + y^2 < 1 \ \Leftrightarrow\ (x+y)^2 - 2xy < 1 \ \Leftrightarrow\ u^2 - 2v < 1 \ \Leftrightarrow\ v > \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$$

が得られます．このとき，点 $(x,\ y)$ は単位円内にあるのに $v > \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$ だって！　もしそうなら，点 $(u,\ v)$ は無限遠の点が可能？　これは変だ！と嗅ぎつけます．そこで，$u = x + y$，$v = xy$ から

$$x,\ y = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2}$$

を求めて，x，y が虚数でも u，v は実数になることに気づき，条件

$$D = u^2 - 4v \geqq 0 \ \Leftrightarrow\ v \leqq \frac{u^2}{4}$$

をつけ加えます．

以上の議論から，点 $Q(u,\ v)$ の動く領域は xy 平面上であることに注意すると，変数 u，v で書かれた条件を変数 x，y で書き直し，

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} < y \leqq \frac{x^2}{4}$$

が得られます．作図は君たちに任せましょう．