第2章　微分・積分の基礎

数学が最も重要な基礎学問であると認識されるようになったのは，自然の法則が微分を用いて表現され，自然の現象が積分を用いて予知され，それらが物理学・化学を筆頭とする自然科学に応用されて産業革命が起こり，我々が豊かな生活を送れるようになったからである．この章では，微分・積分学の歴史的背景を見ながら，それらの基礎を学ぼう．

§2.1　消滅してゆく量の最後の比 — 無限小から極限へ

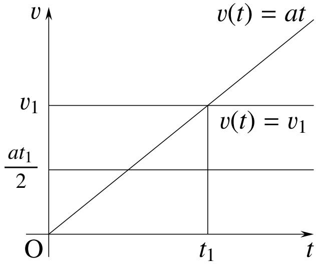
ニュートン（1642～1727）がケンブリッジ大学で学位を得た 1665 年にペストが大流行して大学が閉鎖された．故郷に疎開した 1 年半の間にニュートンは研究・思索に没頭し，微積分学を構築し，万有引力を発見した．彼は，物体の運動つまり対象とする量が時間に依存する場合の研究に着手し，無限小の手法を駆使して壮大な仕事をなしとげた．無限小については，円の式を用いた場合に既に解説した（☞ p.44）．ここでは，ニュートンが無限小を幾何学的に利用して，万有引力の逆 2 乗法則を導いた例（円運動の場合）を見てみよう．

先ずは準備から．コペルニクスによる地動説はガリレオ（Galileo Galilei, 1564 年～1642，イタリア）によって 1610 年頃から強力に推進され，1618 年には **ケプラーの 3 法則** が揃った：

第 1 法則　惑星の軌道は，太陽を 1 つの焦点とする楕円である．

第 2 法則　惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は，一定である．

第 3 法則　惑星の公転周期の 2 乗は，楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する．



また，瞬間速度や等加速度運動の概念は既に中世の時代から知られていた（☞ p.30）．物体の速度 $v(t)$ が時間 t に依らずに一定 v_1 のとき，その移動距離 $x(t)$ は $x(t) = v_1 t$ で表されるが，物体が等加速度運動 $v(t) = at$（a は等加速度を表す定数）をするときは，ガリレオが示したように初速が 0 のとき $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ で表される[1]．

1687 年，ニュートンは『プリンキピア（自然哲学の数学的諸原理）』[2] を著し，運動の 3 つの基本法則を述べた：

運動の第 1 法則（慣性の法則）　すべての物体は，加えられた力によってその状態が変化させられない限り，静止あるいは 1 直線上の等速運動の状態を続ける．

運動の第 2 法則　運動の量（＝質量 m × 速度 $\vec{v}$）の変化は，加えられた力 $\vec{F}$ に比例し，その力の方向を向く．（$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$）

運動の第 3 法則（作用反作用の法則）　すべての作用（＝力）に対して，それと大きさが等しく反対向きの反作用が存在する．すなわち，2 つの物体の間で互いに働きあう相互作用は常に大きさが等しく，反対方向を向く．

万有引力 は質量のある物体間に働く，それらの距離の 2 乗に反比例する，引力である．整理すると，質量が m と M，距離が r の 2 つの物体に働く引力の大きさ F は

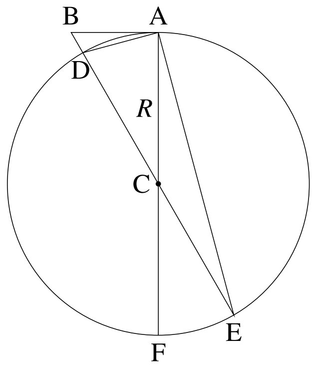
$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad (G \text{ は定数})$$

と表される．万有引力と運動の 3 法則からケプラーの 3 法則が導かれ，また逆に，ケプラーの 3 法則と運動の 3 法則から万有引力が導かれる．楕円の場合は複雑になるため，我々は円軌道（円は特別な楕円）の場合にケプラーの第 3 法則から引力の逆 2 乗法則 $F \propto r^{-2}$ を導くことを試みよう．

---

1) 時間 t_1 までの移動距離 $x(t_1)$ を考える．$0 \leqq t \leqq t_1$ のとき，$v(t)+v(t_1-t) = at+a(t_1-t) = at_1$ と一定になるので，$0 \leqq t \leqq t_1$ の平均速度は $\frac{at_1}{2}$．よって移動距離は $x(t_1) = \frac{at_1}{2}t_1 = \frac{1}{2}at_1^2$.

2) 『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義』（中村誠太郎 監訳，講談社）．
和田純夫 著『プリンキピアを読む』（ブルーバックス，講談社）．



地球 A が太陽 C の周りを回る公転軌道はほとんど円に近い楕円である．ここでは簡単のために，円軌道としよう．また，万有引力が太陽と地球の距離 R にのみ依存する中心力であると仮定しよう．ニュートンはその距離 R がそれらの重心 A と C の間の距離 AC であることを証明した．円運動の場合であるから，地球 A は太陽 C を中心とする半径 R の円周上を等速 v で周回する．公転周期（1 周する時間）を T とすると $vT = 2\pi R$ である．地球 A が微小な円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ を移動するのに要する微小時間を $\varDelta t$ とすると $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} = v\varDelta t$ である．微小時間 $\varDelta t$ は，『プリンキピア』においては無限小量 o（☞ p.44）と考える必要は必ずしもなく，極限操作によって 0 に近づく量である．

さて，運動の第 2 法則より，万有引力 $\vec{F}$ は地球の **加速度** $\vec{a}$（速度の変化率）に比例するから，距離が一定な円周上では，万有引力の大きさ F および中心 C に向かう地球の加速度の大きさ a は一定で，$a \propto F$ である．地球が微小時間 $\varDelta t$ に微小な円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ を移動することについて，ニュートンの解説は独創性に溢れている．すなわち，地球 A は，慣性の法則によって軌道の接線方向 AB（AB⊥AC）に飛んでいこうとする（中心 C 方向への初速は 0）が，しかしながら，万有引力によって B から D まで引かれる（落下する）（その結果，軌道上の等速運動が残る）．したがって，落下距離 BD は前ページのガリレオの公式をもちいて $\mathrm{BD} = \frac{1}{2}a(\varDelta t)^2$ と表される．等式 $\mathrm{BD} = \frac{1}{2}a(\varDelta t)^2$ は厳密には $\varDelta t$ が瞬間（＝無限小時間）の場合に成り立つ近似式である．以下，『プリンキピア』的正当化を見よう．

$\frac{1}{2}a(\varDelta t)^2 = \mathrm{BD}$ における加速度の大きさ a が万有引力の大きさ F に比例することに着目し，$\varDelta t \to 0$ のとき $a \propto R^{-2}$，したがって，$F \propto R^{-2}$ を導こう．まず，$vT = 2\pi R$ と $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} = v\varDelta t$ から v を消去すると，$\varDelta t = T \cdot \overset{\frown}{\mathrm{AD}}/(2\pi R)$．これを $\frac{1}{2}a(\varDelta t)^2 = \mathrm{BD}$ に代入すると，

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{T \cdot \overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{2\pi R}\right)^2 = \mathrm{BD}.$$

BD については，$\angle\mathrm{CAB} = \angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{R}$ より，$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{CAE} = \angle\mathrm{BAD}$ だから（※ $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{EBA}$），$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{EBA}$．したがって，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}, \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}}.$$

上の第 1 式を用いて，

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{T\cdot\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{2\pi R}\right)^2 = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}}, \text{ よって }\quad a\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AD}} = \frac{8\pi^2R^2}{T^2\mathrm{AE}}$$

が得られる．ここで，A を固定して，$\varDelta t \to 0$ の極限，したがって D→A，B→A および E→F の極限を考える．ここで，$\mathrm{AD} < \overset{\frown}{\mathrm{AD}} < \mathrm{AB}$[3] に注意すると，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} < \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB}} < 1 < \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AD}} < \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$$

だから，$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}} \to \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AF}} = 1$ を用いると極限値が求まる：

$$a = \frac{8\pi^2R^2}{T^2\cdot 2R} = \frac{4\pi^2R}{T^2}.$$

ニュートンは $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ のように $\frac{0}{0}$ の形の極限を持つような場合を『プリンキピア』の中で“消滅してゆく量の最後の比”と呼んだ．結局，$\frac{1}{2}a(\varDelta t)^2 = \mathrm{BD}$ のように $\varDelta t$ が無限小のときに成り立つ関係は，$a = \dfrac{2\mathrm{BD}}{(\varDelta t)^2}$ と消滅してゆく量の比をとり，“最後の比” $\displaystyle\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{2\mathrm{BD}}{(\varDelta t)^2}$（比の **極限値** ）を求めるのが正しい処方だった[4]．

　最後に，ケプラーの第 3 法則 $T^2 \propto R^3$ を用いると

$$a \propto \frac{4\pi^2R}{R^3} \propto R^{-2}.$$

したがって，万有引力の逆 2 乗法則 $F \propto R^{-2}$ が成り立つ．

---

3) $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} < \mathrm{AB}$ は扇形 $\mathrm{C}\overset{\frown}{\mathrm{AD}} < \triangle\mathrm{CAB}$ つまり $\pi R^2\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{2\pi R} < \frac{1}{2}R\cdot\mathrm{AB}$ より得られる．

4) 関数 $f(x)$ について，x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が α に限りなく近づくならば，$f(x)$ は極限値 α に収束するといい，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ または $f(x) \to \alpha$ $(x \to a)$ と表す．一般に，$\alpha = f(a)$ とは限らず，さらに $f(a)$ が存在しない場合もあることに注意しておこう．例：$f(x) = x/x$, $a = 0$.

§2.2　微積分記号 d と $\int$ — 微積分学の基本定理の起源

ライプニッツ（1646〜1716）は 17 才のときイェーナ大学で高度な数学に触れ，そしてそこで受けた講義に強い影響を受けて，生涯にわたって普遍学—哲学や思想のあらゆる認識を公理から記号的演算によって演繹的に導こうという企て—を追求することになった（☞ p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』§12.6）．数学における記号の重視もその一環であった．彼の構想は，数学の分野で，20 世紀の公理論としてようやく成就する．

ライプニッツの微分積分学が生まれるための着想は，**数列**[5] の和と差に関する逆の関係に基づくものであった．数列 $\{a_n\}$ の**階差** $b_n = a_{n+1} - a_n$ から始めよう（☞ p.16 の脚注『高校数学 + α』§§11.1.3）（ここでは $\{a_n\}$ の階差を $\varDelta a_n$ と書く）．数列 $\{a_n\}$ の和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

に対して，その階差 $\varDelta a_n = a_{n+1} - a_n$ からなる階差数列 $\{\varDelta a_n\}$ の和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \varDelta a_k &= \varDelta a_1 + \varDelta a_2 + \cdots + \varDelta a_{n-1} \qquad\qquad (n \geqq 2)\\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})\\ &= a_n - a_1\end{aligned}$$

は数列 $\{a_n\}$ の第 n 項と初項との差に等しい[6]．同様に，数列 $\{a_n\}$ の項の和からなる数列 $\{s_n\}=\{\sum_{k=1}^{n-1} a_k\}$ に対して，階差 $\varDelta s_n = s_{n+1} - s_n$：

$$\varDelta s_n = \varDelta \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$$

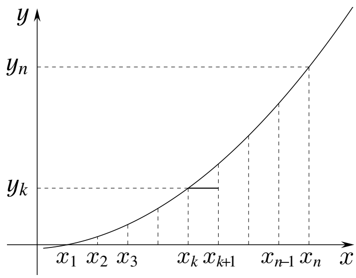
は元の数列 $\{a_n\}$ の項を与える．$a_1 = 0$ のとき，$\varDelta \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varDelta a_k = a_n$ が成り立つことに注意しよう．

---

5) $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ のように，番号を付けた数の並びを数列といい，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または簡単に $\{a_n\}$ で表す．それぞれの数を **項**，初めの項を**初項**，n 番目の項を**第 n 項**という．

6) 階差の威力を確認しておこう．例えば，数列 $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ は $a_n = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ だから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

ライプニッツはこのような関係を xy 平面上の曲線に対して拡張することを試みた．区間 $[x_1, x_n]$ を多くの区間に分割し，分点 x_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ に対応する曲線の y 座標を y_k とする．分割間隔 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ は一定でなくともよい．こうして，数列 $\{y_k\}$ が得られる．$\sum_{k=1}^{n-1}$ を $\sum$ と略記すると，$y_1 = 0$ のとき，先の階差の議論と同様にして $\sum \Delta y_k = y_n$，$\Delta \sum y_k = y_n$ が得られ，両者は一致する．



さらに，彼は分割点 x_k を無数に多くとり，分割間隔 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ が無限小 dx となる場合の議論を試みた．このとき，階差 $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ も無限小 dy となり，$\sum \Delta y_k = y_n$ において y_n を y と書き，無限個の和 (Sum) を表す場合に記号 $\sum$ を $\int$ で表すと，$\int dy = y$ となる．このとき，$\Delta \sum y_k = y_n$ は，形式的には，$d \int y = y$ を与えるので，$\int dy = d \int y = y$ となる．しかしながら，$\int y = \sum_{k=1}^{n-1} y_k$ は無数の有限な y_k の和であるから，それが有限になることはまず無い．つまり，$\int y$ は，無限大になって，そもそも定義できない．そこで，ライプニッツは有限な $y\,(= y_k)$ を無限小の面積 $y\,dx\,(= y_k \Delta x_k)$（高さが y_k，幅が無限小である $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ の長方形）にとり替えた．このようにして，$\int y\,dx\,(= \sum_{k=1}^{n-1} y_k \Delta x_k)$ は区間 $[x_1, x_n]$ における曲線と x 軸の間の面積[7)]と解釈できる．このとき，$d \int y\,dx = y\,dx$（$\Delta \sum_{k=1}^{n-1} y_k \Delta x_k = y_n \Delta x_n$．$\Delta x_n = \Delta x_{n-1}$ とする）は全体の図形の面積から右端にある無限に細い長方形の面積を取り出すことを意味する．関係式 $d \int y\,dx = y\,dx$ は，現在の数学では，両辺を dx で割って無限小量が顕わには現れないよう

$$\frac{d}{dx} \int y\,dx = y$$

のように表され，**微積分学の基本定理** と呼ばれている．

$\{x_k\}$ や $\{y_k\}$ の階差 Δx_k，Δy_k から得られた無限小量 dx，dy はまさに **微分** と呼ばれるものである．一方，無限個の和を表す意味で導入された記号 $\int$ は Sum の頭文字から得られ，**積分記号** といわれる．

以上の議論は §2.6 でより詳細により厳密に議論し直される．

---

7) 曲線が x 軸より上にあるときは面積であるが，部分的にでも下にあるときは，文字通りの面積とは解釈できず，**積分値** と呼ばれる．

§2.3　導関数

デカルトの『幾何学』（1637）（☞ p.34）において座標を用いる方法の基礎が明らかになり，そのおかげで，変数を用いる代数と図形を表す幾何の関係が密接なものになった．変数 x, y で表された代数方程式は x 軸・y 軸を座標軸とする平面上の図形として表される．x, y の代数方程式は，横軸の変数 x の値に対応して縦軸の変数 y の値がただ 1 つ定まる **関数** の場合に，取り扱いがたやすくなる．例えば，$y^4 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{x}$ では，関数 $y = \sqrt[4]{x}$ と関数 $y = -\sqrt[4]{x}$ に分けて考える方がよい．関数 (function) という用語は 1673 年にライプニッツが「（あれこれの働きをする量の）役割」の意味で用いた．関数は，よく知られているように，一般に $y = f(x)$ のように表す[8)]．関数の概念を導入する必然性は，微分に関連する問題を統一的で一貫した立場で取り扱えるようにすることにあった．**導関数** — 関数を微分して得られるものがまた関数 — の存在がそれを強力に推進した．

物体には重力・電磁力・その他多くの力が働く．ある物体の空間座標を (x, y, z)，それに働く力 $\vec{F}$ の x, y, z 方向成分を F_x, F_y, F_z とすると，x, y, z はそれぞれ F_x, F_y, F_z のみに支配される．つまり，F_x, F_y, F_z は陰に陽に時間（時刻）t に依存し，x は F_x のみに依存して，y は F_y のみに依存して，z は F_z のみに依存して，それぞれ t の関数として原理的には定まる：$x = f(t), y = g(t), z = h(t)$．これらの式は，数学においては一般化・抽象化されて，関数 $y = f(x)$ などと代表して表現される．

関数 $y = f(x)$ において，x を時刻 t，y をある物体の z 座標（高さ）としたとき，その物体の速度の z 成分（z 方向の速度）を求めることから始めよう．時刻 $x = a$ における瞬間速度を求めるときには，瞬間（＝無限小時間 dt）の概

8) 古くは整式，3 角関数，指数関数，対数関数などの具体的な数式で表されるものだけが関数として扱われていたが，関数概念の発展とともにその制限はとり除かれた．また，x のとり得る値の変域を連続領域とする制限も取り除かれ，変域の各 x にただ 1 つの実数（または複素数）$f(x)$ を対応させることだけが関数の条件となった．例えば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は自然数の上で定義された関数 $f(n) = a_n$ と見ることができる．
上の関数の定義では，x に対してただ 1 つの値 $f(x)$ が対応するが，場合によっては，複数の値をとるものも関数ということがある．このような関数を **多価関数** と呼び，上で定義した通常の関数を **1 価関数** という．例えば，円 $x^2 + y^2 = r^2$ は 2 価関数 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ と同じである．

念が曖昧なので，有限の時刻差 $\Delta x\,(\gtreqless 0)$ の間の平均速度から考えなければならない．平均の速さ (speed) が「動いた距離 / 要した時間」であるのに対して，負の値も考慮した **平均速度** (velocity) は「位置の差 / 時刻の差」によって定義される．したがって，時刻 $x = a$ と $x = a + \Delta x$ の間の平均速度は，位置の差 $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ を用いて

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

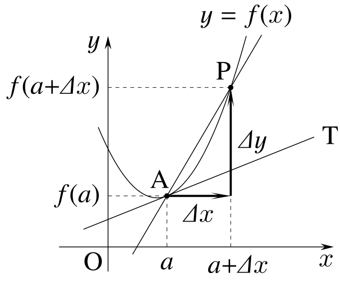
と定められる[9]．時刻 $x = a$ の瞬間速度を求める正しい処方は，ニュートンが“消滅してゆく量の最後の比”（☞ p.64）と呼んだ，分子・分母が共に 0 に限りなく近づいていく場合の比の極限を求めることであり，一般化に耐える方法であった：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (= c \text{ とおく}).$$

ここで，$\Delta x \to 0$ は $\Delta x\,(\gtreqless 0)$ が，0 で割らないように条件 $\Delta x \neq 0$ を満たしながら，任意の方法で 0 に限りなく近づいていくことを意味し，lim は近づいていった極限の値を求めることを意味する．このとき，その極限の値が存在する（＝有限なただ 1 つの値になる）ときは，$x = a$ で瞬間速度が定義できることを意味する．一般の関数 $y = f(x)$ に対して上の極限値が存在するとき f は a で **微分可能** であるという．このとき，極限値 c を f の a における **微分係数** といい，$f'(a)$，$\dfrac{df}{dx}(a)$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ などと表される：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \left(= \frac{df}{dx}(a)\right).$$

以上の極限操作の意味を関数 $y = f(x)$ のグラフを用いて調べよう．グラフ上に 2 点 A$(a,\ f(a))$，P$(a + \Delta x,\ f(a + \Delta x))$ をとると，平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は‘直線 AP の傾き’を表す．ここで，P → A とする，つまり点 P をグラフの曲線に沿って点 A に，P ≠ A の条件付で，任意の方法で限りなく近づける．A の付近で行きつ戻りつしながら近づいても構わない．このとき，$\Delta x \to 0$ となるので，



[9] 一般の関数 $y = f(x)$ においては，Δx, Δy は x, y の **増分**，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は **平均変化率** と呼ばれる．

直線 AP の傾きは微分係数 $f'(a)$ の値に限りなく近づく．したがって，直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づいていく．この直線 AT を関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における **接線**，A をその **接点** と定める．よって，微分係数 $f'(a)$ はグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における‘接線 AT の傾き’を意味する．

微分可能性を具体的に調べてみよう．

例 1：$y = f(x) = x^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．この場合，

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^n - a^n}{\Delta x}$$

なので，公式

$$\begin{aligned} x^n - a^n &= (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= (x-a)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}a^{k-1} \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^n - a^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x - a)\sum_{k=1}^{n}(a+\Delta x)^{n-k}a^{k-1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}(a+\Delta x)^{n-k}a^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}a^{k-1} = na^{n-1} \end{aligned}$$

のように $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が定まる[10]．実際，分母の Δx は分子に表れるそれによって打ち消され，$(a+\Delta x)^{n-k}$ は，Δx が（0 とならずに）0 にいくらでも近づくとき，極限値 a^{n-k} に近づく：

$$y = f(x) = x^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)\ \text{のとき}\ f'(a) = na^{n-1}.$$

---

[10] 今のところ，関数の極限に関して成り立つ以下の基本定理は証明なしで使うことにしよう．（今の場合，x を $a+\Delta x$ に置き換え，$\lim_{a+\Delta x\to a}(\cdots) = \lim_{\Delta x\to 0}(\cdots)$ を用いる）．

$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ が有限な一定値になる(収束する）とき

(1°)　$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$　（k は定数），

(2°)　$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$　（複号同順），

(3°)　$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$,

(4°)　$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$　$(g(x) \neq 0,\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$.

例 2：$y = f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ のとき，微分係数 $f'(a)$ $(a > 0)$ を求める．

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{a + \Delta x} - \sqrt{a}}{\Delta x}$$

だが，$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \dfrac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ に注意すると，

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x) - a}{\Delta x\,(\sqrt{a + \Delta x} + \sqrt{a})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{a + \Delta x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

したがって，$f(x) = \sqrt{x}$ $(= x^{\frac{1}{2}})$ のとき，$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ $(= \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}})$ $(a > 0)$.

例 3：$y = f(x) = 1/\sqrt{x}$ $(= x^{-\frac{1}{2}})$ のとき

$$f'(a) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}} \ \left(= -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\right) \ (a > 0)$$

である．これを示そう．

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a + \Delta x}}{\Delta x\sqrt{a + \Delta x}\sqrt{a}}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{a + \Delta x} - \sqrt{a}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{a + \Delta x}\sqrt{a}}.$$

ここで，関数の極限に関する基本定理を用い，例 2 に習うと

$$f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}.$$

例 4：$f(x) = x^{-k} = 1/x^k$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$f'(a) = -ka^{-k-1}$$

となることを示そう．$k = 0$ のとき $f(x) = 1$ より $f'(a) = 0$．$k > 0$ の場合，

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(a+\Delta x)^k} - \frac{1}{a^k}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x)^k - a^k}{\Delta x(a + \Delta x)^k a^k}$$

において，極限の基本定理を用い，例 1 に習うと

$$f'(a) = -ka^{k-1}\frac{1}{a^k a^k} = -ka^{-k-1}.$$

例 5：$f(x) = x^k\sqrt{x} = x^{k+\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$f'(a) = \left(k + \frac{1}{2}\right) a^{k-\frac{1}{2}} \quad (a > 0)$$

を示すのは練習問題としよう．

$f(x) = x^{\alpha}$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は a を正の定数としたが，実際には，任意の正の実数 a に対して $f'(a)$ を考えることができる．つまり，$f'(a)$ は a を変数とする関数と見なせる．このことをすっきり表すために $f'(a)$ の a を x で置き換え，その結果として得られる関数 $f'(x)$ $(= \{f(x)\}')$ を関数 $f(x)$ の **導関数** と呼ぶことにする：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

我々の扱う殆ど全ての関数は微分可能であり，導関数が存在する．

導関数を求める問題として，$f(x) = x^{\alpha}$ のべき α を（先に調べた整数や半整数の場合から）一般の有理数：$\alpha = \dfrac{m}{n}$ （m は整数，n は自然数）の場合に拡張して調べよう．$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$（$n$ が偶数のとき $x > 0$），$m < 0$ のとき $x^{\frac{m}{n}} = 1/x^{\frac{|m|}{n}}$ である．$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ の両辺を n 乗すると，$f(x)^n = x^m$．よって，両辺の導関数 $\{f(x)^n\}' = \{x^m\}'$ において，右辺は，先の例より，$\{x^m\}' = mx^{m-1}$．左辺を求めよう．

$$\begin{aligned}
\{f(x)^n\}' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)^n - f(x)^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x + \Delta x) - f(x)\}}{\Delta x} \sum_{k=1}^{n} f(x + \Delta x)^{n-k} f(x)^{k-1} \\
&= f'(x) \times \{nf(x)^{n-1}\} = nf'(x)x^{\frac{m}{n}(n-1)}.
\end{aligned}$$

したがって，$nf'(x)x^{\frac{m}{n}(n-1)} = mx^{m-1}$ だから，

$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{m-1-\frac{m}{n}(n-1)} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

したがって，

$$\{x^{\alpha}\}' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \text{ は有理数})$$

が成立する．上の公式は無理数の α に拡張できるであろう．つまり残った仕事はべき α が任意の実数でよいと示すことである．そのためには対数関数の微分の知識を得るまで待とう．

§2.4　$\varepsilon - \delta$ 論法による証明

この § では，$\varepsilon - \delta$ 論法の歴史，関数の極限に関する基本定理の証明に加えて，一様連続や一様収束などの概念の基礎を学ぼう．

2.4.1　$\varepsilon - \delta$ 論法の歴史

微分係数の具体的な計算において，関数の極限に関する基本定理（☞ p.69）（例えば，$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$）を証明なしで用いたが，その証明は極限の概念の範疇(はんちゅう)では無理である．たとえば，$x \to a$ は‘x が a に限りなく近づく（ただし，$x \neq a$）’状態を表すが，これを，普通の証明において利用できるように，x は a に近いある定数などとすることはできない．特に，$x \to 0$（限りなく 0 に近づく）を考えたり，その逆数に対応する $x \to 1/0$（限りなく無限に近づく）を考えると，極限は無限小や無限大と隣り合わせに存在していることがわかる．このことは極限それ自身をうまく飼い慣らして役立たせるのは非常に難しいことを意味している．

数学は，できるだけ少ない基本仮定から出発して，それ以外の正しい命題を全て証明するように宿命づけられた学問である．関数の極限に関する基本定理（と現在呼ばれる命題）も証明されるべきものと見なされたのは当然のことであった．

極限を正しく取り扱う方法の起源は古代ギリシャ時代まで遡(さかのぼ)る．エウドクソス（☞ p.11）は，面積や体積を理論的に正しい計算をするために，17 世紀に「取り尽くし法」と名づけられた方法を用いた．それを簡単な例で解説しよう：長さ a の線分とそれよりずっと短い線分 ε が与えられたとしよう．いま，a の線分の半分を取り除くと，$a_1 = a/2$ の線分が残る．さらに，a_1 の半分を取り除くと $a_2 = a/2^2$ が残る．さらに，半分，半分と取り除いていくと，n 回目には $a_n = a/2^n$ の長さの線分が残る．取り除く回数 n を多くすれば，ε をいかに小さく定めようとも，a_n は ε より小さくできる．これは，実質的に $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を意味する．つまり，$n \to \infty$ の極限で長さ a の線分は取り尽くされる．

19 世紀前半の優れた数学者 コーシー（☞ p.46）は，厳密性を求めて書かれた著書『解析学教程』（1821）において，取り尽くし法のアイデアを基にして極限を定義した（わかりやすくするため，少々脚色する）：

> 1 つの変数 y の引き続く一連の値 y_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が，1 つの定まった値 α に限りなく近づき，最終的には，引き続く一連の値 y_n と α の差が望むだけ小さな値 ε (> 0) より小さくなるならば，この定まった値 α は，一連の値 y_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の 極限 と呼ばれる[11]．

コーシーは‘極限の定義に，任意に（小さく）とれる普通の数 ε を考えた[12]’ことに注意しよう．これによって，極限 — 限りなく近づく—という制御不可能な概念は通常の数の概念に置き換わった．彼は，極限の概念を関数に適用するとき，変数 y を関数 $y = f(x)$ の意味で用い，一連の値 y_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ には関数値 $y_n = f(x_n)$ を考えた．

ここで，関数の極限と $\varepsilon - \delta$ 論法（☞ p.46）との関係を調べておき，引き続く議論に役立たせよう．現代数学では関数の極限は次のように定義される：

> ‘$f(x) \to \alpha$ $(x \to a)$ $(\lim_{x \to a} f(x) = \alpha)$’とは‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し（選べて），$0 < |x - a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ’ことである．

$\varepsilon - \delta$ 論法がいわゆる極限の自然な拡張であることを見よう．$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ において，$\varepsilon \to 0$ を考えてみる．このとき，$|x - a| \to 0$ のとき $|f(x) - \alpha| \to 0$，つまり‘$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$’—極限— が得られる．逆に，極限を単に有限に拡張してみよう．‘$0 < |x - a| < \delta$ のとき $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$’とするだけでは問題が起こる．小さい δ に対して同程度に小さい ε が期待されるが，実際に

---

11) その現代的な書き方は無限数列 $\{y_n\}$ の極限値の定義そのものである：
‘$y_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ $(\lim_{n \to \infty} y_n = \alpha)$’とは，‘任意に選んだ正数 ε に対して或る番号（自然数）N が存在し（選べて），$n > N$ となる全ての自然数 n に対して $|y_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ’ことである．（これは，$\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる，数列用の $\varepsilon - \delta$ 論法による極限値の定義である）．

12) 文字 ε が実際に用いられたのは，その著書の分数関数の極限に関する定理の証明において，“ε を望むだけ小さい数とすると，$x \geqq h$ で，$k - \varepsilon < f(h+1) - f(h) < k + \varepsilon$ となるような h が存在する”という記述が最初である．

はそうはならない場合がある．$f(x)$ が $x = a$ 付近で極端な増（減）をする場合（例えば，$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$，$f'(x) = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$）を考えると，$\delta$ が極めて小さくとも ε は遥(はる)かに大きいこともある．それを解決するために，ε の方を先に定めて，‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し（選べて）’というお呪(まじな)いを付けるわけです．

$\varepsilon - \delta$ 論法の歴史に戻ろう．$\varepsilon - \delta$ 論法が明確に現れたのはコーシーの 1823 年の著作『無限小解析要論』における定理である：「関数 $f(x)$ は区間 $[x_0, X]$ で連続とし，この間での導関数 $f'(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．このとき，$m < \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} < M$ が成り立つ」．彼はこの定理の証明を「δ と ε を 2 つの十分に小さい正数とするとき，$|\varDelta x| < \delta$ となる $\varDelta x$ と区間 $[x_0, X]$ の任意の x に対し，不等式 $f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x} < f'(x) + \varepsilon$ が成り立つような δ を選ぶ.」という記述から始めている．$\varepsilon - \delta$ 論法の名前の語源はここにある．残念ながら，その記述には重大な見落としがあり，それに気づくのに数十年もかかったが，結果として 一様連続 や 一様収束 という極めて重要な概念を産みだし，$\varepsilon - \delta$ 論法の有用性が明らかになった[13)]．それらの概念については §§2.4.3 で別途議論しよう[14)]．$\varepsilon - \delta$ 論法はワイエルシュトラス (☞ p.46) による 1860 年代の講義のなかで完成された．

---

13) 彼は‘正数 ε が与えられたとき，任意の x に対し，不等式 $f'(x)-\varepsilon < \frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x} < f'(x)+\varepsilon$ $\left(\left|\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x} - f'(x)\right| < \varepsilon\right)$ が成立する $\delta\,(> |\varDelta x|)$ を選ぶ’として議論を進めた．つまり，不等式は各 x についてのものであるのに対して，δ は x に依らない共通の値が選べるとしている．しかしながら，関数 $f(x)$ は，連続だが，x の変化に応じて病的に増（減）する部分区間がある場合には，δ は，ε に依存するだけでなく，x に依存していくらでも小さく取らねばならない場合があることが後に判明した．現在，x に依存しない δ が選べる場合は，関数 $f(x)$ が与えられた区間上で 一様連続 であると呼ばれる．コーシーは，関数の連続性について，$f(x + \varDelta x) \to f(x)\ (\varDelta x \to 0)$ を $\varepsilon - \delta$ 論法に焼き直したものと了解していたようである．ただし，彼のいう連続は，x の各点におけるものではなく，区間における連続性に限られているが，δ は x に依存しないとした．また，彼は連続関数の無限数列 $\{f_n(x)\}$ の収束性を $\varepsilon - \delta$ 論法（$\varepsilon - N$ 論法）で扱ったが，そこに現れる N は x に依らない—一様収束—としたために誤った定理を導いた．このように彼の議論には欠陥があったが，このような微妙な議論は $\varepsilon - \delta$ 論法だからこそ可能になったことに注意しよう．

14) 関数が病的な増減を示す場合もあることを考慮するとき，一様連続と一様収束という概念が必須になり，関数に関する定理の証明には $\varepsilon - \delta$ 論法が欠かせなくなった．こんな事情を教わらずに $\varepsilon - \delta$ 論法を学ぶ学生も多いようである．そこで，悩み多き学生の良き道案内として，数学史的考察に加えて教育的配慮が十分な 中根 美知代 著『$\varepsilon - \delta$ 論法とその形成』（共立出版，2010）を薦めたい．

2.4.2　関数の極限に関する基本定理の証明

$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて証明するのは以下の基本定理である：

$$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x) \text{ が有限な値 } \alpha, \beta \text{ に収束するとき}$$

$$(1^\circ)\quad \lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = k\alpha \qquad (k \text{ は定数}),$$

$$(2^\circ)\quad \lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \alpha \pm \beta \qquad (\text{複号同順}),$$

$$(3^\circ)\quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \alpha\cdot\beta,$$

$$(4^\circ)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (g(x)\neq 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta \neq 0).$$

(1°)　$\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha \Leftrightarrow kf(x) \to k\alpha\ (x \to \alpha)$ は‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta$ となる全ての実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ’[15] [16] ……①° を意味する．その証明は $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x)\to\alpha\ (x\to\alpha)$，つまり

> 任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ_1 が選べ，$0<|x-a|<\delta_1$ となる実数 x に対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon'$ が成り立つ ……①

から得られる（記号 ε' や δ_1 を用いたのは対応する ε や δ と必ずしも同じ値にならないようにするため）．

証明：①より $|kf(x)-k\alpha| = |k||f(x)-\alpha| < |k|\varepsilon'$（※ 極限を取らない有限の範囲で扱っているから，通常の定理が使えることに注意しよう）．したがって，‘任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ_1 が選べ，$0<|x-a|<\delta_1$ となる実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha|<|k|\varepsilon'$ が成り立つ’が得られる．ここで，$\varepsilon=\varepsilon', \delta=\delta_1$ とおく，または $\varepsilon = |k|\varepsilon', \delta=\delta_1$ とおくと，①°と同値な結果が得られる．

(2°)　$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \alpha\pm\beta$ の証明：$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ を‘任意の正数 ε' に対し

---

15) 後半部分は $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |kf(x)-k\alpha|<\varepsilon$ と表せる．

16) ε については，任意に選んだ正数 ε の ε と $|kf(x)-k\alpha|<\varepsilon$ の ε は同一でなくてもよく，互いに他の正有限倍（よって共に正数）であればよいことに注意する．例えば，
‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta$ となる全ての実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha|<2\varepsilon$ が成り立つ’とか
‘任意に選んだ正数 $\varepsilon/3$ に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta$ となる全ての実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ’なども許される．

て適当な正数 δ_2 が選べ，$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-\beta| < \varepsilon'$’……② と表すと

$$|(f(x) \pm g(x)) - (\alpha \pm \beta)| = |(f(x)-\alpha) \pm (g(x)-\beta)| \leqq |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$$

に注意して，①の δ_1 と②の δ_2 の小さい方を δ とすると‘任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ が選べ，$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (\alpha \pm \beta)| < 2\varepsilon'$’が成立する．これで (2°) は証明されたが，形式にこだわる人は $\varepsilon' = \varepsilon/2$ とおくとよい．

(3°)　$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$ の証明：①と②を用いると

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta) + \beta f(x) + \alpha g(x) - 2\alpha\beta| \\
&= |(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta) + \beta(f(x)-\alpha) + \alpha(g(x)-\beta)| \\
&\leqq |f(x)-\alpha||g(x)-\beta| + |\beta||f(x)-\alpha| + |\alpha||g(x)-\beta| \\
&< \varepsilon'^2 + |\beta|\varepsilon' + |\alpha|\varepsilon' \\
&= (\varepsilon' + |\beta| + |\alpha|)\varepsilon'
\end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon' < 1$ に選ぶと，

$$|f(x)g(x) - \alpha\beta| < (1 + |\beta| + |\alpha|)\varepsilon'$$

が得られる．そこで，$\varepsilon = (1 + |\beta| + |\alpha|)\varepsilon'$ として，①の δ_1 と②の δ_2 の大きくない方を δ とすると，‘任意の正数 $\varepsilon/(1 + |\beta| + |\alpha|) < 1$ に対して適当な正数 δ が選べ，$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - \alpha\beta| < \varepsilon$’が得られる．したがって (3°) が証明された．

(4°) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ の証明：$\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)}$ のように，商は積の形に書ける．したがって，(3°) の積に関する定理を考慮すれば

$$g(x) \to \beta \ \ (x \to a) \ \Rightarrow \ \frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{\beta} \ \ (x \to a) \quad (\beta \neq 0)$$

が示されれば (4°) は証明されたことになる．そこで，②を用いると

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| = \left| \frac{\beta - g(x)}{\beta g(x)} \right| = \frac{|g(x)-\beta|}{|\beta||g(x)|} < \frac{\varepsilon'}{|\beta||g(x)|}$$

となるので，分母の $|g(x)|$ を条件 $|g(x)-\beta| < \varepsilon'$ の下で評価すればよい．

不等式 $||x|-|y|| \leqq |x-y|$ および $|x-y|<z \Leftrightarrow -z<x-y<z$ [17] を用いると，

$$||g(x)|-|\beta|| \leqq |g(x)-\beta| < \varepsilon'$$

だから，

$$-\varepsilon' < |g(x)|-|\beta| < \varepsilon' \Leftrightarrow |\beta|-\varepsilon' < |g(x)| < |\beta|+\varepsilon'$$

が得られる．これから，$\varepsilon' < |\beta|$ を満たす ε' を選んで，

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right| < \frac{\varepsilon'}{|\beta||g(x)|} < \frac{\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')}$$

と評価される．この結果と①，②から

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| &= \left|(f(x)-\alpha)\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{f(x)}{\beta}+\frac{\alpha}{g(x)}-2\frac{\alpha}{\beta}\right| \\
&= \left|(f(x)-\alpha)\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}(f(x)-\alpha)+\alpha\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right)\right| \\
&\leqq |f(x)-\alpha|\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right|+\frac{1}{|\beta|}|f(x)-\alpha|+|\alpha|\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right| \\
&< \varepsilon'\frac{\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')}+\frac{\varepsilon'}{|\beta|}+|\alpha|\frac{\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')} \\
&= \frac{(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')}
\end{aligned}$$

よって，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| < \frac{(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')} \quad (=\varepsilon\,(>0)\ \text{と置く})$$

が得られる．このとき，

$$\varepsilon' = \frac{|\beta|^2\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|(1+\varepsilon)} \quad (<|\beta|\ \text{に注意})$$

となるので，①と②および先に定めた δ より，‘任意の正数 $\frac{|\beta|^2\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|(1+\varepsilon)}$ $(<|\beta|)$ に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| < \varepsilon$’ が得られる．したがって (4°) が証明された．

---

[17] 前者は x と y の正負に場合分けして調べる．x, y が同符号のとき $|x-y| = |\pm|x|-(\pm|y|)| = ||x|-|y||$．異符号のとき $|x-y| = |\pm|x|-(\mp|y|)| = ||x|+|y|| > ||x|-|y||$． 少なくとも一方が 0 のとき等号成立．（※ $|a| \leqq |b|$ は $|a|<|b|$ または $|a|=|b|$ を意味する）．後者は，$x-y>0$ のとき $x-y<z$，$x-y<0$ のとき $-(x-y)<z \Leftrightarrow -z<x-y$．どちらの場合も $-z<x-y<z$ が成り立つ．

2.4.3　一様連続と一様収束

慎重に議論を進めたはずのコーシーが間違いを起こし，かつその後の解析学の発展に決定的な概念となった一様連続と一様収束を概観しておこう[18)]．

関数の極限の定義 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ において α を $f(a)$ で置き換えると関数の連続の定義になる（$f(a)$ は，もちろん，存在しなければならない）：

> 区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ について，'$f(x)$ が区間 I の点 a で連続 ($\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$)' とは '任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し，$0 < |x-a| < \delta$ となる全ての実数 $x \in I$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ' ことである．
> もし，関数 $f(x)$ が区間 I の各点 a で連続ならば，$f(x)$ は I 上で連続であるという．このとき $f(x)$ は 連続関数 と呼ばれる．

$f(x)$ が区間 I 上の連続関数のとき，I の各点 a で同一の ε を選ぶと，対応する δ の値は a に依存して変わる．$f(x)$ が極端な増（減）を示すところでは δ は極端に小さくする必要がある．そのことを区間 $I = (0,\infty)$ 上で定義した関数 $f(x) = 1/x$ で例解しよう．今の場合，条件は

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

であるが，$f(x) = 1/x$ が単調関数なので，等式

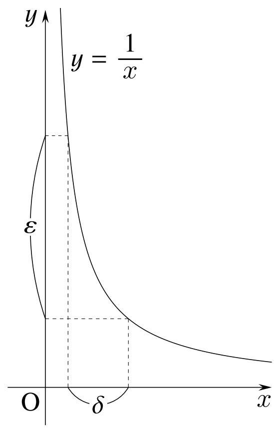
$$|x-a| = \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \varepsilon$$

で調べることができる．これから $x = a \pm \delta$,

$$\left|\frac{a-x}{(a\pm\delta)a}\right| = \frac{\delta}{(a\pm\delta)a} = \varepsilon.$$

したがって

$$\delta = \frac{a^2\varepsilon}{1 \mp a\varepsilon}$$



が得られる．これから，ε が正定数のとき，a が 0 に近づくとともに，δ はいくらでも小さくなっていき，最小の正数 δ はない．

18) 歴史的発展の記述は，中根 美知代 著『$\varepsilon-\delta$ 論法とその形成』（共立出版，2010）が優れており，教育的配慮も深い力作である．

重要なのは，$f(x)$ が病的な増（減）をしない‘たちのよい’連続関数の場合であり，そのときは最小の δ が存在する．このことを区間 $I=[0,\infty)$ 上で定義された関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の場合に例解しよう．条件は

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$$

であるが，$f(x)=\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$ が単調に増加するので，今度は $a=0$ がとれることに注意すると，先の例を参考にして，等式

$$x-a=\delta \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{a}=\varepsilon$$

で調べるのがよい．$x=a+\delta$，$\sqrt{a+\delta}-\sqrt{a}=\varepsilon$ より，$\delta=(2\sqrt{a}+\varepsilon)\varepsilon$ を得る．これより $a=0$ のとき δ の最小値 ε^2 が得られるが，それは次のことを意味する：‘関数 $f(x)=\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$ については，任意に選んだ正数 ε に対して正数 $\delta=\varepsilon^2$ が選べ，$0<|x-a|<\delta$ となる全ての実数 $x\,(\geqq 0)$ および $a\,(\geqq 0)$ に対して $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$ が成り立つ’．このように，単に関数が区間 I の全ての点で連続であるだけでなく，正数 ε を定めたとき，I の点に依らずに正数 δ が選べるとき，関数は区間 I 上で一様連続であると呼ばれる．一般には，

> ‘関数 $f(x)$ が区間 I 上で **一様連続** である’とは，‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta$ となる全ての実数 $x,a\in I$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ’ことである．
> （δ は ε のみに依存し，x や a には依らない）．

コーシーによる関数の連続の定義は，区間の各点における連続ではなく，区間上における連続であった．また，彼の定義は，‘望むだけ小さくなる’**無限小**[19] という言葉をもちいて表現され[20]，明確な $\varepsilon-\delta$ 論法による表現で

---

19) コーシーによる無限小の定義：‘変化する量が順にとる値が，限りなく減少し，与えられたどのような量よりも小さくなるとき，この変化する量は 無限小 あるいは 無限小量 と呼ばれる．この種の変化する量は 0 を極限としてもつ’．コーシー以前の数学者は，例えばオイラーは，無限小を“指定されたあらゆる量よりも小さい量であり，実質的には 0 である”と捉えるなど，無限小を変化する量として扱ってはいない．

20) コーシーによる関数の連続性の定義：‘変数 x に与えられた 2 つの点の間で，それぞれの x について，差 $f(x+\Delta x)-f(x)$ の値が Δx の値とともに減少するとき，関数 $f(x)$ は，この間で，この変数について連続といわれる．別の言葉でいえば，関数 $f(x)$ が与えられた端点の間で x について連続であるとは，変数の無限小の増加が関数それ自体の無限小の増加を常に作り出すことである’．上の Δx がコーシーの無限小である（コーシーの記号は α）．

はなかったが，彼の無限小は変化する量として扱われ，それが故に極限や $\varepsilon-\delta$ 論法と結びついたのである．コーシーによる関数の区間上における連続の定義を $\varepsilon-\delta$ 論法で表してみよう：‘関数 $f(x)$ が区間 I 上で連続とは，小さい正数 ε に対して小さい正数 $\delta > |\Delta x|$ が選べ，全ての $x, x+\Delta x \in I$ に対して，$|f(x+\Delta x)-f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことである’．この表現によると，δ は，ε には依存するが，$x, x+\Delta x$ には依らず，一様連続の定義になっていることがわかる．コーシーは区間上における連続を考え，区間の各点における連続を考えることはなかった．区間上で定義される導関数 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ はコーシーの手に成る．

コーシーは一様連続の問題よりずっと深刻な誤りを起こした．それは連続関数 $f_n(x)$[21] を一般項とする無限数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I 上で $f(x)$ に収束する ($\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$) とき，$f(x)$ は区間 I 上で連続関数になるか？という問題であった．彼の証明には誤りがあり，そして得られた結論 yes も誤りであった[22]．それには簡単な反例がある：関数列 $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ の各項 x^n は，閉区間 $[0, 1]$ 上で連続な関数ではあるが，$x\neq 1$ のとき 0 に収束 ($\lim_{n\to\infty} x^n = 0\ (0 \leqq x < 1)$)，$x = 1$ のとき 1 に収束する ($\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$)．したがって，極限関数 $\lim_{n\to\infty} x^n$ は区間 $[0, 1]$ 上で連続関数にはならない．

彼の誤りは，例えば，関数列 $\{x^n\}$ を開区間 $(0, 1)$ 上で調べるとすぐわかる．今の場合，$\lim_{n\to\infty} x^n = 0\ (0 < x < 1)$ であるが，それを $\varepsilon-\delta$ 論法的にいうと，‘$\cdots\ n > N \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon$’（$\varepsilon - N$ 論法 ☞ p.73 の脚注）となる．$x^n < \varepsilon$ において両辺の対数をとると $n \log x < \log \varepsilon$ である．$0 < x < 1$ より $\log x < 0$ に注意すると，$n > \log \varepsilon / \log x$ が得られ，N は ε だけでなく，x にも依存する．$\lim_{x\to 1} \log x = 0$ だから，x が 1 に近づくにつれて，N は限りなく大きくする必要がある．したがって，最大の N は存在せず，x に依らない N を選ぶことはできない．コーシーは誤って‘選べる’とした．もし，そのことが可能な場合には関数列は一様収束するといわれる：

---

21) 当時は無限級数の収束性が問題として取り上げられ，$f_n(x)$ は，殆どの場合，連続関数 $u_n(x)$ を一般項とする数列 $\{u_n(x)\}$ の第 n 部分和：$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ とされた．

22) コーシーによる 無限級数と連続関数に関する誤った定理：‘数列 $\{u_n\}$ のそれぞれの項が同一の変数 x の関数で，この無限級数が収束するようなある点の付近で，この関数が変数 x について連続ならば，その和もまた，その点の付近で x の連続関数になる’．

関数の無限数列 $\{f_n(x)\}$ は区間 I の各点 x において関数 $f(x)$ に収束する ($\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$) とする．このとき‘$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に **一様収束** する’とは，‘任意に選んだ正数 ε に対して，$x \in I$ に依らない自然数 N が存在し，$n > N$ となる全ての自然数 n に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が全ての $x \in I$ で成り立つ’ことである．

一様収束性を考慮すると，コーシーの誤りを正した定理が得られる：

関数列 $\{f_n(x)\}$ の各項 $f_n(x)$ は区間 I 上で連続とする．このとき，$\{f_n(x)\}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ も I 上で連続である．

以下，この定理を証明して §2.4 を終えよう．区間 I の任意の点を a とするとき，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を示せば済む．証明のヒントは

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|.$$

まず，$\{f_n(x)\}$ の一様収束性より，任意の正数 ε' に対して，（ε' には依存するが）区間 I の点には依らない N が選べ，区間 I の任意の点 x, a に対して

$$n > N \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon',\ |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon'$$

が成り立つ（※ ここが一様収束！）．次に，全ての n に対して $f_n(x)$ は連続関数であるから，$f_n(x)$ は区間 I の任意の点 a において連続である．したがって，$\varepsilon-\delta$ 論法による連続性の定義より，上で与えた正数 ε' に対して，一般には ε' と a に依存する正数 $\delta(a)$ が選べ

$$0 < |x - a| < \delta(a) \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon'$$

が成り立つ．これらから，$n > N$ および $0 < |x - a| < \delta(a)$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< 3\varepsilon' \end{aligned}$$

となる．したがって，任意に選んだ $\varepsilon/3$ に対し，区間 I の任意の点 a で適当な正数 $\delta(a)$ が選べ

$$0 < |x - a| < \delta(a) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$f(x)$ は区間 I の任意の点 a で連続，つまり $f(x)$ は区間 I 上で連続関数になる．（証明終）

§2.5　ニュートンの運動方程式と不定積分

ニュートンの運動方程式は『プリンキピア』(1687) の中で述べられた 運動の第 2 法則（☞ p.62）にその起源がある：運動の量（= 質量 m × 速度 $\vec{v}$）の変化（= 質量 m ×加速度 $\vec{a}$）（$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$）は，加えられた力 $\vec{F}$ に比例し，その力の方向を向く：$m\vec{a} = \vec{F}$．ここで，質量や加速度や力は量なので，まず，それらを数学的計算ができるように数に直す‘儀式’を行っておこう．質量 m は【単位】に【kg】をとろう．速度 $\vec{v}$ は，移動量の(時間的)変化率 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}(t)}{\Delta t}$ だから，その【単位】を【m/sec】にとれば，加速度 $\vec{a}$ は速度の変化率だから【単位】は【m/sec】/【sec】=【m/sec^2】である．このような単位のとりかたは MKS 単位系と呼ばれる．力 $\vec{F}$ については，1 kg の物体に作用して，それに 1m/sec^2 の加速度（速度の変化が 1m/sec）を生じさせるのに必要な力を 1 newton という．よって【単位】は【newton】である．以上のことから，運動の第 2 法則を物理量の間の等式として正しく表すと

$$m\vec{a}\,【\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/sec}^2】 = \vec{F}\,【\mathrm{newton}】$$

である．ここで，1 kg·m/sec^2 =1 newton であるから，両辺の【単位】は同じものであり，等式から外されて，数で表される：$m\vec{a} = \vec{F}$．この儀式は，多くの場合，省略される．上の数式表現は **ニュートンの運動方程式** と呼ばれ，多くの場合，**微分方程式** −微分が絡んだ方程式−の形で表される：

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}.$$

この運動方程式において，力 $\vec{F}$ として万有引力を考える．例えば，太陽（質量 M）を中心として地球（質量 m）の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると，地球が太陽から受ける万有引力は

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

（$r = |\vec{r}|$，$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ は単位ベクトル，$G = 6.67\times10^{-11}$ は万有引力常数）である．この方程式を解くことによって，地球が太陽の周りを楕円軌道で回ることが明らかになった．このように，ニュートンの運動方程式を通して，**数学は自然の**

基本法則を表現でき，自然現象が根本から理解できるようになった．数学に最高の価値を認める真の理由はこの 1 点にあるといっても過言ではない[23]．事実，力 $\vec{F}$ として荷電粒子が電場や磁場の中で受ける力 $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$[24] を考えると，それは電気や磁気が関係する自然の基本法則になっている．さらなる研究の結果得られたマックスウェル方程式：

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho, \quad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

によって，光の正体は電気と磁気の振動であることが明らかになった．さらに，極微の世界を探る基本方程式（シュレーディンガー方程式）：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

は化学反応の本質や原子核・素粒子の性質を明らかにして，体の組織の働きの解明，遺伝の本質の究明，新薬の発見に貢献している．やがては生命誕生の謎にまで迫るであろう．目を大宇宙に転ずれば，アインシュタインによって導かれた一般相対性理論の重力場の方程式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

は大質量の星によって光の進路は曲げられることを示し，光さえも脱出できないブラックホールの存在を予言し，さらには，宇宙は 137 億年前に 1 点で誕生したと考えられているが，この方程式はその直後に起きたとされる宇宙の大膨張に根拠を与えている．今後も自然の基本法則に関わる理論が現れるであろうが，それは数学（もし必要なら，点という概念で捉えきれない‘数’が導入されるかもしれないが）で表現されるに違いない．

自然の基本法則は方程式で表された物理法則であり，本来は数学の場合と違って測定の操作が関与し，左辺と右辺の物理量の値が一致したときのみ等号が成立する．ニュートンの運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ でいえば，$m\vec{a}$ を精確に測定し，$\vec{F}$ を正しく仮定したときのみ‘=’で結ばれる．例えば，野球のボールを

---

[23] ニュートンの運動方程式以後，数学は輝かしい発展を加速している．始めの数十年間で微分方程式の解法技術を習得し，それ以後は，厳密な証明法の研究・実数の連続性の研究が発展し，19 世紀末には古代ギリシャ数学以来の念願であった厳密な公理化が完成した．

[24] 式の各記号の説明は省略する．大学の物理の講義で学ぼう．

放り投げることを考えてみよう．地球上の物体が地球から受ける万有引力は地上付近では一定で，よってボールの加速度は一定である．その力のみを考慮すると，運動方程式を解いた結果は，下で示すようにボールは放物線を描くように飛ぶことがわかる．ただし，正しい（精確に測定された）加速度を得るためには，ボールに働く風の影響・空気の摩擦抵抗・地球の自転による遠心力なども考慮しなくてはならない．

以上のことを考慮すると，運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ においては，適当な力 $\vec{F}$ を考えても正確な加速度 $\vec{a}$ を得ることは難しい．そこで数学においては，等式 $\vec{a} = \vec{F}/m$ の右辺の $\vec{F}$ に適当と思われる力を代入し，それによって左辺の $\vec{a}$ を定義するという，いわば関数の定義と同じような扱いをする．数学としてはその段階で落着とし，物理的には，精確な加速度 $\vec{a}$ を与える力 $\vec{F}$ を探し続けることになる．

さて，ボール投げ問題の運動方程式を解いてみよう．地上で質量 m のボールの重さを量ることは，かなりよい近似で，その物体に働く地球の重力を与える．日本付近の海面上（海抜 0 メーター）では m kg のボールに働く重力の大きさは mg【newton】$(g = 9.80)$ なので，その運動方程式は，方向を考慮して，

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{dv_x(t)}{dt} = 0,\ \frac{dv_y(t)}{dt} = 0,\ \frac{dv_z(t)}{dt} = -g$$

と与えられる（鉛直上向きを z 方向としている）．ベクトルの性質によって，各成分の方程式が得られることに注意しよう．x, y 成分については右辺が 0 だから，$y = v_{x,y}(t)$ のグラフの接線の傾きが時刻 t に依らずに 0 である．したがって，$v_{x,y}(t)$ は定数になる（‘$f'(x) = 0$ ならば $f(x) =$ 定数’ に同じ）：

$$v_x(t) = C_x, \quad v_y(t) = C_y.$$

z 成分については右辺が定数 $-g$ だから，$y = v_z(t)$ のグラフの接線の傾きが時刻 t に依らずに $-g$ である．したがって，$v_z(t)$ は 1 次関数になる：

$$v_z(t) = -gt + C_z.$$

定数項 $C_{x,y,z}$ は微分方程式の解に常に現れ，以下に示すように極めて重要な役割を演じ，**積分定数** と呼ばれている．一般に，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数

$F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数** というが，$F(x)$ に任意の定数 C を加えた $F(x)+C$ も原始関数である：$\{F(x)+C\}' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x)$[25]．そのとき，$X(x)$ を未知とする微分方程式 $X'(x) = f(x)$ の最も一般的な解は $X(x) = F(x) + C$ であり，それを $f(x)$ の **不定積分** と呼んで，次のように表す：

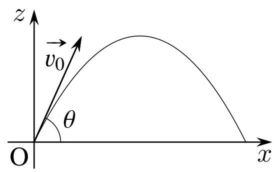
$$F(x) + C = \int f(x)dx.$$

C が積分定数である．この書式にしたがうと，微分方程式 $\frac{dv_z(t)}{dt} = -g$ の最も一般的な解（一般解）は

$$v_z(t) = \int(-g)dt = -gt + C_z$$

となる．

積分定数の重要性を見よう．ボールは xz 平面上で，時刻 0 に，初速 v_0 で斜め上に角 θ で投げられたとしよう．すると，



$$v_x(t) = v_0\cos\theta, \quad v_y(t) = 0, \quad v_z(t) = -gt + v_0\sin\theta$$

と積分定数が定まる．ボールの位置 $\vec{r}(t)$ と速度の関係は $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ だから，不定積分によって

$$x(t) = (v_0\cos\theta)t + D_x, \quad y(t) = D_y, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t + D_z$$

（$D_{x,y,z}$ が積分定数）が得られる[26]．時刻 0 でボールの位置 $\vec{r}(0) = \vec{0}$ とすると，$D_{x,y,z} = 0$ となる．よって

$$x(t) = (v_0\cos\theta)t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t.$$

これから，時刻 t を消去すると，時刻に関係しない x と z の関係，つまり，ボールの軌跡が得られる：

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0\sin\theta\frac{x}{v_0\cos\theta}.$$

この式はボールの軌跡が放物線であることを示している．

---

25) $F(x)$ と $G(x)$ が共に $f(x)$ の原始関数のとき，$\{F(x)-G(x)\}' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$ だから，$F(x)$ と $G(x)$ の差は高々定数である．

26) 微分して $-gt$ になる関数は $-\frac{1}{2}gt^2$ およびそれと定数だけ異なるものに限られる．

§2.6 定積分と微積分学の基本定理

前の § で不定積分 $F(x)+C=\int f(x)dx$ を考えた．積分定数と呼ばれる C は任意の定数で，この式は $\{F(x)+C\}'=f(x)$ に同値である．不定積分を表すために使われた記号はまさに §2.2 でライプニッツが用いた微積分の記号である．この § では，彼の議論を緻密にしよう．

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続として，区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割しよう．それらの分点 x_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ は

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

の条件で任意に選ぶ．したがって，分割間隔 $\varDelta x_k=x_{k+1}-x_k$ は一般に一定ではない．また，$n\to\infty$ のとき全ての k に対して $\varDelta x_k\to 0$ としよう．

出発する式は $\{F(x_k)+C\}'=f(x_k)$ である．これは

$$F'(x_k)=\lim_{\varDelta x_k\to 0}\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varDelta x_k}=f(x_k)$$

と表されるが，$n\to\infty$ のとき $\varDelta x_k\to 0$ に注意すると，$x_k\leqq t_k\leqq x_{k+1}$ を満たす任意の t_k を選び，

$$n\to\infty \text{ のとき}\quad \frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varDelta x_k}\to f(x_k),\quad f(t_k)\to f(x_k)$$

のように表すことができる．そこで，極限をとる前の両辺に $\varDelta x_k$ を掛けて k の和をとったものを考えるとき，それらの極限値が存在するならば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varDelta x_k}\varDelta x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\varDelta x_k$$

が成立すると期待される．以下，そのことを示そう．

左辺は階差の和の形（☞ p.65）になり

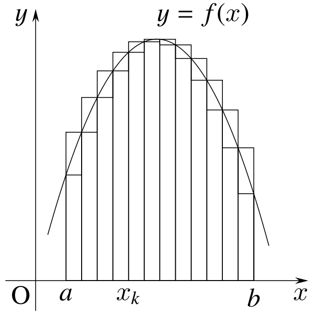
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1})-F(x_k))=\lim_{n\to\infty}(F(x_n)-F(x_0))=F(b)-F(a)$$

となる．右辺 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(t_k)\varDelta x_k$ については，極限値が存在する場合に，不定積分に似せた記号 $\int_a^b$ を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$$

と書き表し，これを‘$f(x)$ を **被積分関数** とする **下端** a，**上端** b の **定積分**’という．

その極限値が正しく定まることを示そう．$f(t_k)\varDelta x_k$ は，右図からわかるように，高さが $f(t_k)$ $(x_k \leqq t_k \leqq x_{k+1})$，横幅が $\varDelta x_k$ の細い長方形の面積[27] である．それらを区間 $[a, b]$ で集めたものは，$n \to \infty$ $(\varDelta x_k \to 0)$ の極限で，区間 $[a, b]$ における曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間にある部分の面積[28] に一致することが示される．



部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$ の t_k は n 分割したときの各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ の中で任意に選べ，それに依らずに $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在することを示す必要がある．我々は関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続としている[29]．まずは，核心部分を証明しよう．$f(x)$ の小閉区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における最大値を f_k^M，最小値を f_k^m とすると，

$$f_k^m \leqq f(t_k) \leqq f_k^M \qquad (x_k \leqq t_k \leqq x_{k+1})$$

である．したがって，$S_n^M = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^M \varDelta x_k$，$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \varDelta x_k$ とすると，

$$S_n^m \leqq S_n \leqq S_n^M$$

が成り立つ．そこで，部分和の差 $S_n^M - S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1}(f_k^M - f_k^m)\varDelta x_k$ を考えると，差 $\varepsilon_{n,k} = f_k^M - f_k^m$ に対して $\varepsilon_{n,k} \to 0$ $(\varDelta x_k \to 0)$ であり，$\varepsilon_{n,k}$ の（k についての）最大値 ε_n についても $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ である．よって，$\sum_{k=0}^{n-1} \varDelta x_k = x_n - x_0 = b - a$ に注意して

$$S_n^M - S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n,k}\varDelta x_k \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_n \varDelta x_k = \varepsilon_n(b-a) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

---

27) $f(t_k) > 0$ なら面積，$f(t_k) < 0$ なら面積の値を負にしたもの．

28) $f(t_k) < 0$ の部分は負の値にする．

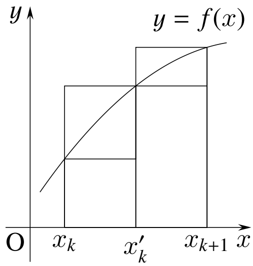
29) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続でない場合にも，$\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在することがある．その場合，$f(x)$ は $[a, b]$ でリーマン可積分であるといい，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$ を **リーマン積分** という．

が成り立つ．これは殆ど $\lim_{n\to\infty} S_n^M = \lim_{n\to\infty} S_n^m$ ($= \lim_{n\to\infty} S_n$) を意味している．ただし，厳密には，それらの極限値の存在を示す必要がある．

そのためには，上限（下限）に関するワイエルシュトラスの定理（☞ p.59）：

「集合 $S \subset \mathbb{R}$ が 上に有界 ならば S の上限 $\sup S \in \mathbb{R}$ が存在する[30]
（集合 $S \subset \mathbb{R}$ が 下に有界 ならば S の下限 $\inf S \in \mathbb{R}$ が存在する）」

を証明済なので，それを用いよう．集合として先ず数列 $\{S_n^m\}$ を考える．$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \Delta x_k$ に対して，ある小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ を分点 x_k' でさらに分割して，S_{n+1}^m と比較しよう．新たな分点記号 $x_k = x_l < x_k' = x_{l+1} < x_{k+1} = x_{l+2}$ を導入すると，区間 $[x_k, x_{k+1}]$ は区間 $[x_l, x_{l+1}]$ と区間 $[x_{l+1}, x_{l+2}]$ に細分され，増分については



$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (x_{l+2} - x_{l+1}) + (x_{l+1} - x_l) = \Delta x_{l+1} + \Delta x_l$$

となる．このとき，$f_k^m \Delta x_k = f_k^m \Delta x_l + f_k^m \Delta x_{l+1}$ であるが，区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における最小値 f_k^m とその区間を細分してえられた区間 $[x_l, x_{l+1}]$，$[x_{l+1}, x_{l+2}]$ における最小値 f_l^m，f_{l+1}^m を比較すると，右上図からもわかるように，後者の方が一般に大きくなる．したがって，

$$f_k^m \Delta x_k \leqq f_l^m \Delta x_l + f_{l+1}^m \Delta x_{l+1}$$

であるから（等号成立は $f(x)$ が区間 $[x_k, x_{k+1}]$ で一定のとき），

$$S_n^m \leqq S_{n+1}^m$$

が成り立ち，$\{S_n^m\}$ は単調増加数列になる．また，$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \Delta x_k$ で，区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の最大値を f^M とすると，$f_k^m \leqq f^M$ だから，

$$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \Delta x_k \leqq \sum_{k=0}^{n-1} f^M \Delta x_k = f^M (b-a) < \infty$$

---

[30] 実例で考えるとわかりやすい．開区間 $(-\infty, b)$，数列 $\{a_n \,|\, a_n = b - \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$，半開区間 $(-\infty, b]$ を考えてみよう．この 3 集合のどれにおいても，その要素は b 未満または b 以下であり，b 以上の数は‘超えられない数’= 上界 と呼ばれる．どの集合でも，b より小さい要素 a に対しては $a < x < b$ を満たす要素 x が存在する（b が上限であるための条件である）．最小の上界 b を 上限 と呼ぶ．

であり，数列 $\{S_n^m\}$ は上に有界である．よって，$\{S_n^m\}$ の上限 $S_{上限}^m$（＝最小の上界）が存在する．同様にして，数列 $\{S_n^M\}$ についても，同様の議論を行えば，単調に減少して下に有界であることがわかる（確かめよう）．したがって，$\{S_n^M\}$ の下限 $S_{下限}^M$（＝最大の下界）が存在し，$S_n^m \leqq S_n^M$ より

$$S_n^m \leqq S_{上限}^m \leqq S_{下限}^M \leqq S_n^M$$

である．したがって，

$$\left|S_{下限}^M - S_{上限}^m\right| \leqq \left|S_n^M - S_n^m\right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから，$S_{下限}^M = S_{上限}^m$（$= I$ と書く）が成立する．したがって，

$$S_n^m \leqq S_{n+1}^m \leqq \cdots \leqq I \leqq \cdots \leqq S_{n+1}^M \leqq S_n^M$$

がえられる．ここで，

$$S_n^m \leqq S_n \leqq S_n^M, \quad S_{n+1}^m \leqq S_{n+1} \leqq S_{n+1}^M$$

も考慮すると，S_n と I の値が共に S_n^m と S_n^M の間にあるから

$$|S_n - I| \leqq \left|S_n^M - S_n^m\right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．つまり，S_n は I に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k = I\left(= \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

S_n^m, S_n, S_n^M は，区間 $[a, b]$ における連続関数 $y = f(x)$ と x 軸の間にある部分の面積（正しくは，積分値）を求める際に，$y = f(x)$ を階段状に近似してえられたものであるが，$n \to \infty$ の極限でそれらが共に極限値 I に収束したことは，近似無しに面積（積分値）を正しく求めたものと認められる．

ここで，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ について，下端 a・上端 b についての拡張および基本性質を述べておこう．$a < b$ として区間 $[a, b]$ を小区間に分割したが，$a > b$ として区間 $[b, a]$ を分割しても構わない：

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n = b.$$

すると，今度は分割間隔 $\varDelta x_k = x_{k+1} - x_k < 0$ として議論することになる．$\varDelta x_k < 0$ に留意すると，先ほどの議論は完全にパラレルに進み，$a > b$ のとき

の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が定義できる．部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$ と上の拡張の議論から，定積分の基本性質が得られる：

$$(1^\circ)\quad \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{（複号同順）},$$

$$(2^\circ)\quad \int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{（}c\text{ は定数）},$$

$$(3^\circ)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b),$$

$$(4^\circ)\quad [a,\,b] \text{ で } f(x) \leqq g(x) \text{ ならば } \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$(5^\circ)\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \qquad (a < b).$$

$$(6^\circ)\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

$$(7^\circ)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (a \lesseqgtr b)$$

(1°)，(2°) は定積分の定義と §§2.4.2 の基本定理で $x \to a$ を $x_n \to a\ (n \to \infty)$ と考えれば，その基本定理の (2°)，(1°) が適用できる．(3°) は後ほど証明する $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を用いれば自明．(4°) は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k \leqq \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\varDelta x_k$ から明らか．(5°) も同様：$\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k\right| \leqq \sum_{k=0}^{n-1} |\,f(t_k)\,|\varDelta x_k$．$(6^\circ)$ は定積分と面積の関係から明らかだが，定義と見なしてよい．(7°) もすでに説明したが，これも定義と考えてよい．

最後に，懸案の $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を導こう．そのためには，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ [31] が $f(x)$ の原始関数であることを示せば済む．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\varDelta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt}{\varDelta x}.$$

[31] 変数 t で積分する形になっているが，定積分では積分の実行後には積分変数は消えて，上端・下端の変数のみが現れます．

$\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$ を評価しよう．積分区間は小区間 $[x,\, x+\Delta x]$[32] なので，区間 $[x,\, x+\Delta x]$ における $f(x)$ の最大値を f_x^M 最小値を f_x^m とすると，

$$\int_x^{x+\Delta x} f_x^m\,dt = f_x^m \Delta x \leqq \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \leqq f_x^M \Delta x = \int_x^{x+\Delta x} f_x^M\,dt$$

が得られ（$\Delta x < 0$ のときは不等号の向きが反対になる），Δx で割ると，

$$f_x^m \leqq \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \leqq f_x^M$$

となる．したがって，$\Delta x \to 0$ のとき，$f_x^m \to f(x)$，$f_x^M \to f(x)$ だから，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が成立する．この関係式は**微積分学の基本定理** と呼ばれる．この基本定理は‘$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ が $f(x)$ の原始関数（の 1 つ）である’ことを意味する：

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C_a \qquad (C_a \text{ は定数}).$$

$0 = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C_a$ だから，$C_a = -F(a)$ と定まり，

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

したがって，上端 x を b で置き換えると，念願の

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ \left(= [F(x)]_a^b \text{ と書く} \right)$$

が得られる．$[F(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b$ に注意しよう．

[32] 簡単のために $\Delta x > 0$ としよう．