第1章　論証数学の誕生と数の歴史

紀元前 3〜5 世紀といえば，日本では，弥生土器を使う人々が竪穴式住居で生活し水田で稲作をしていた時代である．その頃，古代のギリシャではすでに民主的な都市国家が成立していた．そこでは，ゼノンが“アキレスは亀に追いつけない”とか“飛んでいる矢は止まっている”などという‘証明’を試み，その後まもなく，図形の研究からピタゴラス派が「無理量」[1] を発見したようである．そして，その後 1 世紀を経ずして，ユークリッドが，「点とは部分をもたないものである」という定義に始まる『原論』において，それまでの数学の基礎や理論を体系的・演繹的に叙述した[2]．ここに厳密な公理的論証数学が誕生したといえる．

そのギリシャ数学は首尾一貫した理論ではあった．それは，しかしながら，偏屈な部分を内包するという弱点があった．数は自然数（正しくは，**基数**）に限定され，0 や負数を数とは認めないことはもちろん，エジプトやバビロニアでは使われていた分数も数とは認めなかった．長さ・容積・重さなど連続的に変化するものは，数ではなく，**量**と見なされた．ギリシャ時代の後も，ヨーロッパの数学者たちはユークリッド『原論』の呪縛に縛られ，東方から 0 や負数がもたらされても何世紀にもわたって頑強に拒否し続けた．

---

[1] 当時は「無理数」という概念が無かった．線分の長さは量とされた．

[2] 数学史全般については，『グレイゼルの数学史 I·II·III』（保阪秀正・山崎昇 訳，大竹出版），『カッツ 数学の歴史』（ヴィクター J. カッツ 著，上野健爾・三浦伸夫 監訳，共立出版）を参照しました．詳細に関する部分は個別に参照します．

しかしながら，ヨーロッパの学者達は，単に偏狭な思想に凝り固まっていたわけではなく，説得力ある厳密な論理に基づいた数の概念が新たに提示されるならばそれを受け入れ，さらに発展させることができた．17 世紀には，デカルトが数や量を線分の長さに対応させる理論を広め，その後ニュートンが同種の量の比という形で実数を定義するに至った．その後は，よく知られているように，ヨーロッパの数学は他の世界のそれを圧倒した．現在，数（＝実数）は数直線上の点と同一視され，その‘基本的振る舞い’を完全に規定する公理によって定義される．

この章では，ギリシャ数学の成立のみならず，ギリシャの数概念に特別の注意を払い，実数の公理的定義に至るまでの数概念の変遷を辿(たど)ってみよう．数概念の発展は数学全般の発展にほぼ一致している．

§1.1　古代ギリシャの数学と数

1.1.1　ギリシャ以前の数学

数は人類が集団生活を始めたときに発生したことは間違いない．言葉を話し，狩猟の獲物を分配し，農地を耕し，収穫物を分配するうちに数は人々の生活にしっかりと根付いたことだろう．農耕は人々の生活を豊かにし，多くの人々が集団で定住生活を行えるようになると文明が起こり，それが大きく発展するなかで文字の一部として数を表す記号（数字）が発明された．

数の和・差・積・商などの四則演算は集団生活の早い段階から現れ，測量・建築・軍事・天文などの技術の進歩と共に量の四則演算も発達した．実際，エジプトのピラミッドを見れば，現代のものにも匹敵する測量技術があり，数学が発達していたことの証拠になっている．

古代エジプトでは文字を書くのにパピルスから作られた巻紙を利用した．紀元前 1650 年頃に書記のアーメスによって筆写された巻紙『リンド・パピルス』

は数学問題集であり，分数を用いた問題と答えが載っていた．例えば，3 番目の問題は「パン 6斤(きん)を 10 人で分けるにはどうすればよいか」を問うている．そこに載っている答えは，$\dfrac{3}{5}$ つまり 1 斤の 3/5 ずつ取るのではなく，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\left(=\frac{6}{10}\right)$$

のように「単位分数」で表した．つまり，各自が半斤と 1/10 斤だけ受け取るとする方がわかりやすい．この単位分数による方法は 2000 年以上にわたって東地中海沿岸で使われた．

一方，メソポタミア南部に栄えたバビロニアの数学は，**位取り記数法** を用いたが，これは計算に便利だったため，エジプトの数学に比べてはるかに進歩していた．当時の数学の内容は**楔形(くさびがた)文字**で書かれた粘土板に保存されており，乗法や除法の表に加えて，逆数・冪(べき)・根(こん)・指数計算の表があり，また数学の問題と解答を記した粘土板がハンムラビ王の時代を含む古バビロニア期（前 19 世紀〜前 17 世紀）に集中して見出されている．

バビロニアでは **60 進法**がとられ，数を表すのに 2 つの楔形記号 𒐕（= 1）と 𒌋（= 10）を組み合わせて用いた．例えば，25 は 𒎙𒐙，73 は位の違いを示す隙間を付けて 𒐕 𒌋𒐗 である．ただし，位の違いを表すのに便利な「0」や小数点「.」に当たる記号がなかったので，例えば 𒌋𒐕 は 11 だけでなく，11×60 とか 11/60 その他なども表し，それらの違いは文脈から読みとられた．この位取り記数法によりバビロニアの数学は単位分数に苦労していたエジプト数学を圧倒し，ギリシャ数学がそれに追いついたのはようやくユークリッドの時代に入ってからである．

数値計算にそれほど苦労せずに済んだバビロニアでは，エジプトでは扱われなかった，2 次の代数問題にも取り組んだ．

> 長さと幅がある．長さと幅をかけて面をつくった．長さが幅より多い分だけ面に加えると 𒐗 𒐗（$= 3\times 60+3$）である．長さと幅を加えると 𒎙𒐛（= 27）である．長さと幅，面はそれぞれいくらか．

長さを x，幅を y とすると

$$xy+(x-y)=183, \qquad x+y=27$$

である．解答は，$y' = y + 2$ とおいて，対称形 $xy' = 210$, $x + y' = 29$ に導き，その解法のパターン[3] にしたがって解 $x = 15$, $y = 12$ を得ている．この例では，長さを面積に加えるという，次元の区別を無視した計算をしているが，むしろ次元を考慮しない無名数としての数は同じ計算法則に従うことを了解していたと見ることができる．

1.1.2　ギリシャ数学の夜明け

ギリシャ人は紀元前 20 世紀〜前 12 世紀の間に 3 派が北方からギリシャ地方に南下した．ギリシャの国土は山がちで起伏がはげしく，海岸線は入り組んでいて岬や入江が多い．そのため，居住に適した土地は散在する平野に限定され，土地も痩せていて収穫が足りず，ギリシャ人は貿易を主とする都市国家（ポリス）を形成した．紀元前 8 世紀半ば以降には植民やオリエントとの交流によって国力が増し，ギリシャ人市民数万人とその数割にも達する奴隷からなる人口を抱えるポリスも現れた．

ポリス間には戦争が絶えなかった．山岳地帯が多いため貴族層からなる騎兵部隊の機動力は落ち，重装備の歩兵が密集陣形で突撃する戦術が発達した．歩兵部隊は自前の武器を持参した自由農民である．また，海戦においては，武器を持たない自由貧民も軍船の漕ぎ手となって活躍した．そのためポリス自由市民はその政治的地位を大いに高めていき，ギリシャの「民主政」を築く原動力になった．その民主的社会とは，地位を高めた特権市民が奴隷を支配・搾取し，それによって得た暇な時間を使って政治や戦争に参加する，社会体制としては真正の奴隷制社会であった．

奴隷を労働させることによって暇を得た市民は，初期の頃，戦争に備えて体を鍛え，政治談義に日々を送ったことだろう．私立の学校では読み書き・音楽・体練術を青少年に必須の一般教養とした．文字として，学習に苦労するエジプトの象形文字やメソポタミアの楔形文字でなく，表音文字を使用したこと

---

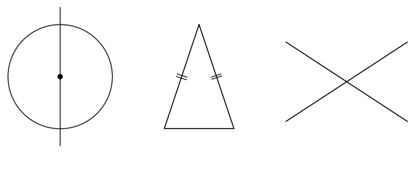
[3] 連立方程式 $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ $(x > y > 0)$ において $\sqrt{p^2/4 - q} = \sqrt{(x+y)^2/4 - xy} = (x - y)/2$. よって，$x+y = p$, $x-y = 2\sqrt{p^2/4 - q}$ より，公式 $x = p/2+ \sqrt{p^2/4 - q}$, $y = p/2- \sqrt{p^2/4 - q}$ が得られる．参考：伊東俊太郎 著『ギリシャ人の数学』（講談社学術文庫，1990）．

も市民の読み書きを可能にし，高度な知識を普及するのに役立った．人々は，議論と討論の技術を学ぶ素地ができ，筋道を立てて考えを進めることにも徐々に慣れていった．学問好きな者達は，全く実用的ではない事柄についても，自由に思索し，喧喧諤諤(けんけんがくがく)の議論を行うようになっていったことであろう．その結果，ギリシャの人々は古代から伝えられてきたことをそのまま受け取ることが少なくなり，やがて創造的な精神活動を行う才知に満ちた人物が次々と現れることになる．

ギリシャ人が東地中海全体に及ぶ地域に植民して生活水準が上昇するにつれ，オリエントの国々との交易も栄え，有能な人材が行き来するようになった．多くの分野にわたる未知の知識や技術もギリシャに流入した．その中には，もちろん，エジプトやバビロニアの数学や自然科学なども含まれる．ギリシャの発展期にオリエント貿易に有利なのはギリシャ東部のイオニア地方で，そこはエーゲ海に面した現在のトルコ南西部にあるギリシャの植民地であった．

そのイオニアのミレトスにある名門の家系から，後にギリシャ哲学および科学の創始者といわれる**ターレス**（Thales，前 624 年〜前 546 年頃）が生まれた．若い頃彼は恵まれた境遇とギリシャ的雰囲気の中で知性を磨き，合理的思考を強めていったと思われる．青年時代，ターレスは商業活動に手を染め，エジプトに長らく滞在したことがある．そのとき神官から測量術を学び，ミレトスに帰ってからは研究に心血を注ぎ，弟子達を教育した．

ターレスは，合理的思考の精神により，エジプトから持ち帰った知識を鵜呑み(うのみ)にせず，論理的に徹底的に反芻(はんすう)吟味して結論を導いた．そのことがギリシャ数学の伝統を生みだす源泉になったのである．エジプトの学者は「円の直径はその円を二等分する」，「二等辺三角形の底角は等しい」，「対頂角は互いに等しい」ことなどを経験的に知っていたが，それで満足していた．それらを‘証明した’[4] 最初の人がターレスであるという古い記録がある．その証



[4] ユークリッドより古い時代のギリシャ人は，数学的証明に対して，具体的な「具象化」（＝目に見えるようにすること）と理解していた．例えば，A.K. サボー 著『数学のあけぼの』（伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全(たもつ) 訳，東京図書，1976）第 1 部 1．

明の詳細は残っていないが，‘自明と見なされ，広い適用が可能な基本原理’として「互いに重なり合うものは互いに等しい」という明白な事実を考えてみよう．そうすると，円の二等分問題は円を直径で折って重ねて見せる簡単な証明が可能であり，二等辺三角形の問題では，三角形を裏返した三角形をつくり，それを元の三角形に重ね合わせるという証明ができることがわかる[5)]．重要なことは，**すでに知られている事実を単に受け入れるのではなく，より基本的な一般原理まで還元し，そこから証明するという態度である**．この点において，ターレスはギリシャの論証数学の第一歩を踏み出したといえる．

基本原理を追求するターレスの精神は，また，自然現象を観察する際にも現れ，自然現象全体にわたる統一的な第一原理を探し求めた．この世界の起源については，それまでは神話的説明のみであったが，ターレスは「万物の根源」（アルケー）なるものを創案し，それによって世界を構築しようとした．具体的には，水から全ての存在が誕生し，最終的に再び水に帰ると主張した．

さらに，ターレスは，後に詳しく議論するが，ギリシャ数学における「数」を定義した最初の人でもあった．その定義は，しかしながら，その後 2 千年以上にわたってヨーロッパ数学を呪縛する元凶ともなった．

1.1.3　公理的論証数学の誕生

現在の厳密な論証数学の起源は，紀元前 300 年頃にアレクサンドリアで活躍したといわれる，**ユークリッド**（Euclid，前 365 年頃～前 275 年頃）の手に成る『**原論**（ストイケイア）』にある．この名著において，彼は，過去の業績を編纂し，また新たな証明を付け加えて，論証的学問としての数学を確立した．

厳密な論証数学を打ち立てるためには，論証の前提となる**定義**（＝用語の明確な意味）や**公理**（＝理論の出発点として，証明なしに採用される主張）の概念が明らかになり，論証を実行するために必要な「三段論法」や「背理法」などの技術が確立されることが不可欠である．以下，論証数学の生い立ちという観点から『原論』の成立を調べてみよう．

---

5) 例えば，数学の歴史 I『ギリシャの数学』（彌永昌吉・伊東俊太郎・佐藤徹 著，共立出版，1979）第 1 章 第 1 節タレス 参照．対頂角の問題でも，重ね合わせを用いた証明であったと推測されている．

『原論』の第 1 巻はいきなり次のように始まる：

定義（ヒュポテシス）

1　点とは部分をもたないものである.

2　線とは幅のない長さである.

3　線の端は点である.

⋮

23　平行線とは，同じ平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である.

公準（アイテマ）（次のことが要請されているとせよ）

1　任意の点から任意の点へ直線をひくこと.

2　有限直線を連続して一直線に延長すること.

3　任意の点と距離（＝半径）をもって円を描くこと.

4　すべての直角は互いに等しいこと.

5　一直線が二直線に交わり，同じ側の内角の和が二直角より小ならば，この二直線は，限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側において交わること.

公理（アキシオマ）

1　同じものに等しいものはまた互いに等しい.

2　等しいものに等しいものを加えれば全体は等しい.

3　等しいものから等しいものを引けば残りは等しい.

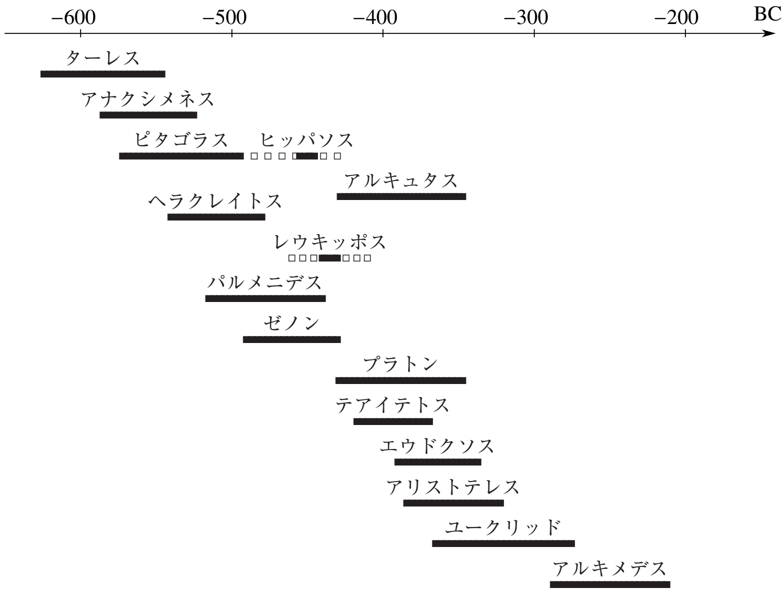
4　互いに重なり合うものは互いに等しい.

5　全体は部分より大きい.

この書き出しのように，議論の出発点を明々白々にし，その第一原理に基づいて厳密に論理的な演繹を行うことが，すでに紀元前 300 年頃には，なされていた．古代ギリシャでのみ発達したこの公理的論証数学，その起源はどこにあるのだろうか．それを探ってみよう.

紀元前 6〜5 世紀のギリシャは，ターレスの影響もあって，哲学が盛んになった．アルケーを空気とするミレトス学派のアナクシメネス（前 585〜前 525），

ピタゴラス派とされる‘万物流転’を説くヘラクレイトス（前 540 頃〜前 480 頃），デモクリトス（前 460 頃〜前 370 頃）の「原子論」の基礎を築いたレウキッポス（活動期：前 440〜430 年頃），また（後で議論するが）‘不動不変’の「唯一者」を説くエレア派のパルメニデス（前 515 頃〜前 440 頃？）とその弟子のゼノン（前 490 頃〜前 430 頃）などを代表格とする多くの哲学者達が覇を競い合った．



学者達は自分の派内・派外で多くの討論・論争を行って説得の技術を高め，また自己の理論を一段と昇華していったことであろう．いま，A と B が議論をしていて，A はある主張をし，B はそれを疑ったとしよう．B は A の主張の根拠を問い，A はそれに答えるが，B は納得せず，さらに根拠を求める．これを繰り返して，A の主張の根拠となる根本的な前提が明らかにされる．B がその根本前提を受け入れれば，その議論は成立するが，そうでなければ議論は物別れになる．実際の議論では，相手の根本前提そのものを論破しようとする苛烈な場合もあったことだろう．しかしながら，ある根本前提を誰もが認めるならば，それは万人の議論の出発点をなす第一原理となる．

ハンガリーの古典言語学者・数学史家アルパッド・サボーは,「ヒュポテシス」(定義)・「アイテマ」(公準)・「アキシオマ」(公理)という古代ギリシャ語の意味の時代変遷に注目し，1960 年に始まる一連の注目すべき研究を発表した[6]．彼は詳細な分析の後，「ヒュポテシス」は本来「討論の相手によって同意された仮定」を意味し,「アイテマ」は「相手の同意が得られないとき，仮に議論を進めるために，論者の一方が要請するもの」，また「アキシオマ」は「討論の双方が是認するというよりは，誰もが自明と認める前提」であったとの結論に達した．古代ギリシャの前 5 世紀には，すでに，これらの仮定・前提に基づく厳密な議論・討論が行われていたのである．そのためには，自説の正しさを証明し，誤った説を論破する論証術がすでにあったとみるのが自然である．その論証術について，サボーは，南イタリアにあるギリシア植民都市エレアで活動していた，前ソクラテス期の哲学の 1 学派であるエレア派に照準を合わせた．

エレア派のパルメニデス（Parmenides，前 515 頃〜前 440 頃？）とその弟子 **ゼノン**（Zenon，前 490 頃〜前 430 頃）— ‘アキレスは亀に追いつけない’ の逆理で有名— は万物の根源を「不動・不変で不生・不滅な唯一の完全なる存在」[7] であると主張した．彼らがこの実に珍奇な説の主張に用いた方法が，サボーに注目された，間接証明法（＝帰謬法＝背理法）である．間接証明法は「ある事柄 P を証明したいときに，‘P が成り立たないとすると矛盾が起こる’ ことを導き，‘よって，P は成り立つしかない’ ことを示す方法」である．パルメニデスの哲学詩[7] の中にその 1 例（らしきもの）がみてとれる．

> 女神が探求の道を説いている：
> 一つは，（それは）ある，そして（それが）あらぬことは不可能である，という道.
> これは説得の女神（ペイトー）の道である（なぜなら彼女は心理の女神にかしずくがゆえ).

[6] アルパッド K. サボー 著『ギリシャ数学の始原』（中村幸四郎・中村清・村田全 訳，玉川大学出版部，1978)．これは専門書である．入門編：村田全 著『数学史散策』（ダイヤモンド社，1974；参考サイト：`http://redshift.hp.infoseek.co.jp/scilib.html`)，同 著『数学史の世界』（玉川大学出版部，1977)，伊東俊太郎 著『ギリシャ人の数学』（講談社学術文庫，1990)．

[7] M. スコフィールド 他著『ソクラテス以前の哲学者たち』【第 2 版】（内山 勝利 他訳，京都大学学術出版会（英語版：1983)）

> もう一方は，(それは)あらぬ，そして(それが)あらぬことが必要である，という道．
> これは全く持って識別不能の道であると私（＝女神）はあなたに言明する．というのも，あなたはあらぬものを知ることはできないであろうし
> — それはなされえない —
> またそれを指し示すこともできないであろうから．

古代ギリシャ語からの翻訳は難解であるが，解説すると，“第 1 の道は‘ある’（＝存在する）という道である．そのとき，あらぬ（＝存在しない）ことはあり得ない．一方，第 2 の道は‘あらぬ’という道である．そのとき，あらぬことが必然であり，あることは不可能である．あるかあらぬかは二者択一である．このとき，あらぬものを認知し，識別し，それを指し示すことはできない．したがって，あらぬ道を考えても意味がないので，その道は捨てられ，結果としてある道の方が選ばれなければならない”ということのようである．

確かに，(現在では笑止千万な‘証明’ではあるが) 背理法にはなっている[8]．また，ゼノンの‘アキレスは亀に追いつけない’という逆理は，‘アキレスは亀に追いつける’と仮定すると矛盾するという背理法になっている．背理法は実際に『原論』の多くの定理の証明に用いられた．ゼノンの逆理に関しては後で詳しく取り上げよう．

エレア派の現実からかけ離れた「不動・不滅の存在」は，意外に思われるだろうが，理性を重んじる**プラトン**（Platon，前 427〜前 347）に好感を持たれたようである[9]．プラトンは精神の育成という観点から数学を重視し，商用などの目的のために数学を学ぶべきではないと説いた（この彼の姿勢は，ギリシャ数学の理論的側面の発展を促す一方，実学的側面の停滞をもたらした）．

[8] 不動・不変や不生・不滅の‘証明’についても，ある と あらぬ を関係させる，背理法が可能である．例えば，不動については，‘運動があるとする．すると，ある場所で，ある状態からあらぬ状態になるのは あらぬ を巻き込む．それは不可能’という‘証明’ができる．パルメニデスはこの後“「あるもの」は完全なる「唯一者」（＝唯一の不動不変・不生不滅の存在）である”と断定するが，‘唯一’についての根拠は理解不能．後の議論で（‘唯一’を取り去った）「一者」を自然数の 1 と関連して取り上げる．

[9] プラトンは，生成変化する物質界の背後には，永遠不変のイデアという理想的な雛形があり，イデアこそが真の実在であるとした．不完全である人間の感覚ではイデアをとらえることができず，理性で認識することによってのみイデアに至るとした．

彼の学園には当時の名だたる数学者が集まり，一致協力して研究・教育に従事した．彼の学園の一員テアイテトス（Theaitetos，前 415〜前 369）は『原論』第 10 巻と第 13 巻に貢献し，**エウドクソス**（Eudoxos，前 390 頃〜前 337）は第 5 巻と第 12 巻に貢献した．また，学園の学徒 **アリストテレス**（Aristoteles，前 384〜前 322）は論理学の発展に寄与し，論証に不可欠の技術である三段論法を確立した．三段論法は「p から q が導かれ，q から r が導かれるならば，p から r が導かれる」という論証法である．先に議論した『原論』の 公理 と 公準 のあいだに明瞭な区別を設けたのはアリストテレスだといわれている．

次に，ギリシャ数学のもう一つの特徴である‘数と量の分離’について，その起源・原因を探ってみよう．

1.1.4　ギリシャの数

始めに数（数詞）について予備の議論をしておこう．日本古来の数は，よく知られているように，ひとつ，ふたつ，みっつ，$\cdots$ であり，漢字が渡来して後は，それらは 一つ，二つ，三つ，$\cdots$ のようにも書かれるようになった．その接尾語【つ】は多くの場合【個】を意味し，それらは 1 個，2 個，3 個，$\cdots$ などと個数を表す．一般に個数を表す数を**基数**といい，1 個，2 人，3 本，4 頭，$\cdots$ は基数の例である．英語で基数に当たるものは one, two, three, $\cdots$ である．英語では，順序を表す数 first, second, third, $\cdots$ (=1st, 2nd, 3rd, $\cdots$) があり，それらを**序数**という．基数と序数を区別するのはインド・ヨーロッパ語族に特徴的であり，古代ギリシャ語もその族に含まれる．日本を含む漢字文化圏では元来基数と序数を区別する概念はない．

接尾語【つ】を取り去った一，二，三，$\cdots$，および対応する $1, 2, 3, \cdots$ は，もはや個数や順序を表さない **無名数**（＝単位の名称や助数詞の付かないただの数）であり，それらは現在我々がいうところの「自然数」である．その自然数こそが，近代数学において，実数 に拡張されていく数なのであるが，古代ギリシャの数学に現れる数は，個数の意味が付帯された，基数の方であることに注意しよう．基数の概念は 2 千年にわたってヨーロッパの数学に縛りをかけ，それから抜け出すきっかけが得られたのは 17 世紀になってルネ・デカルトが『幾何学』を著してからである．

量 についても予備の議論をしておこう．量とは，1m, 2.3kg, 4 時間，5 個，600 円 など，一般に，大小の比較の可能なものや測定の対象となるものについて，その長さ・重さ・時間・個数などをいう．したがって，量は，無名数である実数に尺度の単位を付けたもの，または基数すなわち自然数に個数を表す単位を付けたものである．量は基数を含む概念であることに注意.

さて，古代ギリシャに戻ろう．古代ギリシャで数に関する定義を最初に行ったのはターレスとされている．彼は数を‘いくつかの **単位** の集まり’と定義した[10)]．これはユークリッド『原論』第 7 巻の定義によるものとほとんど同じである：

> 定義 1　単位とは，存在するそれぞれのものが，それによって「一(いち)」と呼ばれるものである.
>
> 定義 2　数とは，いくつかの単位からなる多である.

「単位」の意味がわかりにくいが，調べてみると，19 世紀の数理論理学者 G. フレーゲによって議論されている[11)]：

> ユークリッドが『原論』第 7 巻の冒頭部で与える諸定義において，彼は $\mu o \nu \acute{\alpha} \varsigma$(モナス)という語で，あるときは**数えられるべき対象**を，あるときは**そのような対象の性質**を，あるときは**数一(いち)**を表示しているように思われる．我々はいつでも「単位」という訳語で間に合わせているが，しかしそれが可能なのは，この訳語自体がこれらの異なった意味の間で揺れ動くからにすぎない．(太字部分は著者の注).

彼の議論から，(リンゴ) 5 個を考えているときは単位は【(リンゴ) 1 個】と考えられ，その数をギリシャ特有の数と見なして **数**$_{\text{ギ}}$ と書くと，数$_{\text{ギ}}$ $=5$【個】となるので，数$_{\text{ギ}}$ は基数と見なすことができる．市民 6 人では 数$_{\text{ギ}}$ $=6$【人】，馬 7 頭では 数$_{\text{ギ}}$ $=7$【頭】のように考えていくと，単位 は量における m, kg などの単位と違いはない．古代ギリシャ人は数を考えるのに際し，数を与える対象の性質を重視し，その性質を持つ最小単位のものの集まりをもって数としたのであろう．以下，そんな数を一般に 数$_{\text{ギ}}$ =（自然数）【単位】で表そう.

10) T.L. ヒース 著『復刻版 ギリシャ数学史』（平田寛 他訳，共立出版）I 巻 3.
11) フレーゲ著作集 2『算術の基礎』（野本和幸・土屋俊 編，勁草書房）第 29 節.

古代ギリシャ時代を通じてそしてそれ以後も，「単位」＝「一」は分割不能な対象と見なされたことに注意を払おう．確かに単位が例えば【1 人】ならそれを半分にしたら人でなく死体になるから，人という意味を失わないためには分割してはいけないことになるだろう．ただし，ギリシャ人は，定義によって，「単位」を分割不能としたようである．このことに関する最も明確な記述をプラトンの『国家』から引用しよう[12]：

> ⋯ 君もおそらく知っているとは思うが，この学問の専門家は，純粋な「一（いち）」を議論の上で分割しようとする人があっても，これを一笑に付して相手にしないものである．むしろ，もし君が一を細分割したら，彼らは（その分だけ）多化するだろう．もっとも，その間において，一が一でなくて多者（＝多くの部分の集まり）だと思われないように用心しながらね．⋯

この分割不能は，数$_{\text{ギ}}$ を割り算して分数にすることを不可能にし，その結果，実用数学の発展を遅らせた．ギリシャの商人や大工，技師などは計算に分数を使っていたが，数学者はそれを全く無視し，それはアルキメデス（Archimedes，前 287〜前 212）が π や面積の近似計算をするまで続いた．数学者は分数が必要なときは，数$_{\text{ギ}}$ の比，つまり「数$_{\text{ギ}}$：数$_{\text{ギ}}$」を用いたのである．

1.1.5　無理量の発見

ミレトスのターレスに遅れること約 50 年，同じイオニア地方にあるサモス島に **ピタゴラス**（Pythagoras，前 572 頃〜前 494 頃）が生まれた．ピタゴラスはターレスの勧めでエジプトに留学したが，その最中にたまたまペルシャ軍がエジプトに侵攻した．それを機に，彼はバビロニアにまで足を伸ばしたらしい．エジプトよりはるかに進んでいたバビロニアの数学を持ち帰ったことが後にピタゴラス学派の創設に導いたのは間違いない．イオニアでは，前 540 年頃から，ペルシャ軍が多くの都市を圧迫したため，人々は南イタリアに逃れてポリスを建設するようになった．ピタゴラスも 40 才の頃クロトンに移住するこ

---

[12] 例えば，A.K. サボー 著『数学のあけぼの』（伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全 訳，東京図書，1976）第 I 部 3

とになったが，エレアもそのような避難民の都市であり，パルメニデスが生まれている．かくしてギリシャ文化の中心はイオニアから南イタリアに移動したのである．

クロトンでピタゴラスは一種の哲学的秘密宗教団体を創設し，そこでは数学・音楽・哲学の研究が重んじられた．ピタゴラスは，今では，数学者であったとする根拠がかなり乏しくなっているが，バビロニアの数学を弟子に教育し，そこからピタゴラス学派と呼ばれる数学者達が育っていったことは間違いない．例えば，ピタゴラスの定理[13] を満たす 3 辺の整数解（例えば，辺の比が 3 : 4 : 5 とか 5 : 12 : 13 となる整数）は，既にバビロニアで，

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \quad y = m, \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \qquad (m \text{ は奇数})$$

と実質的に同一なものが知られていたのだが[14]，定理そのものの一般的証明はピタゴラス派の手になる．整数解の存在はピタゴラス派にとって重要である．

ピタゴラス教団は魂の不死と輪廻への信仰が中核にあり，魂の浄化の重要な手段として用いられたのが音楽であった．その目的のために音楽の理論的な研究が熱心に行われ，その過程において現在の音楽理論の基礎となる大発見が弦楽器においてなされた．弦の長さが 2 : 1，3 : 2，4 : 3 の整数比の場合に 2 つの音が美しい「協和音」になるということである．

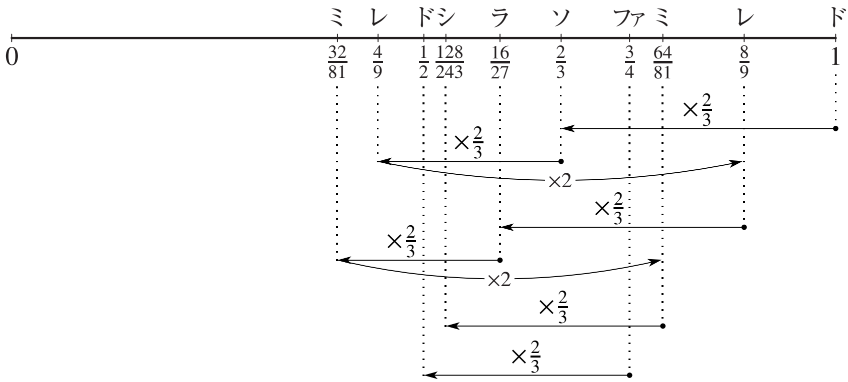
弦の振動理論も援用して説明しよう．単位長さ当たりの質量（＝線密度）$\overset{\text{ロー}}{\rho}$，長さ ℓ の弦を張力 T で引っ張り，両端を固定しておいて振動させるとしよう．このとき，弦の基本振動数 f は

$$f = \frac{\sqrt{T/\rho}}{2\ell}$$

で与えられることが知られている[15]（弦の倍振動は今の議論には無関係）．上の式は，線密度 ρ（$\propto$ 弦の太さ）と張力 T を固定するとき，弦の振動数 f は弦の長さ ℓ に反比例することを示している．例えば，弦の長さが半分になると振動数は 2 倍になる，つまり元の音がドのときは 1 オクターブ上のドの音になり，それら 2 音を完全 8 度音程の協和音という．また，弦の長さが $\frac{2}{3}$ になる

13) 「3 辺 x, y, z の三角形（斜辺 z）が直角三角形である条件は $x^2 + y^2 = z^2$ である」
14) ☞ p.6 の脚注，『ギリシャの数学』第 1 章 第 2 節.
15) 例えば，拙著『高校数学 +α なっとくの線形代数』（共立出版）§5.3.

と，振動数は $\frac{3}{2} = 1.5$ 倍になる，つまり元の音がドならソになり，それらは完全 5 度音程の協和音と呼ばれる．ピタゴラス派は協和音に秘められた自然の摂理を探し求め，下に図解するように，完全 5 度音程（弦の長さの比 3 : 2）を用いてドレミファソラシド長音階の基礎を歴史上初めて確立した[16)]．



直角三角形の辺の長さの整数解，また協和音と弦の長さの整数比の関係はピタゴラス派が‘万物は数である’という結論を神の啓示として受け入れるのに十分であったろう．彼らは数つまり 数$_{ギ}$（= 基数）を全ての自然現象・哲学・数秘術に適用した．さらに，長さを比較した際に現れる整数比から，彼らは，「点」と呼ぶ **分割できない最小の長さ** が存在し，一般の長さはそれの整数倍で表される，と結論した．すなわち，ピタゴラス派は，算数における（分割不能な）「単位」と幾何学における「点」を比較し，

単位とは‘位置のない点’であり，点とは‘位置を持つ単位’である

と定義したのだった[17)]．したがって，数$_{ギ}$ に比較されるピタゴラス派のいう長さを 長さ$_{ピ}$ と書くとき,「点」の大きさを例えば原子の大きさ 1Å ($= 10^{-8}$cm)

---

16) 長さ 1 の弦がドの音を出すとして，$\frac{2}{3}$ ずつ短くし，$\frac{1}{2}$ より短くなったら（1 オクターブ以内に収まるように）2 倍する．ただし，ファは $\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{2}$ 倍した弦長 $\frac{3}{4}$ の音（上のドから 5 度下げた音）．
参考サイト：`http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/monocode/monocode_index.htm`

17) ☞ p.12 の脚注『復刻版 ギリシャ数学史』I 巻 3．同『ギリシャ数学史』第 1 章 第 2 節 (a)．

とすると，長さは‘単位’【点】=【Å】の集まりによる長さということになるから，

$$長さ_{ピ} = (自然数)【Å】$$

の形で書かれることになる．ともあれ，‘単位’【点】=【Å】は分割不能であるから，長さ$_{ピ}$ を限りなく分割することはできないのである．

前 5 世紀半ばに近づく頃であろうか，ゼノンは，師パルメニデスの主張した「唯一不動の存在」，したがって，運動は存在しないという主張を弁護すべく，「二分割」・「アキレス」・その他のパラドックスを提出した：

> 二分割 : 運動は存在しない．なぜなら始点から終点までの移動は，終点に達する前に両者の中間，すなわち中点に達しなければならない．この中点に達するためには，この中点と始点との中点に達しなければならない．以下同様である．ところが，有限の時間内に無数の地点に触れることは不可能である．ゆえに運動は存在しない．
>
> アキレス： アキレスは亀を追い越せない．ただし，アキレスは亀より後の位置から出発するとする．すると，アキレスが亀を追い越すには，まず亀の出発点に達しなければならない．そのときには亀はその先の地点にいる．以下同様である．こうしてアキレスは亀を追い越すためには，無数の地点に触れなければならない．これは不可能である．したがって，彼は亀を追い越せない．

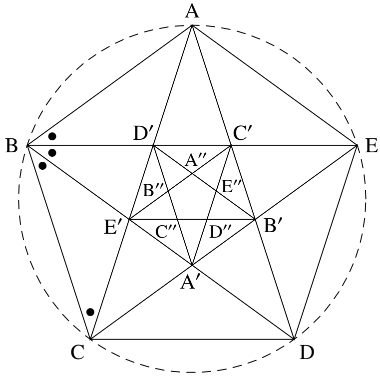
二分割のパラドックスは始点から終点までの距離を無限に分割したとき，それらの断片を全て加えることは無限級数を求めることになるが，そんな和は当時は収束しないと思われていた．したがって，始点から終点までの距離は無限になる，という主張である（‘無数の地点に触れる’とは長さの断片の無限級数を求めることと同じ)．アキレス についても，同様に，時間の断片の無限級数は収束しないから，追いつけないという主張である [18)]．

ピタゴラス派から見れば，ゼノンのパラドックスは，長さは無限に分割可能であり，したがって，‘単位’【点】も分割可能という主張に映る．これは由々しき一大事であり，その真偽を確かめずにはいられなくなった．その試みを実

---

18) その解決については，例えば，☞ 拙著『高校数学 $+\alpha$：基礎と論理の物語』§11.6.

際に行ったのはヒッパソス（Hippasus，前 5 世紀中頃に活躍）であるという伝承はよく知られている．彼は 12 個の正五角形の面で囲ってできる正十二面体[19]の研究に関わり，またピタゴラス教団の紋章が五芒星(ごぼうせい)図形☆であったことから，彼は無理量を正五角形の 1 辺と対角線の関係から発見した[20]という学説がある．伝承によると，彼はピタゴラス派の中で秘密にすべき無理量の発見を外部に漏らしたため，神の怒りに触れて海で命を落としたとあるが，最近の数学史家達の研究によると，それを信ずべき根拠は乏しいようである．ともあれ，前 430 年頃，無理量をピタゴラス派の誰かが発見し，（秘密を漏らしたか，発見を公表したかは別として）そのことがギリシャ数学に与えた影響は計り知れないものがあったのは事実である．



なお，アリストテレスの著作には背理法を用いた無理量の証明方法が載っており，その方法が証明の決定版であり，その方法で無理量が発見されたとする

---

19) ☞ ウェブサイト:「正十二面体 - Wikipedia」で回転している立体図が見られる．

20) 以下の議論において，上の正五角形図の辺 AB と対角線 AC が両者に共通な単位【点】の整数倍の長さ（以下，倍数長 と記す）であるとすると矛盾することを示す．

$\mathrm{AB} = n$【点】，$\mathrm{AC} = m$【点】（m, n は自然数）とするとき，$\mathrm{AC}-\mathrm{AB} = (m-n)$【点】は【点】の倍数長である．これは「自然数 m, n の公約数は差 $m-n$ の約数である」と同質の定理．

※ $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}'$，$\mathrm{CE}' = \mathrm{A}'\mathrm{C}'$ などの証明は各自に任せる．

さて，$\mathrm{AC}-\mathrm{AB} = \mathrm{AC}-\mathrm{AE}' = \mathrm{CE}' = \mathrm{A}'\mathrm{C}'$ は【点】の倍数長．

したがって，$\mathrm{AB}-\mathrm{A}'\mathrm{C}' = \mathrm{AE}'-\mathrm{D}'\mathrm{A} = \mathrm{D}'\mathrm{E}' = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$ も【点】の倍数長．

以上の議論から，正五角形 ABCDE の辺 AB と対角線 AC が共に【点】の倍数長のとき，それに含まれる正五角形 A′B′C′D′E′ の辺 A′B′ と対角線 A′C′ も共に【点】の倍数長．同様にして，それに含まれる正五角形 A″B″C″D″E″ の辺 A″B″ と対角線 A″C″ も共に【点】の倍数長である．これらの操作は【点】の倍数長から【点】の倍数長を引く操作であり，それを続けていったとき，もし【点】が共通の単位 (> 0) ならば，操作は有限の回数で終わるはずである．しかしながら，図からわかるように，この操作は限りなく続き，いくらでも小さい正五角形が描け，かつその辺と対角線は共に【点】の倍数長である．こんな場合には，正五角形はいくらでも小さくなり，したがって【点】は限りなく小さい量でなければならない（このことは分割不能な【点】なるものは存在しないことを意味する）．したがって，元の辺や対角線を（共通の単位としての）【点】の倍数長として表すことは無意味である．この事実は，長さは 無理量（＝ある単位の無理数倍の量）であることを示している．

説も有力である．以下，その現代的な証明の一部を載せるので，続きは各自で補ってみよう．1 辺が a の正方形の対角線を b とすると，$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. 長さの単位を【1cm】にとるが，以下略記して，線分は数として扱う．a, b が分数であるとき，$b^2 = 2a^2$ の分母を払いまた約分して，a, b は公約数がない自然数としても一般性を失わない．このとき，$b^2 = 2a^2$ から，a, b が共に偶数であることを示して，矛盾を導く．以下，省略する[21]．

数の概念を長さなどの量にまで拡張しようとしたピタゴラス派の目論見はもろくも潰(つい)えたが，その名残は，ピタゴラス派のテアイテトスの業績を記述したといわれる，ユークリッド『原論』第 X 巻の定義 1 に残されている：

> 同じ尺度（単位）により割り切られる量は「通約量」といわれ，いかなる共通の尺度も持ち得ない量は「非通約量」といわれる（通約＝約分）．

通約量は

$$\text{量} = (\text{自然数})【\text{単位}】$$

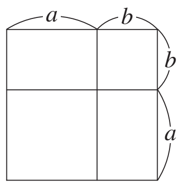
と表したときのみ可能であり，本当は【単位】を【点】と書きたかった悔しさが滲(にじ)んでいるようにも読み取れる．現在におけるその正しい表現は

$$\text{量} = (\text{実数})【\text{単位}】$$

である．

無理量が発見された後，ギリシャの数学者は量を扱うときに数を用いることをあきらめ，むしろ，実数が関係する代数的関係を幾何学的に示した．例えば，ユークリッド『原論』第 II 巻の命題 4 には 定理：$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$　を

> 線分が任意に 2 分されるとき，線分全体の上の正方形は，二つの線分部分の上の正方形と，二つの線分部分によって囲まれた長方形の 2 倍との和に等しい．（※ かなり意訳した）．



のように，幾何的考察を用いて表した．また，バビロニアの連立方程式なども作図によって解き，その解は線分で表した．このような代数の欠如は，ヨーロッパでは，十字軍の後にイスラム数学がもたらされるまで続くのである．

21）いき詰まった人は，例えば，p.16 の脚注『高校数学＋α』§1.8.2 参照．
参考ウェブサイト：http://www.h6.dion.ne.jp/~hsbook_a/KakuShouPDF.html

また，ギリシャの数学者が，分数を認めないなど，実学を軽視して理論に特化したことは，『原論』第 I 巻の命題 41：「平行四辺形と三角形が底辺を共有し，同じ平行線に挟まれているならば，平行四辺形の面積は三角形の面積の 2 倍である」という定理はあるが，「三角形の面積は底辺と高さの積の半分に等しい」という定理がないことにも現れている．

最後に，ずっと後に議論の対象になる，アルキメデスにも匹敵する天才とうたわれた エウドクソス（Eudoxos，前 409〜前 355）の業績である『原論』第 V 巻（比例論）の定義 3, 5 を載せておこう：

定義 3　比とは，同種の 2 つの量の大きさに関する一種の関係である．

定義 5　4 つの量 a, b, c, d の比 $a : b$ と $c : d$ が等しいとは，任意の自然数 m, n に対して次が成り立つことをいう．

$$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd,$$

$$\text{または}\quad ma = nb \Leftrightarrow mc = nd,$$

$$\text{または}\quad ma < nb \Leftrightarrow mc < nd.$$

比は同種の量の間にある関係とすることは，次元の異なる面積と長さの比「面積：長さ」や比の値「面積 / 長さ」などに意味が付けられないということであり，これは一見理に適っている．しかしながら，これによると，例えば，速度つまり「移動距離 / 要した時間」などを考えることはできない．この狭量な比の概念は，少なくともデカルトの時代まで，おそらくはニュートンの時代まで続くのである [22]．

定義 5 は, 2 つの連続量が等しいことを整数の比つまり有理数によって定義するものである．（※ 例えば，任意の自然数 m, n に対して，$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd$ は「全ての自然数 m, n を考えたとして，ある m, n に対して $ma > nb$ が成り立つとき，その m, n に対して $mc > nd$ も必ず成り立つ．またその逆も成り立つ」と読む）．これは，19 世紀になってようやく，‘有理数を用いて実数を厳密に定義した’いわゆる「デデキントの切断」に相当する，褒め称えられるべき，業績である．

[22] ☞ p.9 脚注『数学史散策』第 9 章 4.

§1.2 中世の数学

キリスト教が支配する中世ヨーロッパは学問の「暗黒時代」であった．光は東方にあった．

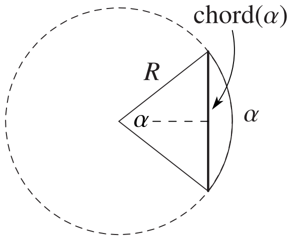
1.2.1 古代ギリシャ数学晩期の巨人たち

ユークリッドが晩年を迎える頃，古代のもっとも偉大な物理学者・工学者で数学者の**アルキメデス**（Archimedes，前 287〜前 212）が（現在はマフィアで有名な）シチリア島のシラクサで生まれた．彼は天才的な軍事技術者であり，てこを利用したカタパルト（＝投石機）を用いて敵の海軍を打ち破った．また，王が贈り物に作ったが重すぎて進水できずにいた豪華巨船を滑車を用いて進水させたとか，職人に作らせた純金の王冠に銀が混入されていることを浮力を用いて見破ったという逸話が残っている．彼は，若い頃アレクサンドリアに滞在してユークリッドの弟子たちからギリシャ数学を学び，それを完全にマスターした．それゆえに，てこや浮力などの物理問題に対して「数学的モデル」[23] を作ってそれらの原理を厳密に証明したのだった．彼があのニュートンと比すべき天才とうたわれる所以(ゆえん)である．

ユークリッドは数値計算を行うことはなかったが，アルキメデスはそれを厭(いと)わなかった．『円の計測』という短い論考の中で，円に内接および外接する正多角形を考え，それらの正多角形の周の間に円周があることを利用して，円周率 π の近似値を求めた．彼は正 96 角形まで計算し，$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を得ている．

アルキメデスは，上の結果にあるように，分数を用いるのにためらいはなかった．それは，彼が，不連続な数ではなく，量を扱ったからであり，分数を数と認めたわけではなかった．数の定義のような純粋に形而上学的問題には，彼の関心が向くことはなかった．

[23] 複雑な物理現象を数学的に取り扱うために，物理的な状況を単純化したモデルのこと．例えば，てこについて言えば，てこそのものは変形しない剛体で，重さを持たず，支点と重心は大きさのない点であると仮定する．



膨大な数値計算を必要とするのが三角形の辺と角の関係を調べる「三角法」である．三角法は土地の測量や暦を作るための天体観測の必要性から生じ，そのためには現在の三角関数表にあたる精密な表を作る必要があった．ヒッパルコス（Hipparchus，前 190 頃～前 120 頃）および後世の プトレマイオス（Ptolemaeus，100 頃～178 頃）は，上図にあるように，一定の半径 R の与えられた弧 α（または中心角 α）に対する弦の長さ chord(α) を様々な α の値に対して求めて表にした．chord(α) は現在の正弦で表すと

$$\mathrm{chord}(\alpha) = 2R\sin(\alpha/2)$$

である．プトレマイオスは，16 世紀に至るまで影響力があり，イスラムの学者から『アルマゲスト』として知られる，13 巻からなる天文学の著作を残した．その中には，$\frac{1}{2}^\circ$ の間隔で $\frac{1}{2}^\circ$ から 180° までの全ての弧の弦の表が載っている．

プトレマイオスは $R = 60$ を採用し，60 進法で計算を行った．このとき，chord(α) は α の連続関数となるが，彼はこのことを十分に認識していた[24)]．

以上，ユークリッド『原論』以後の，数値計算を必要とする数学の話題を取り上げたが，そこで扱う「連続量」は，天上の問題を解くにも，地上の問題を解くにも必要であった．この連続量こそが，千数百年の時を経て，我々の数すなわち「実数」に変身するのである．

1.2.2　位取り記数法とゼロ 0 の発明

始めに，漢字を用いた例で解説しよう．一，二，$\cdots$，九，十と順に書いたとき，次の数は十一と 2 文字を使った 2 桁の数字で書かれる．これは数を表す文字すなわち「数字」を節約し，簡単に数を表すためである．唐以前の中国では二千十 $(= 2\cdot 10^3 + 10)$ などのように，十 $= 10$，百 $= 10^2$，千 $= 10^3$，$\cdots$，などと 10 を **底** とする**累乗** 10^n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を用いて各位の数を表す 10 進**位取り記数法** を用いた．「10 進法」に限らず，大きな数を表すには，数字であれ，算木・算盤の類であれ 位取り記数法 は絶対である．

---

24) ☞p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.179.

数をもっと簡単に表すには，十，百，千，・・・などの数字も用いない方法があればよい．一番初めに考えられた方法は，古代バビロニア文字（☞p.3）で行われたように空白␣を用いて，二千十を 二␣一␣などと空位が分かるように表せばよい．これによって，一，二，···，九の 9 文字だけでいくらでも大きい自然数を表すことができる．ただし，空白␣は見えないので誤りを生じやすく，それに変わる記号が現れた．古代バビロニアでは，紀元前 5 世紀以降に記号を用いた．ただし，を数字の最後つまり第 1 位に置くことは無かったので，完全な (60 進) 位取り記数法にはならなかった．

インドでは，五世紀中頃の教典『ロカヴィバーガ』(458 年）に，14236713 に当たるインド数字の読み (いちよんに··· に対応する読み) が位取りの原理にしたがって書かれ，さらにゼロを表す「空（スンヤ）」という言葉も載っていた[25]．文献はかなり失われているが，7 世紀に入る頃には広い地域で，9 個のインド数字および「空」を表す点 ● を空位に用いて，数字が表されるようになっていた (☞p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.264.)．例えば，二千十は「● 一 ● 二」(左側が低位)．7 世紀のインドでは 10 進位取り記数法は確立していた．

ここで，重要な出来事に注意しよう．記号 ● は，空位を表すだけでなく，空つまり何もないことを表す．したがって，それが数のように用いられたということは，● は「何もない数」つまり現在のゼロ 0 を表すという意味付けがなされていたことになる．つまり，数がないことに対して‘数がないことを表す数ゼロがある’，もっといえば，‘何もない’を‘無がある’と考える概念上の革命が起こっていたと解釈される．数ゼロ 0 の発明は数学史上第一級の (概念的) 発見であるといわれる所以（ゆえん）である．

記録によると，773 年，イスラム帝国の都バグダッドにインドの学者が訪れ，10 進位取り記数法を用いて書かれた天文学書を伝えたという． 4 世紀末以降におきたキリスト教の異教徒迫害から東方に逃れたアレクサンドリア図書館の学者をイスラムの支配者は保護し，古代ギリシャ数学の高度な知識はイスラムの学者に引き継がれていた．そのため，インドからの贈り物の重要性は容易に理解され，アル・ファーリズミー（al-Khwārizmī，780 頃〜850）は 9 世紀の初頭に『インド式算術による加法と減法』を著し，インド方式はイスラム数学の

[25] ドゥニ・ゲージ 著『数の歴史』(「知の再発見」双書)（藤原正彦 監修，創元社，1998 年）

中に浸透していった．何しろ，0 を用いるインド式 10 進位取り記数法では，計算は現在の小学生でも分かる，筆算によって計算過程も残せるのだから．

ヨーロッパ人がこの重要な文献に接するのは，ノルマン人の傭兵がイスラム教徒の支配からシチリア島を奪還し，十字軍遠征によってイベリア半島を取り戻した 12 世紀以降のことである．インド数字はこのとき「アラビア数字」の名でヨーロッパに徐々に浸透していき，ゼロ 0 も数として認知された．ユークリッド『原論』を含む古代ギリシャ数学の文献もようやく日の目を見た．代数学（**algebra**）の語源ともなった，アル・ファーリズミーの『アル・ジャブルとアル・ムカーバラの計算法についての簡約な書』(825 年頃）も何度となく翻訳された（☞ p.27）．

1.2.3　インドにおける負数の認知

負数は 2 次以上の代数方程式の解として現れてしまう‘招かれざる数’であった．ヨーロッパの数学は 2 千年間は負数が現れないようにするための努力に終始し，その後は負数を認知・正当化の方向に転じた．負数が数として確立されたのは今からわずか 2 百年ほど前のことである．

既に見たように，古代バビロニアで扱われた連立 2 次方程式（☞ p.3）では負数が現れないように問題が作られている．

3 世紀にアレクサンドリアで活躍したギリシャの数学者 ディオファントス（Diophantus，3 世紀初頭〜3 世紀末）は，主著『数論』に現れる次のような式変形のさいに，負数の積に関する規則をすでに用いていた：

$$(2x-3)(2x-3)=4x^2-12x+9.$$

$(-3)\times(-3)=+9$ である．しかしながら，ディオファントスは，-3 を負数とは認識せずに「引く数」といい，正数を「加える数」と名付け，掛け算の規則を次のように表した：“加える数に引く数を掛けると引く数になり，引く数に引く数を掛けると加える数になる”．ちなみに現在の数学では引き算 $2x-3$ は負数 -3 の足し算 $2x+(-3)$ と定められています．

古代の中国では役人が統治に必要な技術を磨くための実用的問題集形式の数学書『九章算術』が編纂された．加筆修正を経て紀元後 2 世紀頃には完成した

ようで，263 年には三国の魏の数学者劉徽（りゅうき）が註釈本を制作した．その第 8 章方程には連立 1 次方程式の問題と解法が載っているが，そこで正・負という文字が使われている．具体的な問題で見てみよう [26]．

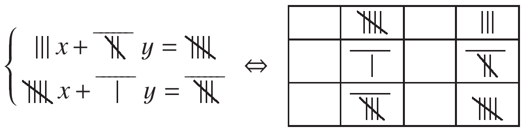
> 上禾（か）（＝稲）3 束に実 4 斗（と）（1 斗 = 10 升（しょう））益（ま）す（＝加える）と，下禾 7 束にあたる．また，下禾 6 束に実 8 斗益すと上禾 4 束にあたる．上下禾の実は 1 束それぞれいくらか．

この問題は，上禾 1 束の実を x 斗，下禾 1 束の実を y 斗とすると，

$$\begin{cases} 3x + 4 = 7y \\ 6y + 8 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases}$$

のように現代的表示では立式される．右側の表示は，現代風にいえば，行列を用いた掃き出し法 [27] を適用する形にするためのもので，当時の中国では係数の数字を算木（さんぎ）とよばれる爪楊枝（つまようじ）のような計算棒 | で表し，それらを格子を書いた算盤（さんばん）と呼ばれる紙や板に並べて計算した．図解すると次のようなものである：算木を用いて 1 = |, 2 = ||, 3 = |||, 6 = $\overline{\mid}$, 7 = $\overline{\mid\mid}$ などと表し，また引き算については斜算木＼を用いて −4 = $\cancel{||||}$, −7 = $\overline{\cancel{||}}$ などとすると，

$$\begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$



のような手続きで算木が算盤上に並べられる．

以上の対応を頭に入れて，我々は，算盤上で行われた計算を，連立方程式で見てみよう．$a > b > 0$ のとき，計算法則 $(-a)-(-b) = -(a-b)$, $(-a)-b = -(a+b)$ および $0-(-b) = -(-b) = b$ は知られていた．

$$\begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4x - 7 \cdot 4y = -4 \cdot 4 \\ -4 \cdot 3x + 6 \cdot 3y = -8 \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4x - 7 \cdot 4y = -4 \cdot 4 \\ 0x + (18 - 28)y = -(24 + 16) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ \quad -10y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 70y = -40 \\ \quad -10y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - (70 - 10 \cdot 7)y = -40 - (-40 \cdot 7) \\ \quad 10y = 40 \end{cases}$$

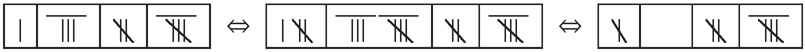
---

[26] 片野善一朗 著『数学用語と記号物語』（裳華房，2003）p.39.

[27] 例えば，拙著『高校数学 $+\alpha$ なっとくの線形代数』§6.4.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30x = -40 + 280 = 240 \\ \quad y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

上式で，例えば，第 2 式の方の y の係数が $18 - 28 = -10$ などの算盤上の計算は



（他の行は省略）のように行われ，$18 - 28 = 18 + (-28) = -10$ と正数 + 負数の形になっている．

上の計算において，中国人は方程式の係数が負になることを厭わず，係数の正負を区別する工夫をうまく行って解いていることがわかる．劉徽の注釈によると“‘益す’と‘損らす’という 2 種の得失は相反するから，つまるところ正と負で名付ける．…”とある．これらのことを勘案すると，算木における正数・負数は，正・負という用語は用いているものの，先に見たディオファントスの‘加える数’・‘引く数’と同様，実際には‘益す数’・‘損らす数’と見なされていたことがわかる．古代中国においては，負数＝損らす数 を別の数に掛けたり・割ったりすることはなかった．

中国の正・負を学んだインド人は負数に対してより踏み込んだ見解を持つに至った．7 世紀の傑出した天文学者で数学者の ブラフマグプタ（Brahmagupta, 598〜668）は，773 年にイスラムに伝えられた天文学書は彼の主著『ブラフマスプタシッダーンタ』(628 年）であろうと言われているが，著書の中で正数を‘財産’，負数を‘借金’と解釈した．この財産・借金という解釈は正数と負数が数として対等であることを意味し，その見解は 12 世紀の優れた天文学者・数学者 バースカラ（Bhāskara，1114〜1185）にも受け継がれている．彼らは財産・借金の四則演算つまり加減乗除の全ての計算規則を，理論的基礎づけなしに，示した：$a, b, c > 0$ として，

2 つの財産の和は財産である：$a + b = c$
2 つの借金の和は借金である：$(-a) + (-b) = -c$
財産と借金の和はそれらの差に等しい：$a + (-b) = a - b$
⋮
ゼロから引かれる借金は財産となる：$0 - (-a) = a$
⋮

借金と財産の積は借金：$(-a) \cdot b = -c$
借金と借金の積は財産：$(-a) \cdot (-b) = c$
⋮
財産が借金で割られると借金：$a/(-b) = -c$
借金が借金で割られると財産：$(-a)/(-b) = c$

バースカラは，2 次方程式を解く際に現れる負数が正当な場合があり，それを用いると正しい解が得られることを明白に示している．これは真に負数を認知したことを意味する．その例を与える問題を実際に解いてみよう：

快活な猿の群れがお腹いっぱい食べ終えて，遊びはじめた．群れの数の 1/8 を平方した頭数は草地で気晴らし中で，その残りの 12 頭の猿は森で蔓（つる）にぶら下がり，跳びはねている．この群れの猿は全部で何頭か？

群れの全数を x 頭とすると，方程式は

$$x = (x/8)^2 + 12 \iff x^2 - 64x = -768$$

である．バースカラは，‘財産と財産の積は財産’・‘借金と借金の積は財産’を知っていたため，我々も行う正しい解法「平方完成」を用いて，正しい解を得ている：

$$x^2 - 64x = -768 \iff x^2 - 2 \cdot 32x + 32^2 = -768 + 32^2 = 256$$

$$\iff (x-32)^2 = (\pm 16)^2 \iff x - 32 = \pm 16 \iff x = \begin{cases} 32 + 16 = 48 \\ 32 - 16 = 16 \end{cases}$$

この問題では 48 頭と 16 頭のどちらも正しい解である．彼は，他の 2 次方程式の問題で，つじつまの合わない解が現れた場合には採用していない．

ところで，群れの全数を‘x 頭’としたことは，この未知数 x は現在我々がいうところの数つまり無名数（☞p.11）であることに注意しよう．もし未知数がギリシャ流の単位付きの 数$_{ギ} = x$【頭】だったとすると，対応する方程式は x【頭】$= (x$【頭】$/8)^2 + 12$【頭】となって【単位】が合わない項の和が現れ，意味のない式になる．ヨーロッパの学者が負数の認知に手こずったのはこの【単位】のせいである．そのせいもあって，正数・負数のインドにおける呼び名‘財産と借金’はヨーロッパではかえって混乱をもたらした．

1.2.4　イスラムにおける代数学の発達

古来より数学の多くの問題は未知の数とそれを決める方程式からなる．未知数に x などの文字や記号を用いて方程式の解法を研究する学問は **代数学** といわれる．未知数に初めて文字・記号を用いたのは 3 世紀の ディオファントス（☞ p.23）で，彼は x およびその 6 次までの累乗の記号を記している（ただし，計算の際には記号を無視して言葉で述べた）．

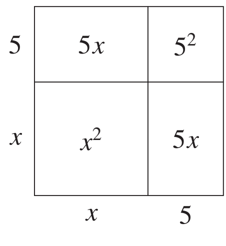
古代バビロニアの数学を知っていたイスラム数学者は，アレクサンドリアからもたらされた古代ギリシャの著作を研究し，またインドからの知識を吸収して，代数学を発展させた．ギリシャ数学から学んだ最も重要なことは証明という観念である．‘代数方程式を解いても，得られた解の有効性を証明できない限りは，数学の問題を解いたことにはならない’ということをイスラムの学者は理解したのである [28]．彼らはギリシャ数学で行われていた幾何学的方法を代数的規則の証明に取り入れた．

ヨーロッパに 10 進位取り記数法と 0 を伝えた算術書で有名なアル・ファーリズミーは，825 年頃，さらに大きな影響をもたらした『アル・ジャブルとアル・ムカーバラの計算法についての簡約な書』を著作した．幾何的証明のついた方程式解法の例を見てみよう．

（未知数の）平方と 10 個の（平方の）根で数 39 になる．根を求めよ．

根（= 未知数）を x とすると，方程式は

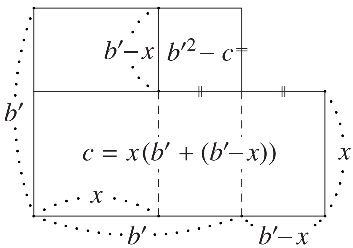
$$
\begin{aligned}
& x^2 + 10x = 39 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 = 25 + 39 \\
\Leftrightarrow\ & (x+5)^2 = 8^2
\end{aligned}
$$



のように平方完成によって解かれ，正の解 $x = 8 - 5 = 3$ を得る．平方完成の正当化は，図からわかるように，未知数や係数を線分の長さに，定数は面積に見立てて行われた．したがって，それらは必然的に正の量でなければならない．

[28]　☞ p.1 脚注『カッツ 数学の歴史』p.277.

一方，問題「平方と数 21 で 10 根に等しい．根を求めよ」（$x^2 + 21 = 10x$）においては，単純に平方完成すると $(x + (-5))^2 = 5^2 - 21 = 4$ となって，負の線分‘-5’が現れてしまう（$(-5)^2 = +5^2$ の正当化もできない）．したがって，アル・ファーリズミーは，$x^2 + 21 = 10x$ のようなタイプの方程式は平方完成によって解かれるタイプ $x^2 + 10x = 39$ とは別物と考え，平方完成を行わない正当化を考えた．彼がそうしたように，一般化した問題 $x^2 + c = 2b'x$ $(b', c > 0)$ で解説しよう．変形すると $x^2 - 2b'x + b'^2 = b'^2 - c$ で，左辺は $(x - b')^2$ または $(b' - x)^2$ を表す．彼は $b' > x$ の場合に，$c = x(2b' - x)$ つまり「c は 2 辺が x と $2b' - x = b' + (b' - x)$ の長方形」から出発し，$b'^2 - c$ つまり正方形 b'^2 の面積と長方形 c の面積の差が正方形となる図が描ける（つまり，解が存在すること，およびその正方形の 1 辺が $b' - x$ であることを示した（右図）．つまり，彼は $x^2 + c = 2b'x$ の解として $b' - x = \sqrt{b'^2 - c}$ を与え，その正当化を行ったのである（解 $x - b' = \sqrt{b'^2 - c}$ の正当化の方は省略している）．



以上の考えに基づいて，アル・ファーリズミーは 1 次・2 次方程式を解法別に 6 通りに分類した：

$$a, b, c > 0 \text{ として，} ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c$$
$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad bx + c = ax^2.$$

アル・フワーリズミーの解法は，古代ギリシャ流の幾何学的方法によって解の正当性を証明しており，ヨーロッパの学者に広く受け入れられることになった．与えられた問題を整理して 6 通りの解法に当てはめるには，負の項を移項して正の項になおし，同類項を簡約して整理する必要があるが，先に述べた著作の表題にある「アル・ジャブル」が移項，「アル・ムカーバラ」が簡約を意味する．この著作がラテン語に翻訳されたとき，アル・ジャブルは翻訳されずにそのまま代数学 (algebra) の名前になった．著者アル・ファーリズミーのラテン語訳アルゴリスムスもインド式算術の代名詞になり，今日の アルゴリズム (algorithm) の語源となってしまった．

1.2.5　中世ヨーロッパの数学

4 世紀後半，アジア系遊牧民族のフン族が西進し，その圧力に耐えきれずにゲルマン人の諸民族が次々とヨーロッパ各地に移動して建国していった．この大移動による混乱の中，西ローマ帝国は 476 年にゲルマン人の傭兵軍によって滅ぼされ，ヨーロッパは中世の時代に入った．関税や盗賊で陸上交通は不便になり，地中海の制海権も失なったため，貨幣経済を担っていた都市は衰退し，また穀倉地帯の属国も失って自給自足の経済に逆戻りしてしまった．まさに学問どころではない暗黒時代が続くのである．やがて徐々にキリスト教がヨーロッパ各国に広まっていき，第 1 回十字軍遠征（1096 年）の頃にはローマ教皇の権威が確立されて，ヨーロッパの国々はキリスト教信奉の統一体となっていった．そして，都市も発展して国力が増し，ヨーロッパからイスラム勢力を排除するのに成功した．12 世紀の中頃には製紙技術がようやくヨーロッパに伝わっている．

奪還した図書館で見つかったイスラムや古代ギリシャの重要な著作（☞ p.23）はラテン語に翻訳され，12〜13 世紀はヨーロッパの学者がそれらを理解・吸収する期間となった．その一人がその名を冠する数列[29]で有名なイタリアはピサの フィボナッチ（Leonardo Fibonacci，1174 頃〜1250 頃）である．彼は，イスラム文化圏を旅して知識を深め，『算盤の書』（1202 年）や『実用幾何学』（1220 年）・『平方の書』（1225 年）でイスラムの数学を初めて包括的な形でヨーロッパに紹介した．自治権を得て発展しはじめたイタリアの都市の測量術士や算法教師たちは彼の著作から多くを学び，特にフィボナッチ数列を含む『算盤の書』は多くの写本が残るほど広く読まれた．この書の冒頭でインド・アラビア数字が紹介される様を見てみよう：

> インド人の用いた九つの記号とは，9，8，7，6，5，4，3，2，1 である．これら九つの記号，そして，アラビア人たちが “zephirum”（暗号）と読んだ，0 という記号を用いれば，いかなる数字も書き表すことができる．以下にそれを示そう．

---

[29] フィボナッチ数列である．☞ 例えば，p.16 脚注の拙著 §§ 11.3.3.

彼の著作は 300 年以上の長きにわたって読み継がれ，ルネッサンス時代に入って新しい数学がようやく誕生することになる．

12 世紀の末，ヨーロッパの都市に大学が誕生した．その形態は様々で，教会の付属学校から出発したもの（パリ大学），教師のギルド（＝同業組合）から始まったもの（オックスフォード大学），学生のギルドを起源とするもの（ボローニャ大学）がある．例えば，ボローニャ大学では学生が教師を雇って給料を払うという具合である．当時の学校は校舎などの定まった建物を持たなかったことに注意したい．大学は学芸学部，法学部，医学部，神学部の全てまたは一部からなり，教師と学生はやがて各学部単位に独立した集団を構成した．

今風にいえば教養学部にあたる学芸学部では 6 年をかけて基礎学問を学ぶが，カリキュラムは古代の三科（論理学，文法，修辞学）と四科（算術，幾何，音楽，天文）で構成された．その中でも論理学が哲学的・科学的な探求の絶対的方法と考えられ，アリストテレスの論理学書がその基本テキストとされた．後には彼の他の著作も加えられた．

14 世紀になると，オックスフォード大学やパリ大学におけるアリストテレスの自然学関連著作の研究から運動に関する数学が発達した．速度の概念，その数年後には瞬間速度や加速度の概念が現れている．例えば，1335 年の著作[30)]には非一様な運動体の瞬間速度や等加速度運動が周到に定義されている：

> 非一様な運動において …… 任意の瞬間における速度は，運動する点が，その瞬間におけるのと同じ度合いの速さで，ある時間だけ一様に運動する場合に描くであろう道のりによって測られる．……
> ある運動について，等しい時間間隔のどれをとっても同じだけ速度が増加しているような場合を等加速度運動と呼ぶ．…… 他方，等しい時間間隔をとっても増加速度が等しくない場合，それは非一様に加速された運動と呼ばれる．……

残念ながら，このような新しい研究は歴史に埋もれ，そしてルネッサンス時代に再発見されるのである．

---

30) ☞ p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.361.

§1.3　ルネッサンス〜18 世紀の数概念

古代ギリシャ数学は，プラトンというナビゲーターを得て，論理的数学の構築に邁進し，ユークリッドの『原論』において公理的論証数学が完成した．2 千 3 百年も前のことである．公理という概念の確立は，紛れもなく，数学発展史における第一級の功績である．

しかしながら，現在の数学レベルからギリシャ数学を見ると，解決されるべき 3 つの宿題を残していた：

(1) 連続量に対して，幾何学的取り扱いのみでなく，日常行われている計算の正当性を確立すること．

(2) 不連続な数と連続量の統一．つまり，数概念の確立．

(3) 自在な応用力．つまり，経済や建築・自然現象などを容易に取り扱える簡明な構造．

これらの宿題は，数学にたいして，厳密性のみでなく簡明性と応用力をも要求している．それに応えるには，数学の発展を促すような社会，つまりは天才が生み出る有能な数学者たちの存在を可能にする活力ある社会が待たれた．

1.3.1　ルネッサンスの代数学

14 世紀のいわゆるルネッサンス時代に入ると，中世の物々交換経済から徐々に貨幣経済に移行し，商人達はやがてイタリアの主要都市に国際的な貿易会社を設立するまでになった．貨幣経済はお金の貸し借りとそれに伴う利息の計算それも高度な複利計算の知識を最低限必要とする．そのような需要に応えて，「算法教師」という職業的数学者が登場し，商人の子弟等にインド・アラビアの十進位取り記数法を教え，算術とイスラム代数学を用いて彼らに必要な問題の解法を教えた．優れた算法教師はこの目的で創設された学校のために教科書を書き，ある者は高次方程式の解法を研究し，イスラムでは言葉で表されてい

た未知数 cosa 等を省略記号 c 等で表す者も出てきた．イスラムの代数学は，印刷技術の普及と共に，15 世紀までにはヨーロッパに幅広く行き渡り，正負 +, −，等号 = などの記号も 16 世紀の後期までには大陸中に素早く広まり，17 世紀中頃には根号$\sqrt{\ }$や不等号 <, > を含む現代的代数記号の形がほぼ整った．

イスラム代数学を超える本質的な進歩はイタリアの **カルダノ**（Girolamo Cardano，1501〜1576）によってなされた．彼は著作『偉大なる術』（1545）において，3 次方程式 $x^3 \pm cx \pm d = 0$[31]（c, d は与えられた正の数値）を場合分けして解法を導き，イスラムでは無視された負根も考察した．この著作はヨーロッパの数学者達に後々まで強い影響を残した．

次の重要な進歩はフランスの ヴィエト（François Viète，1540〜1603）によってなされた．彼は今までは数値で書かれていた定数や係数部分に記号を用いて計算した．つまり，上の 3 次方程式 $x^3 \pm cx \pm d = 0$ でいえば，c や d は今までは数値で書かれていたが，その部分を文字通り c, d などと記号で書いて式変形したのである．これによって，方程式は一般的な例題を扱えるようになり，現在のように，解は文字式で与えられるようになった．「記号代数」へ移行するための決定的一歩である．

ヴィエトは，ギリシャ・イスラムの数学者達に習って，方程式を解く際の幾何的証明（☞ §§1.2.4）に重きを置き，方程式の各項は同じ次数とすべきという「同次性の法則」にこだわった．これは，古代ギリシャの数量の定義：

数$_{ギ}$ =（自然数）【単位】（☞ p.12），　量 =（実数）【単位】（☞ p.18）

による．これによると，方程式の未知数 x は長さという量 x【m】[32] のことであり，x^2 は面積 x^2【m^2】，x^3 は体積 x^3【m^3】を意味する．よって，例えば，方程式 $x^2 + 2cx = d$ は方程式 x^2【m^2】$+(2c$【m】$)(x$【m】$) = d$【m^2】と解釈されねばならない．このことは面積を用いる解法：$(x$【m】$+c$【m】$)^2 = d$【m^2】$+c^2$【m^2】からも納得できるだろう．2 乗を‘平方’(square)，3 乗を‘立方’(cube) などというのは昔の慣習の名残である．

数の概念についての本質的な進歩は，ヴィエトと同時代に生き，オランダで活躍したシモン・ステヴィン（Simon Stevin，1548〜1620，ベルギー）によっ

---

31) 2 次の項は一般性を失わずに消去できる．複合は必ずしも同順ではない．

32) 長さの単位を m で代表した．このとき，（実数）x は単位の付かない無名数になる．

てなされた．ステヴィンは，イスラム数学の影響を受けずに，小数の概念と 10 進法での表記法を著作『十分の一』（1585）にまとめ上げた．それは，商業の勘定や計算は，自然数と同じ加減乗除のやり方が小数に適用でき，簡単に実行できることを示している．彼は，自然数と小数が同じ計算法則に従うことを理解し，古代ギリシャ時代以来，自然数のみに適用された数の概念を小数，よって小数で表される「量」にまで拡張できると明確に意識した．彼は，『十分の一』と同じ年に出版された『算術』を次の 2 つの定義で始めている：

1．算術は，数の学である．
2．数は，ものの量を表すものである．

さらに彼は，いかなる量も連続的に分割できることから，‘数は不連続な量ではない’と断言している．ただし，ユークリッドが設けた離散的な数と連続的な量との区別に対して，そんな区別はもはや必要ないとする概念的転換には，万人を納得させる厳格な論理的詰めの作業が必要であり，それが完成するのはようやく 19 世紀に入ってからである．

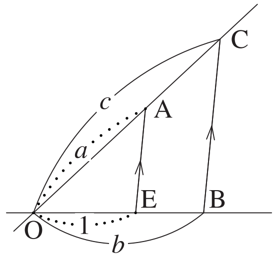
1.3.2　デカルトの『幾何学』

“我思う，ゆえに我あり”．この考え抜かれた有名な言葉は 17 世紀フランスの天才哲学者・数学者 ルネ・**デカルト**（René Descartes，1596〜1650）の著作『方法序説』(1637) の中で述べられた彼の哲学の第一原理である．原題は長く『自分の理性を正しく導き，いろいろな学問において真理を求めるための方法について述べるお話，およびこの方法の試論となる屈折光学・気象学・幾何学』であり，彼は真理を求めるための革新的‘方法’を正に熟考し，そして編み出したのだった．デカルトは古くからの高貴な家に生まれたが，青年期を通じて病弱だったため，学校時代は遅く起床することが許されていた．その結果，朝を思索して過ごす習慣がついた．彼は熟考の末に学校で学んだ古い知識を疑い，自らの頭で考えることのみが世界についての真実につながるとの結論に達し，真理を明察するために簡潔で論理的な数学的推論の方法を採用した[33]．

---

[33] ☞ p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.492.

数学における革新的方法は『方法序説』の第6部に納められた『幾何学』[34] の第1巻（円と直線だけを用いて作図しうる問題について）の冒頭に現れる．彼は‘数を 線分 で考えた’．つまり，正数 a に長さ a の線分を対応させ，したがって数は始めから連続量であるとした．数の和・差は線分の和・差で考えた．数の積・商も線分を用いるのだが，このとき，2千年にわたる呪縛を振り解(ほど)く魔法の杖が **単位長さの線分** であった．



右図にある相似な $\triangle$OEA と $\triangle$OBC を考えよう（EA // BC）．OE を単位線分として

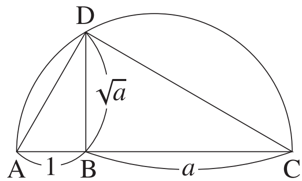
$$\mathrm{OE} : \mathrm{OA} = \mathrm{OB} : \mathrm{OC}$$

が成り立つ．議論を明確にするために，線分に長さの単位【m】をつけて考える．上式より

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}/\mathrm{OE} = a\,【\mathrm{m}】\cdot b\,【\mathrm{m}】/1\,【\mathrm{m}】 = ab\,【\mathrm{m}】$$

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OE}\cdot\mathrm{OC}/\mathrm{OA} = 1\,【\mathrm{m}】\cdot c\,【\mathrm{m}】/a\,【\mathrm{m}】 = c/a\,【\mathrm{m}】$$

が得られる．このことは，‘単位線分を巻き込むことによって，長さの次元をもつ量の積や商が再び長さの次元をもつ量として表せる’ことを意味する．線分の2乗・3乗を面積・体積と解釈せずともよいのだ！ これによって ax^2+bx+c のような式が，次元の束縛なく，自由に表現できるようになった．



さらに，デカルトは長さの根号を図示し，その長さについても同様の結果になることを示した．右図で AB は BC を延長して得られる単位線分．AC を直径とする半円を描き，点 B から AC に直交する線を引いて半円と交わる点を D とする．すると，$\triangle$ABD $\backsim$ $\triangle$DBC より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BD} = \mathrm{DB} : \mathrm{BC}.$$

したがって

$$\mathrm{BD} = \sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \sqrt{1\,【\mathrm{m}】\cdot a\,【\mathrm{m}】} = \sqrt{a}\,【\mathrm{m}】$$

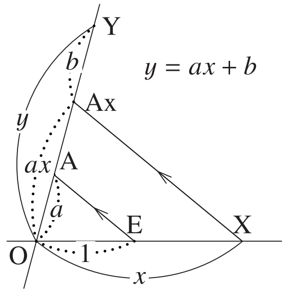
だから，長さの次元をもつ量の根号も長さの次元をもつ．以上の議論から，量の四則演算や累乗・累乗根はまた同じ次元の量に帰着させることができる．

---

[34] 『デカルト著作集1』（原 亨吉 訳，1973，白水社）

この偉大な業績は，印刷技術の発達もあって，瞬く間にヨーロッパ中に伝えられた．デカルトの用いた累乗の表記法 $a^2, a^3, \cdots$ や上に横棒がある根号記号 $\sqrt{}$ が今に残る所以（ゆえん）である．

さらに，デカルトは 未知量 に文字 x や y を用いて係数用文字 $a, b, c, \cdots$ と区別し，それら未知量を含む曲線の方程式を考えた．このとき，x, y は，いろいろな値をとれるから，**変量** である．彼はその方程式を図示する際に 座標軸[35] に相当する直線を導入している．ここでは簡単な例 $y = ax + b$ を用いて右図で例解してみる．先に学んだように単位線分 OE を取ればよく，線分 OX が長さ x のとき，それに対応して長さ $y = ax + b$ が OA を延長して得られる直線上に線分 OY として定まる．OE や OA を延長して得られる直線は，x, y が線分の長さであって数に対応する点ではないので，正しくは座標軸ではない[36]．デカルトの後を継ぐ者達は，負数を数と認めて，点と数の対応に気づくのに大きな困難はなかったと思われるが，彼らは微分積分学や 解析学[37] の構築に忙しく，数の本質を探る考察は『幾何学』の後 1 世紀以上も後回しにされた．



[35] 平面上の座標軸は x 軸，y 軸のことである．詳細はオイラーの項（☞ p.37）で議論するが，軸はその上の 点 が「座標」と呼ばれる数に対応する「数直線」であり，負数に対応する点も備わっている必要がある．それができない 半直線 などは数直線にはできない．デカルトが導入したのは正数に対応する線分と線分が明示できる交わる 2 つの半直線であった．

[36] 直角座標系を‘デカルト座標系’と呼ぶこともある．『グレイゼルの数学史 I』（☞ p.1 の脚注）の p.75 によると，横座標 absciss はラテン語 abscissus—切断された（x 軸上の線分）—に由来し，縦座標 ordinate はラテン語の ordinatus—整然とした（y 軸上の線分）—に由来するという．横座標と縦座標は，ライプニッツ（Gottfried W. Leibniz，1646〜1716，ドイツ）によって合わせて (co-)，座標 (coordinate) と名付けられた．座標という用語には元来‘線分’というニュアンスが込められていたようであり，元々の意味が忘れられたとき，デカルトが座標系を考えたと誤解されたようである．

[37] 関数の性質を微分積分学を用いて研究する分野を総称して解析学という．

1.3.3　ニュートンの数の定義とオイラーの数直線

デカルトの『幾何学』(1637) から 50 年後に **ニュートン** (Isaac Newton，1642〜1727，イギリス) が著した『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』(1687) が出版されている．彼は微分積分法を創始して数学を物理学に応用し，近代物理学の祖と呼ばれている．まさに，アルキメデスに匹敵するといわれる大天才である．ニュートンは，『普遍算術』(1707) の中で，デカルトが利用した単位の長さを用いて数の新しい定義を採用し，定式化した：

> 我々が理解している数とは，一(いち)（☞ p.12）の集まりというよりは，何らかの量の，それと同種の，単位に採用された量に対する抽象的な比である．数は次の 3 種類になる．すなわち，整数，分数，無理数である．

つまり，数 a は量 a【単位】と量 1【単位】を用いて

$$a = a\text{【単位】}/1\text{【単位】}$$

によって定義されるとした．この定義によって数は無名数になり，次元の束縛から完全に解き放されたのである．特に，その量は，運動でいえば前進と後退を許すなど，ある向きとその反対の向きを表す有向線分のように導入された正負の量なので，彼の数は明確に負数も含む[38]．また，量を基にして定義したので，この数は連続という性質を持つ「実数」であり，その数を用いてニュートンは極限操作が必然となる微分法を発見した．ただし，欲をいえば，連続の概念は厳密に定義されておらず，曖昧(あいまい)で，漠然としていた．

ニュートンの『普遍算術』出版の年に生まれた天才数学者 **オイラー** (Leonhard Euler，1707〜1783，スイス) は微積分学を継承して大きく開花させた．彼は不眠不休の研究のために視力を失っても，生涯に渡って論文を書き続けて膨大な業績を残している．例えば，有名な公式 $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$（$i$ は虚数単位）はオイラーの手になり，それから神秘的な関係式 $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ が直ちに得られる．意外に思われるかもしれないが，ニュートンは彼の力学を幾何の言葉で述べていて，それを解析の形に翻訳したのはオイラーである．例えば，力学の基本法則 $F = ma$ を書き下したのは彼である（F は物体に働く力，m は物体の質量，a は物体の加速度）．

---

[38] 足立恒夫 著『数とは何か そしてまた何であったか』(共立出版) §§2.4.1.

オイラーは教育にも熱心であり，優れたテキストを残している．そのうちの 1 つ『無限解析入門』第 2 巻 [39]（1748）で 座標軸 すなわち 数直線 を明確な形で導入した．彼は後のテキストでニュートン流に数を定義して無名数を導入しているので，その立場で解説する（表現は少々現代風にアレンジする）：

> 直線上に 1 点 O（**原点**）ともう 1 つの点 E（**単位点**）を選び，OE は単位の長さとする．このとき数 x を直線上の点 P に対応して定める．すなわち，P が O から見て E と同じ側にあるときは $x = \mathrm{OP}/\mathrm{OE} > 0$，反対側にあるときは $x = -\mathrm{OP}/\mathrm{OE} < 0$ とする．特に P = O のときは $x = 0$，P = E のときは $x = 1$ である．数 x は P の位置に対応して正または負の値が定まり，P の位置は連続的に変えられるので対応する数 x も連続的に変化できる数すなわち 実数 である．

このように直線上の 点 と実数を対応させることができる．現在，このような直線を **数直線** といい，平面の x 軸や y 軸は数直線である．点 P に実数 x が対応するとき x を P の **座標** という．なお，平面上の点を P(x, y) などと書いたとき，点 P の座標が数の組 (x, y) であることを表す．

数直線は正数も負数も直線上の点に対応することを示し，これを見る限り，負数が数として正数と同等な資格をもつことは明白である．ただし，この数直線表現によって，量の比によって定義された無名数としての数がさらに抽象化された存在になったといえよう：‘点と対応する数はこの世には実在しない架空の物である’．ただし，正の定数値に【単位】を正しくつけた場合は量として実在する：（リンゴ）1【個】，2.3【m】，4.5【ℓ】，⋯．

オイラーの影響力もあってか，この後負数に疑問を投げかける数学者は大陸ではいなくなったようである．ただし，数直線だけではまだ負数認定の根拠としては薄弱であり，より強力な数の理論が待たれた．次の世紀に，それは負数を一部分として含む複素数の概念として完成する．

---

[39] 邦訳は『オイラーの解析幾何』（高瀬 正仁 訳，海鳴社，2005）

§1.4　19 世紀以降の数概念

オイラーの数直線の後，数概念はどんどん抽象化の度合いを増していき，数は定義による人工的な存在物となっていった．その研究は多くの方向に進展していく：(1) 代数方程式の解として現れる全ての数—正数・負数・虚数—を同類の数すなわち複素数として認知すること．(2) 交換・結合・分配などを含む演算の基本法則によって数を研究すること．(3) 実数の属性である連続性に厳密な基礎を与えること．(4) 自然数や実数を公理的に定義すること．等々．

1.4.1　方程式を解くことの意味

まず，簡単な 2 次方程式 $x^2 - 1 = 0$ で例解しよう．因数分解すると

$$x^2 - 1 = x^2 + x - x - 1 = x(x+1) - (x+1) = (x-1)(x+1) = 0$$

だから，$x - 1 = 0$ または $x + 1 = 0$，つまり，解 $x = \pm 1$ を得る．この操作の意味を考えてみよう．

第 1 に，方程式の式変形においては代数の計算法則を前提としている：
'数' $a, b, c, \cdots$ に対して

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba \qquad \text{(交換法則)}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a(bc) = (ab)c \qquad \text{(結合法則)}$$

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{(分配法則)}$$

$$\text{任意の } a \text{ に対して} \quad a + 0 = a, \qquad a \cdot 1 = a \qquad \text{(0 と 1 の存在)}$$

などは証明なしに成立する公理とされる [40]．これらの計算法則はイスラムの代数学（☞ p.27）の時代から長い時間をかけて徐々に確立されてきた．

---

40) これに，逆数（$a \neq 0$ に対する $(1/a)$）の存在，および負数の存在を前提とする加法の逆元（a に対する $(-a)$）の存在が付け加わる（以上の条件を満たす数は「体」と呼ばれる）．ただし，加法の逆元はここでは考えない．また，より基本的な法則：

$$a = b \overset{\text{ならば}}{\Rightarrow} b = a \qquad \text{(対称律)}$$

$$a = b \text{ かつ } b = c \Rightarrow a = c \qquad \text{(推移律)}$$

などは当然ながら前提とする．

第 2 に，方程式の式変形においては未知数 x の正負の区別を行うのは無意味である：式変形 $x^2-1=x^2+x-x-1=x(x+1)-(x+1)=(x-1)(x+1)\ (=0)$ から，$x=\pm1$ つまり正負の解を得るが，このとき負の方の x についても計算法則を前提として式変形するしかない．はかない抵抗をしたければ，最後に負の解を捨てることはできる．しかしながら，方程式 $x^2+2x-1=0$ を解くと正の解として $x=\sqrt{2}-1$（正数 引く 正数）を得るが，交換法則を用いて $x=-1+\sqrt{2}$ と変形すると‘負数 足す 正数’と解釈せざるをえない．つまり，正数解を考えている場合でも負数を抜きにして済ますことはできない．ニュートンやオイラーによって，数は【単位】が付かない—この世には存在し無い—無名数となったので負数の認知に抵抗は少なく，むしろ負数を完全に公認するための理論を模索する方向に進んでいった．

次に，簡単な 4 次方程式 $x^4-1=0$ を考えてみよう．因数分解すると

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0 \qquad (i=\sqrt{-1})$$

だから，4 つの解 $x=\pm1, \pm i$ を得る．ただし，虚数解を好まなければ因数分解 $x^2+1=(x-i)(x+i)$ を拒絶することもできる．ここで，負数や虚数の解を認めればどんなに魅力的な定理が生まれるかを見てみよう．それは，上の因数分解で見たように，$x^4-1=0$ の任意の解を $\alpha\,(=\pm1, \pm i)$ とすると，4 次式 x^4-1 は因数 $(x-\alpha)$ をもつことに注視し，それを一般化することにある．一般の代数方程式（n 次の方程式）

$$P_n(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+cx+d=0 \quad (a\neq0)$$

の任意の解を α とすると，

$$P_n(\alpha)=a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+\cdots+c\alpha+d=0$$

が成り立つ．そこで，公式

$$x^k-\alpha^k=(x-\alpha)(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\cdots+\alpha^{k-2}x+\alpha^{k-1})$$

を用いると，簡単に

$$P_n(x)=P_n(x)-P_n(\alpha)=(x-\alpha)Q_{n-1}(x)\,(=0) \quad （Q_{n-1}(x) \text{ は } n-1 \text{ 次式}）$$

の形に因数分解できる．他の解 β は $Q_{n-1}(x)=0$ から $Q_{n-1}(x)$ の因数 $(x-\beta)$ に現れる．この操作を繰り返すと $P_n(x)$ は $(x-\text{解})$ の積の形に完全に因数分解さ

れる，つまり「n 次の方程式は，負数や虚数も解として認めると，必ず n 個の解をもつ」という大定理[41] が得られることになる．ここまでくると，負数はもちろん虚数も数と認めて，一般的で単純な上の大定理（代数学の基本定理）を承認する方が自然であろう．

さらに，カルダノ（☞ p.32）が得た 3 次方程式の解の公式は，解が全て実数にもかかわらず，公式は虚数で表されるという場合があり，虚数の絶対的な必要性を強調する例となった[42]：一般の 3 次方程式は 2 次の項がない

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \qquad (p,\ q \text{ は実数})$$

に同値である．カルダノが得たこの方程式の解の公式は，解を $x = u + v$ と和の形に表すと，

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}}, \qquad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}} \qquad (\overset{\text{デルタ}}{\Delta} = q^2 + p^3)$$

というものである．これが上の方程式を満たすことは，$(uv)^3 = (-p)^3$ よって $uv = -p$ に注意すれば，簡単に示すことができる．そこで，3 根が全て実数の方程式

$$x^3 - 3 \cdot 7x + 2 \cdot 10 = (x-1)(x-4)(x+5) = 0$$

に解の公式を当てはめると，$p = -7$，$q = 10$ なので，$\Delta = 10^2 + (-7)^3 = -243$ だから，解は

$$x = u + v = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}} \ (= 1,\ 4,\ -5)$$

と表される．なに，虚数の和が実数になる？！ 16 世紀の数学者にはこれはパラドックスであった．彼らは虚数と格闘し続けた．18 世紀の終わりには数学者達は虚数を無視できないと悟り，そして 300 年も経(た)ってそのパラドックスは肯定的に解決された：その和は 1，4，-5 のどれにもなったのだ．そのとき，数学者は虚数を数と認める理論こそが正しい理論だと納得することになる．

41) 多重根は多重度 k に応じて k 個の根と見なします．きちっとした議論は例えば p.16 の脚注『高校数学 + α』§2.4.3 および §10.3.3.3 を参照．

42) 同上，§2.3.2 および §10.3.2.

1.4.2　数の統一的理解 — 複素数とその演算の幾何表現

カルダノの 3 次方程式に関する 1545 年の著作から 15 年ほど後，イタリアのボンベリ（Rafael Bombelli，1526～1572）は **複素数** の計算規則を（実数の場合からの類推によって）初めて提示した（著書『代数学』は 1572 年に出版）：

a, b, c, d を実数として

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1} \overset{\text{同値}}{\Leftrightarrow} a = c,\ b = d\,,$$

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}\,,$$

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}\,.$$

複素数の実質的な研究はここに始まったといえるが，虚数に対してはどんな現実的な解釈も存在しないとする考えが大勢を占めた．18 世紀になってようやく，解析学や幾何学および力学に複素数の演算が広く適用されるようになった．

18 世紀の最初の 4 半世紀にイギリスの **ド・モアブル**（Abraham De Moivre, 1667～1754）は彼の名を冠する公式（ド・モアブルの公式）：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (i = \sqrt{-1})$$

を確立していた．ただし，彼の関心は $\cos\theta$ を $\cos n\theta$ で表すことにあったため，ド・モアブルの公式を上記の現在の形に導いたのはオイラーの 1748 年の著書『無限解析入門』においてである．この著書の中で有名な **オイラーの公式** $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ も確立されている．彼は, 翌年には，複素数の複素数乗はまた複素数であること：

$$(a + bi)^{p+qi} = c + di \qquad (a, b, c, d, p, q \text{ は実数})$$

を示している．なお，$\sqrt{-1}$ に対する記号 i を imaginary（想像上の，虚の）の頭文字として導入したのもオイラーで，1777 年の研究の中であった．

複素数の幾何表現についての最初のヒントは複素数の和と平面ベクトルの和の同値性にあったと思われる：

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}.$$

次のヒントはオイラーの公式に由来する複素数の極形式

$$z = z(r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r \geqq 0)$$

から得られる実数単位 1 と虚数単位 i についての情報である：

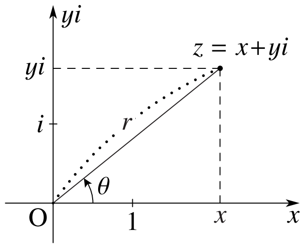
$$z(1,\ 0^\circ) = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ = 1$$

$$z(1,\ 90^\circ) = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i$$

$$z(1,\ 180^\circ) = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1.$$

これから，単位点 1（および −1 の点）は横軸上に，虚数単位 i を表す点は横軸に垂直な縦軸上にあるとできる．ここで，$z = x + yi = z(r, \theta)$ について，z の絶対値 $|z|$（原点と点 z の距離）を

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



と定めると，$|z| = r$ である．以上のことから，正数・負数・虚数をまとめた複素数を平面上に表すことができる．正数と負数が横軸の数直線上に並ぶとするのは従来通りで，虚数 $x + yi$ $(y \neq 0)$ は $|yi| = |y|$ だけ横軸から離れたところにある点として表される．

複素数の演算もまた複素数として平面上に表すことができる．複素数の和は，すでに見たように，平面ベクトルの和のように表される．複素数の積は，極形式

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

を用いると，加法定理がどんぴしゃで当てはまる：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}, \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}.$$

上の複素数の幾何的表示に関する研究（の一部）はデンマークの ウェッセル（Caspar Wessel，1745〜1818）によって 1799 年に，またスイスの アルガン（Jean Robert Argand，1768〜1822）によって 1806 年に出版された．残念なこ

とに，ウェッセルは言葉の障害のために全く日の目を見ず，またアルガンのものは，議論がまだ不十分であり，また前世紀の数学者の見解が支配的であったために，影響は限定的であった．

歴史上最高の数学者の一人と称えられるドイツの天才 **ガウス**（Johann Carl Friedrich Gauss，1777～1855）は，1799 年の学位論文で代数学の基本定理（☞ p.40）の証明を初めて行うなど，若い頃から虚数に関心を持っていた．事実，彼は，ウェッセルより早く，1790 年代半ばには複素数平面上で問題を考えていた．ただし，偏見を避けるために虚数が表にでない形で発表し，複素数を完全に理解するために十分な年月をかけ，機が熟するのを 30 年以上待った．例えば，ガウスは代数学の基本定理に対して異なる証明をいくつも行い，代数方程式を解く際に現れる数の連鎖（自然数→分数→負数→虚数）が虚数で止まること，つまり，（複素数の四則演算からはもちろん）複素数係数の n 次方程式から複素数を超えるような解は生み出されないことを確信していった．実数の問題を解くとき，高々複素数まで考慮すれば十分なのである．

1831 年，ガウスは遂に複素数とその演算の幾何的解釈を公表し，数についての一般的形式的理論をほぼ完全に基礎づけた．その中で，彼は，数 $a+bi$ を $a1+bi$ と見なす，つまり単位 1 からなる数と虚数単位 i からなる数が複合した数と考え，それを 複素数 (complex number) と命名し，それまでの忌まわしい名称「架空の数」を清算した．この理論によると，複素数の四則演算は虚数単位 i が直接演算に絡まないように定義され，i は単なる記号に徹する．例えば，複素数の商は，$(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ を利用して，

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

などと定められる．

ガウスの理論に他の秀でた数学者達も納得し，彼らも複素数に関する新しい科学的立場をとるようになった．こうして，19 世紀の中頃に，元々は負数の認知として始まった問題は，虚数を巻き込む複素数の意味付けとその公認という形で，事実上決着した．複素数は数学者の創造物であり，それに含まれる実数や正数もそうである，ということに注意しておこう．

1.4.3　微分学と実数の連続性

デカルトの『幾何学』(1637) の後，曲線と方程式の関係（円：$x^2 + y^2 = r^2$ など）が精力的に調べられ，代数的な方法を用いて図形の性質を研究する幾何学 — 解析幾何学 — が発達した．接線や極値および面積や体積を計算する新しい方法が探求され，微積分学 が生まれる環境が整った．そして，2 人の巨人が生まれた．**ニュートン**（1642〜1727）と **ライプニッツ**（1646〜1716）である．

“リンゴが落ちるのを見て万有引力を思いついた”という逸話で有名なニュートンは自然法則の究明という観点から数学研究を進めた．物体は時間と共に運動することに着目し，‘瞬間’（moment（モーメント））を研究の手がかりとした．物体が円運動 $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$ をする場合で例解してみよう．ある時刻 t に着目し，$x(t), y(t)$ を x, y と書き，x, y の（瞬間）速度を $\dot{x}, \dot{y}$ で表す[43]．時刻 t の次の瞬間，つまり無限小の時間間隔 o の後 x, y は位置 $x(t+o), y(t+o)$ に移る．このとき，o が **無限小**[44] であるから，$x(t+o), y(t+o)$ は，速度 $\dot{x}, \dot{y}$ を用いて，$x(t+o) = x + \dot{x}o$，$y(t+o) = y + \dot{y}o$ と表すことができる[45]．円運動をしているから，$x^2 + y^2 = r^2$ と $x(t+o)^2 + y(t+o)^2 = (x+\dot{x}o)^2 + (y+\dot{y}o)^2 = r^2$ が成り立ち，それらの差をとると，$2x\dot{x}o + (\dot{x}o)^2 + 2y\dot{y}o + (\dot{y}o)^2 = 0$ である．ここで，両辺を無限小 o で割って，

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + \dot{x}^2 o + \dot{y}^2 o = 0$$

が得られる．このとき，o は無限小であるから，有限の $2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ と比べて $\dot{x}^2 o + \dot{y}^2 o$ は 0 に等しい．したがって，

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \ \left(\Leftrightarrow \ \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} = 0\right), \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \left(= \frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{y}$$

となる．疑わしい議論であるが，得られた結果は正しい．

---

43) $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$，$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ のことである．ニュートンは，時間に依存する x, y を「流量」，その速度 $\dot{x}, \dot{y}$ を「流率」と呼んだ．

44) 無限小は，‘限りなく 0 に近い数’を想定した言葉であり，任意に選んだ（0 に近い）実数より 0 に近い‘数’をいう．こんな‘数’は値の定まった実数で表すことができず，0 に収束する変数として表される．無限小の逆数が無限大である．つまり，無限大は任意に選んだ（大きい）実数より大きい‘数’である．（その定義より，∞ が無限大のとき，$\infty + 1$ なども無限大であり，無限大は定まった値の実数ではない．その逆数の無限小も同様である）．

45) ニュートンは，流量 x, y の無限小変化 $\dot{x}o, \dot{y}o$ を「モーメント」と呼んだ．

曲線の接線を研究し，ニュートンとは独立に微積分学を構築したのはライプニッツである．彼は現在も使われる無限小記号を駆使して微分積分を記述した：t の無限小 o に dt，x, y の無限小 $\dot{x}o, \dot{y}o$ に $dx = \dfrac{dx}{dt}dt$，$dy = \dfrac{dy}{dt}dt$ など．無限小という‘数’は大いに役立ち，オイラー（1707～1783）はそれを駆使して微積分学の発展に大いに寄与した[46]．

微積分学の誕生から 1 世紀半が過ぎ，漸(ようや)く微積分演算の正当化に焦点があてられるようになった．**コーシー**（Augustin Louis Cauchy, 1789～1857，フランス）は **極限** (limit) つまり‘限りなく近づいていく’という概念を導入し，その理論を体系的に発展させた．これによって，無限小を用いることなく，例えば，**極限値** の表現

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha\ (x \to a)$$

（x が a に限りなく近づくとき，x の関数 $f(x)$ は極限値 α に収束する—限りなく近づく）ができるようになった．

極限を用いて，先の円運動 $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$ の問題の取り扱いを正当化してみる．無限小の時間間隔 o の替わりに t の **増分** $\varDelta t\,(\neq 0)$ を導入すると，x, y の増分は $\varDelta x = x(t+\varDelta t) - x(t), \varDelta y = y(t+\varDelta t) - y(t)$ と表される．したがって，$x(t+\varDelta t) = x + \varDelta x$，$y(t+\varDelta t) = y + \varDelta y$ に注意すると，$x(t+\varDelta t)^2 + y(t+\varDelta t)^2 = r^2$ は $(x+\varDelta x)^2 + (y+\varDelta y)^2 = r^2$ と書ける．その式から $x^2 + y^2 = r^2$ を辺々引くと，

$$2x\varDelta x + 2y\varDelta y + \varDelta x^2 + \varDelta y^2 = 0$$

となる．正当化の工夫は増分同士の割り算だった．$\varDelta t$ または $\varDelta x$ で割ると

$$2x\frac{\varDelta x}{\varDelta t} + 2y\frac{\varDelta y}{\varDelta t} + \frac{\varDelta x}{\varDelta t}\varDelta x + \frac{\varDelta y}{\varDelta t}\varDelta y = 0, \quad 2x + 2y\frac{\varDelta y}{\varDelta x} + \varDelta x + \frac{\varDelta y}{\varDelta x}\varDelta y = 0$$

となる．ここで，$\varDelta t \to 0$ のとき，$\varDelta x \to 0, \varDelta y \to 0$ であり，第 1, 2 項の $\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}$，$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}$ は **瞬間速度** に収束する：

$$\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{x(t+\varDelta t) - x(t)}{\varDelta t} = \frac{dx}{dt}, \quad \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{y(t+\varDelta t) - y(t)}{\varDelta t} = \frac{dy}{dt}.$$

---

46) 無限小の概念は数学的に厳密な取り扱いができないとして一度は放棄された．しかしながら，誤りなく扱えば有用な‘数’は厳密な構成に耐えるのであろう．1960 年代にもなって，実数に無限小・無限大を加えた「超実数」が厳密な形で正当化され，「超準解析」と呼ばれる解析学の 1 分野をなすようになった．

このとき，第 3, 4 項は 0 に収束する．したがって，無限小の議論の場合と同じ結果が得られる：

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

また，極限を用いると関数の **連続** が表現できるようになった：

> ある開区間で関数 $f(x)$ が連続とは，その区間内の各点 a において $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことをいう．

しかしながら，lim —限りなく近づく— は 我々が高校で習った概念であるが，その意味は実は単純明瞭ではなく，扱いにくい．例えば，基本的な定理

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

（※極限値が存在するとして）を高校数学においては証明できない．そのため，コーシーは，時として，小さい正数 $\overset{\text{イプシロン}}{\varepsilon}$（error 誤差の略語）と $\overset{\text{デルタ}}{\delta}$（ distance 距離の略語）を導入して基礎づけを行っていた．この ε–δ を用いる論法（☞ §2.4）は関数の極限に関する定理の証明において非常に強力であり，近代解析学の父と呼ばれる **ワイエルシュトラス**（Karl T. W. Weierstraß，1815〜1897，ドイツ）が 1860 年代の講義のなかでその論法を完成させた．

極限の式 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を $\varepsilon - \delta$ 論法で表してみよう．それは，$f(x)$ の α からの‘誤差’ε を前もって考え，その‘誤差’以内に納めるためには x と a との‘距離’δ をどのようにとればよいかという形で論じられる：

> 任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し，$0 < |x - a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つとき，そのことを‘x が a に限りなく近づくとき $f(x)$ は極限値 α に収束する’という．

ε はいくらでも小さくとれる正実数，δ はそれに伴って小さくとる正実数である．このとき，不等式 $0 < |x - a| < \delta$ および $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ は常に無限小を含む領域になっている．したがって，$\varepsilon - \delta$ 論法は無限小を用いる議論に取って代わることができると言えよう．

$\varepsilon - \delta$ 論法によって，数学の基礎は確立されたかと思われたが，基礎の厳密性をもっと高める必要があると感じる数学者もいた．19 世紀ドイツの優れた

数学者 デデキント（Julius W.R. Dedekind，1831〜1916）は“微分学は連続関数を扱うが，その変数を表す実数に対して連続性は厳密に保証されているのか？”と疑った．数直線の定義（☞ p.37）より実数は直線上の点に対応して定まり，その実数の大きさは対応する点と原点の‘距離’で定められる．数直線上の点は連続して存在するから，対応する 実数の連続性 も保証される．これが当時の多くの数学者の共通の見解であった．

点と原点の距離は目盛り付き定規の原理を用いて測られる．単位の長さの目盛りを用いてその点を含む目盛り区間から対応する実数の整数値を決め，次にその区間を 10 等分して実数の小数第 1 位を求め，同様にさらに 10 等分して小数第 2 位が定まる．この操作を n 回くりかえすと点に対応する実数が小数第 n 位まで求めることができる．このことから数直線上の点に対応する実数は有限・無限の小数で表されると考えられた．しかしながら，10 等分の操作は有限回しかできないから，この方法で表される小数は有限小数のみである．したがって，点に対応する実数が，有限小数や循環小数（つまり，分数でも表される有理数）なのか，循環しない無限小数（つまり無理数）なのかは不明である．逆の言い方をすると，例えば，循環しない無限小数 $0.101101110111101111101\cdots$（1 の並び方の規則を推測しよう）に対応する点はどこであろうか．その位置は近似的にしかわからないであろう．点と実数の対応は直感に頼る議論であった．

循環しない無限小数 $0.101101110111101111101\cdots$（これが定める数を α で表す）を例にとって，無限小数の厳密な議論を見てみよう．始めから無限を扱うことはできないから，α の小数第 n 位までの有限小数近似（つまり有理数近似）を a_n（$a_3 = 0.101$ など）とすると，この無限小数は $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と解釈される．ただし，この式の意味は厳密で，「無限数列 $\{a_n\}$ は n が限りなく大きくなるとき，a_n がいくらでも近づくような‘α が存在するならば’，数列 a_n の極限値は α である」と読む．数 α の存在が厳密に保証されなければならないのだ．当時は有理数の理論は確立していたが，一般の循環しない無限小数を数として保証する理論はまだ無かった．なお，当時，循環しない無限小数の議論がどこまで進んでいたかは不明である．また，小数と数の 1 : 1 対応 と関連するが，$0.999999\cdots = 1$? の問題が解決していたかも不明である．

デデキントは，数直線つまり幾何学的‘点’を持ち出さずに数それ自身の中で理論を構築し，そしてそれから証明できることのみを信頼するという考えを鮮明にした[47]．この理論が **デデキントの切断** と今日呼ばれているもので，実数の理論に真に厳密な基礎付けをもたらした．

デデキントの切断は，有理数についてはよく知っていると見なし，有理数全体の **集合**[48] $\mathbb{Q}$ を大きさの順に並べた有理数直線を 2 つに切断し，その切断面に現れる数を「実数」と定義するというイメージを理論化したものである．

> $\mathbb{Q}$ を以下の条件を満たすように下組・上組と呼ばれる 2 つの部分集合 A, A' に分割したとき，A, A' の$\overset{ペア}{組}$で表される $< A, A' >$（有理数の切断 を表す記号）によって実数（α と表す）が定まる：$\alpha =< A, A' >$.
>
> $$\underset{\alpha}{\underline{\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{A}\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{A'}}}$$
>
> （i）$A \overset{\text{または}}{\cup} A' = \mathbb{Q},\quad A \overset{\text{かつ}}{\cap} A' = \overset{\text{空集合}}{\emptyset},\quad A \neq \emptyset,\ A' \neq \emptyset.$（分割の表現）
>
> （ii）$r \overset{\text{属す}}{\in} A,\ s \in A'$ ならば $r < s.$（A が下組，A' が上組の条件）
>
> （iii）A に属する最大の有理数はない．（紛れないための配慮）
>
> （iv）$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\}$[49], $A' = \{s \in \mathbb{Q} \mid s \geqq \alpha\}$ のとき $\alpha =< A, A' >$.

例えば，A が (有理数) $\frac{4}{3}$ より小さい有理数，A' が $\frac{4}{3}$ 以上の有理数のときは，（iv）からわかるように，有理数の切断 $< A, A' >= \frac{4}{3}$ である．このとき，上組 A' に最小値 $\frac{4}{3}$ がある．このことを“切断面の右面に有理数がある”と表そう．また，A が(無理数) $\sqrt{2}$ より小さい有理数，A' が $\sqrt{2}$ 以上の有理数のとき，$\sqrt{2}$ は有理数でないから A' には最小値が存在しない（ $\sqrt{2}$ より大きく，$\sqrt{2}$ にいくらでも近い有理数が存在し，最小と呼べるものがない）．このとき，切断面に

---

[47] デーデキント 著『数について―連続性と数の本質―』（河野伊三郎 訳，岩波文庫，1961）

[48] 集合は明確に区別のできる‘もの’（ **要素** という）の集まりである．集合の表現は, 多くの場合，{ 集合の要素 | 要素についての条件 } の形をとる．r が集合 A の要素であるとき $r \in A$ と書き，r は A に属するという．集合 A または A' の要素からなる集合を $A \cup A'$ で表し，A と A' の両方に共通な要素からなる集合を $A \cap A'$ と表す．要素を 1 つも含まない集合を **空集合** といい $\emptyset$ で表す．A の要素が全て集合 B の要素でもあるとき，A は B の **部分集合** であるといい $A \subset B$ で表す．A と B の要素が全て一致するとき A と B は等しいといい $A = B$ で表し，そうでないときは $A \neq B$ と書く．

[49] 切断による数の相等・大小の定義：$\alpha =< A, A' >$, $\beta =< B, B' >$ のとき

$\alpha = \beta$ は $A = B$ を意味し，$\alpha < \beta$ は $A \overset{\text{含まれる}}{\subset} B$ かつ $A \neq B$ を意味する．

は有理数が無いことを意味する．そして，このとき，有理数の切断 $< A, A' >$ は無理数 $\sqrt{2}$ を定義する．つまり，このとき切断面には無理数 $\sqrt{2}$ が存在することを意味する．これらのことはそのまま一般化できる：

（I）A' に最小の有理数 a があるとき，$< A, A' >$ は有理数 a 自身．このとき，a は切断面の右面にある．

（II）A' に最小の有理数がないとき，$< A, A' >$ は，有理数ではなく，切断面にある無理数を定義する．

以上のようにして，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ を巧妙に用いて，その切断として有理数と無理数つまり実数が定義される．すなわち，実数が定義によって数学的に創造されたことを意味する．すべての切断を考えるとすべての実数が定義される．そのとき，実数の連続性 が調べられる．（実）数直線を開区間 $(-\infty, \infty)$ で表して，実数 α の位置で切断すると，半開区間の下組 $(-\infty, \alpha]$・開区間の上組 (α, ∞)，または開区間の下組 $(-\infty, \alpha)$・半開区間の上組 $[\alpha, \infty)$ に分割される．すなわち，今度は‘実数の切断’を行うと，下組に最大値があるか，または上組に最小値がある．つまり，実数直線の切断面の左面または右面には（いかなる切断を行っても）必ず実数が現れる．このことは正に実数の連続性の証（あかし）である．デデキントは有理数の切断で定義された実数の集合に対して切断を行い，実数の連続性を証明した[50)]．

デデキントの研究の後，証明は幾何学的直感を排除した，より厳密なものになっていき，素人目には“図を描けば明らか”なこともきちんと証明することを要求されるようになった．もちろん，連続性に関係する非常に微妙な問題に対して明確な正しい答えを出せるようになったことはいうまでもない．

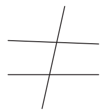
デデキントの切断は，しかしながら，有理数から出発するために，無理数同士の積についてはすでによく知られていること（例えば，$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ など）を証明する必要に迫られ，実数の交換法則 $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ や分配法則 $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ も同様であった．このような煩雑さを避けるために，現在では，実数の連続性は公理と見なす「実数の公理的定義」もよく用いられる．それは次の §§ で議論しよう．

50) 例えば，小平 邦彦 著『解析入門 I』（岩波書店）．この書は，厳密でありながら，感覚的にわかりやすく叙述されている．

1.4.4　公理化 — 数学の抽象化・形式化

証明を可能とする論証という形式を数学が確立したのは 2300 年も前のユークリッドの『原論』（☞ p.6）においてであった．そこにおいて，既に，定義や公理（公準を含む）などの数学の基礎概念が確立していて，論理的に厳密な演繹にしたがって証明がなされていた．公理や公準（☞ p.7）は，ごく自然に，最も基本的で‘証明の必要がない，明白な真実’と考えられていた．ただし，いわゆる第 5 公準（下に再掲）は，見るからに冗長だったので，他の公理・公準に比べて自明性は低いと考えられ，もしかしたら他の公理・公準から証明されるべき定理ではないかとの疑念が生じた：

> 一直線が二直線に交わり，同じ側の内角の和が二直角より小ならば，この二直線は，限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側において交わること．



この公準は，命題「1 直線上に無い 1 点を通ってこの直線に平行な直線はただ 1 本ある」を意味する [51] ので，「平行線公準」と呼ばれ，以後，この公準の証明が古代から数多く試みられた．

しかしながら，その全てが失敗に終わり，ようやく最終決着が見られたのは 19 世紀前半の東ヨーロッパに革命的数学者が現れてからのことである．ロシアの **ロバチェフスキー**（Nikolai I. Lobachevsky，1792〜1856）とハンガリーの **ボヤイ**（János Bolyai，1802〜1860）は，独立に，‘平行線は 2 本以上引ける’という第 5 公準に替わる公理から出発して新しい幾何学を矛盾無く構成できることを示した．「非ユークリッド幾何学」である．さらに，19 世紀を代表する数学者 **リーマン**（Georg Riemann，1826〜1866，ドイツ）は，種々の曲がった（n 次元）空間を包括的に研究し，空間の曲がりの度合（曲率という）は局所的な最短距離によって特徴づけられることを示し，幾何学の新しい一般的な体系を開拓した．引き続く研究によって，平行線の本数（1 本・2 本以上・無し）を

---

[51] 第 5 公準は「2 直線を延長してどちらの側でも交わらないためには，どちらの同じ側の角の和も 2 直角より小さくない」ことを示している．このとき，両側の角の和全体は $2 + 2 = 4$ 直角なので，上の‘2 直角より小さくない’は‘2 直角である’に制限される．このことは，‘1 直線上に無い 1 点を通る直線のなかでこの‘2 直角条件’を満たすものはただ 1 本のみで，それが平行線である’ことを意味する．

公理とする各幾何学とその空間の曲率との関係（それぞれ，0・負・正）が明らかになった．リーマンの幾何学は，20 世紀初頭に，テンソル[52] を用いた定式化が完成し，その数学を天才 アインシュタイン が「一般相対性理論」を構築する際に用いた．

以上の歴史的経緯を経て，人々が公理に抱いていた‘自明な真実’という確信は消え失せ，“公理とは，演繹的に理論を展開する科学において，証明なしに導入される最も基本的な仮定（前提・命題）である”と考えられるようになっていった．演繹における公理の役割が検証され，導入した一連の公理（**公理系**という）に対しては，それらだけを用いて成立すべき命題（定理）が証明されることや内部矛盾を含まないことが求められた．実は，ユークリッド『原論』においては，‘円の内部の点を通る直線は円周と 2 点において必ず交わる’ことが暗黙に仮定されている．これは直観的には当然であり，また正しい命題であるが，『原論』の公理・公準のみからは証明できない．『原論』は公理に基づいて数学を展開する立場としては不十分なのである．

20 世紀数学の礎を築いた **ヒルベルト**（David Hilbert，1862〜1943，ドイツ）は，ユークリッド『原論』が抱える論理的欠陥の完全なる払拭を決意し，20 世紀直前の 1899 年，『幾何学基礎論』を著した．それは公理系のみに基づいて幾何学の完全なる演繹的構築を行う意図のもとに書かれ，5 つの公理群からなる．各公理群は，I 結合の公理 (I_{1-8})，II 順序の公理 (II_{1-4})，III 合同の公理 (III_{1-5})，IV 平行線の公理 (IV_1)，V 連続性の公理 (V_1) と名付けられている．ここで，点，直線，平面の間の結びつきを表し，8 公理 I_1〜I_8 からなる 結合の公理群 を見てみよう．

I　結合の公理

I_1 任意の 2 点 A, B に対して，それらを通る直線 ℓ が存在する．

I_2 異なる 2 点 A, B に対して，それらを通る直線はただ 1 つしかない．

I_3 1 直線上には，少なくとも，異なる 2 点が存在する．1 直線上にない，少なくとも，3 点が存在する．

---

52) 粗っぽくいうと，ベクトル A_i や行列 A_{ij} を一般化した添え字付きの量 $A_{ijk\cdots l}$ のこと．添え字が n 個あるものが n 階のテンソルである $(n = 0, 1, 2, \cdots)$．添え字は上付きのもの $A^{ijk\cdots l}$ やそれらを混合したもの $A^{ij\cdots k}_{lm\cdots n}$ もあり，いくつかの制約条件を満たす．

I_4 1直線上にない3点 A, B, C に対して，それらを含む（がその上にある）平面 α が存在する．平面上には少なくとも1点が存在する．

I_5 1直線上にない3点 A, B, C を含む平面はただ1つしかない．

I_6 直線 ℓ 上の異なる2点 A, B が平面 α 上にあるならば，直線 ℓ は（直線 ℓ 上の全ての点は）α 上にある．

I_7 点 A が2平面 α, β の両面上にあるならば，A の他に少なくとも1つ，それら両面上にある点が存在する．

I_8 1つの平面上にない少なくとも4点が存在する．

どれも正に当たり前の仮定（命題）であることが見て取れるであろう[53)]．ヒルベルトは，この公理系が内部矛盾を含まない，つまりこの公理系からある命題とその否定命題が共に証明されることがないこと（無矛盾性），各々の公理が他の公理からは導かれないこと（独立性），知られる限りの正しい命題（定理）がこの公理系で実際に証明可能であること（完全性）など，公理系が満たすべき必須条件を慎重に吟味している．独立性についていえば，例えば，平行線公理の替わりに‘平行線は2本はある’という公理を用いると，奇妙ではある

[53)] 残りの公理群も載せておきましょう．（☞ 『岩波 数学事典』（日本数学会 編，岩波書店）．D. ヒルベルト 著『幾何学基礎論』（中村幸四郎 訳，ちくま学芸文庫））．

II　順序の公理

II_1 B が A, C の間にあるというとき，A, B, C は1直線上の相異なる3点であって，そのとき B は C, A の間にもある．

II_2 直線 ℓ 上の異なる2点 A, C に対して，ℓ 上に点 B を見出して，C は A, B の間にあるようにできる．

II_3 B が A, C の間にあれば，A が B, C の間にあることはない．

定義：異なる2点 A, B の組を線分とよび，AB または BA で表す．A, B を通る直線上の点に関して，A, B の間にある点を線分 AB の内点，A と B を AB の端点，それ以外の点を AB の外点という．

II_4 （パシュの公理）A, B, C を1直線上にない3点とし，平面 ABC 上にあって，点 A, B, C のいずれをも通らない直線を ℓ とする．ℓ が線分 AB の1つの内点を通過するならば，ℓ は線分 BC または CA の内点の1つを通る．

定義：ℓ を平面 α 上の1直線とし，A, B を ℓ 上にない α 上の2点とする．A=B または線分 AB の内点に ℓ の点がないとき，A, B は α 上で ℓ に関して‘同じ側’にあるといい，内点に ℓ の点があるときは‘異なる側’（反対側）にあるという．α 上で ℓ に関して A と同じ側にある点の全体および異なる側にある点の全体を，ℓ を‘境界’とし，平面 α に属する‘半平面’という．

が内部矛盾のない非ユークリッド幾何学が得られる．このことは，もし平行線公理が他の公理から導かれるとすると，‘平行線は 1 本だけある かつ 2 本はある’という公理の設定になって必ず矛盾が出てくるはずだから，そうでなかったことは平行線公理が他の公理とは独立なことを意味する．完全性については，1 つの公理を外すと証明可能な命題が減って意味の無い公理系になり，独

III　合同の公理

定義：直線 ℓ 上に 1 点 O および O と異なる 2 点 A, B をとるとき，A=B または O が線分 AB の外点ならば A, B は O に関して‘同じ側’にあるといい，内点ならば A, B は O に関して‘異なる側’にあるという．直線 ℓ 上の点で，O に関して A と同じ側にある点全体を，ℓ に属し，O を端点とする（O から出る）A と同じ側の半直線という．

III$_1$　A, B を直線 ℓ 上の異なる 2 点，A′ を直線 ℓ' 上の 1 点とする．直線 ℓ' 上の A′ に関して一方の側にただ 1 点 B′ が存在して，線分 AB と線分 A′B′ の間に AB≡A′B′（AB は A′B′ に合同である）とすることができる．

III$_2$　AB≡A′B′，AB≡A″B″ ならば A′B′≡A″B″．

III$_3$　A, B, C は直線 ℓ 上の 3 点で B は A, C の間にあり，A′, B′, C′ は直線 ℓ' 上の 3 点で B′ は A′, C′ の間にあり，かつ AB≡A′B′，BC≡B′C′ ならば AC≡A′C′.

定義：ℓ_h, m_h を 1 点 O から出て，異なる直線 ℓ, m のそれぞれに属し，O を含む平面 α 上にある半直線とする．このような 2 つの半直線の組を平面 α の‘角’といい，$\angle(\ell_h, m_h)$ または $\angle(m_h, \ell_h)$ で表す．ℓ_h, m_h 上にそれぞれ点 A, B があるとき，$\angle(m_h, \ell_h)$ を ∠AOB と表す．ℓ_h, m_h をこの角の‘辺’，O をこの角の‘頂点’という．また，α に属し，m を境界とし ℓ_h の点と同じ側にある半平面と，ℓ を境界とし m_h の点と同じ側にある半平面との共通部分を角 $\angle(\ell_h, m_h)$ の‘内部’といい，α 上の点で，$\angle(\ell_h, m_h)$ の内部になく，その頂点でもなく，辺の上にもないものの全体をこの角の‘外部’という．

III$_4$　$\angle(\ell_h, m_h)$ を平面 α 上の角とし，ℓ' は平面 α' 上の直線とする．O′ を ℓ' 上の 1 点，O′ を出て ℓ' に属する 1 つの半直線を ℓ'_h，ℓ' を境界とし α' に属する 1 つの半平面を α'_h とする．このとき，α'_h 上に半直線 m'_h を求めて，$\angle(\ell_h, m_h) \equiv \angle(\ell'_h, m'_h)$ とすることができ，かつこのような m'_h はただ 1 つ存在する．

III$_5$　A, B, C および A′, B′, C′ がそれぞれ 1 直線上にない 3 点であるとき，AB≡A′B′，AC≡A′C′，∠BAC ≡ ∠B′A′C′ ならば ∠ABC ≡ ∠A′B′C′.

IV　平行線の公理

IV$_1$　ℓ を任意の直線，A をその直線外の点とする．この場合，直線 ℓ と点 A によって決まる平面上に，点 A を通り直線 ℓ と交わらない直線は高々 1 つ存在する．

V　連続性の公理（☞ パガレロフ 著『幾何学の基礎』（垣田高夫 他訳，内田老鶴圃 新社））

定義：1 直線上の点に対して向きをつける．A<B は点 A が点 B の‘左’にあること，A>B は A が B の‘右’にあることとする．公理 II 群から次の定理が得られる．以下，A<B とする．C が A, B の間にあるとき A<C<B，B の右にあるとき A<B<C．A<B (<C) のとき，B<A (<C) となることはない.

V$_1$　（デデキントの公理）1 直線上の点を，空でない 2 つの組に分け，第 1 の組の全ての点が第 2 の組のどの点よりも左にあるとする．このとき，‘第 1 の組において最も右にある点が存在する’か，‘第 2 の組において最も左にある点が存在する’かのいずれかである．

立した公理を加えると，条件がきつくなりすぎて，互いに矛盾する命題が証明されてしまうので，完全性と無矛盾性は密接に関係している．公理系は，一般に，完全性を満たすべく，ぎりぎり多くの公理群を動員して構成されるため，無矛盾性の検証が最も重要になる．ヒルベルトは，実数によって座標を構成する解析幾何を用いて，彼の公理系を「実数論」に翻訳し，実数論が無矛盾であれば『幾何学基礎論』の公理系も無矛盾であることを示した．

さて，本題に入ろう．I 結合の公理では点・直線・平面が出てくるが，その定義の文が見あたらない．ユークリッド『原論』が定義：‘点とは部分をもたないものである’から始まるのとは大違いである．ヒルベルトは友人の数学者と酒場でビールを飲みながら，“点・直線・平面はテーブル・椅子・ビールジョッキに置き換えられる”といったそうである．このことは次のことを意味する：点・直線・平面は公理で定められたそれらの間の結合（関係）が全てであり，それらに別の名（例えば，T・C・H）を用いても，演繹は実行されてT・C・Hについての定理が得られ，それは点・直線・平面が満たす定理になる．

確かめてみよう．定理1：‘異なる2つのC（直線）は1つより多くの共通のT（点）をもたない’を‘異なる2つのTが異なる2つのC ℓ, m の上にあることはない’と同値な表現をしておく．すると，I_2：‘異なる2つのTに対して，それらを通るCはただ1つしかない’より，C ℓ とC m は一致して，上の定理が得られる．

もう1題．定理2：‘異なる2つのH（平面）α, β が共通のT（点）を含むならば，α, β は共通のC（直線）を含む’を示そう．まず，I_7：‘T A が2つのH α, β の両H上にあるならば，Aの他に少なくとも1つ，それら両H上にあるT B が存在する’．次に，I_2：‘異なる2つのT A, B に対して，それらを通るC ℓ はただ1つしかない’．ここで，I_6：‘C ℓ 上の異なる2つのT A, B がH α 上にあるならば，C ℓ は α 上にある’．もう1回，I_6：‘C ℓ 上の異なる2つのT A, B がH β 上にあるならば，C ℓ は β 上にある’．したがって，C ℓ は2つのH α と β に共通のCである．これで定理2が得られた．つまり，公理を I_7, I_2, I_6, I_6 の順で並べると定理2が得られたことになる．

以上のように，各公理において，同値な表現を用いたり，T・C・H（点・直線・平面）に具体名（$A, B, \cdots$・$\ell, m, \cdots$・$\alpha, \beta, \cdots$）を挿入したりして，各公理を並

べていくと，あたかも音符を五線譜に並べると楽曲ができるかのように，定理が製造されるというわけである．他の公理群についても同様である．

ヒルベルトは，点・直線・平面などの基本的対象だけでなく，‘存在する’・‘間にある’・‘合同である’といった基本的関係を「基本概念」と考えて，それらに直接的な定義を与えず，基本概念は，その公理系の中で，それらが満たすべき条件によって間接的に定義されていると考えた．そのような基本的用語は「無定義用語」と呼ばれる．また，ヒルベルトは，公理が‘理論の前提としての単なる仮定’であることを明確に掲げ，理論はこのような公理系だけに基づいて演繹的に構築されるべきとする立場を打ち出した．現在 **公理主義** と呼ばれる立場である．

公理主義を貫くには，公理や演繹に用いられる言葉も，日本語や英語のような曖昧さを残す自然言語ではなく，人工的な‘数学言語’を必要とした．それは，四則演算に使われる記号の他に集合(☞p.48)や 関数（写像）の記号，および演繹を誤りなく進めるための 命題論理 や 述語論理 と呼ばれる一連の記号からなる．**命題** は‘真偽を定められる主張’を意味し，数学では記号 P, Q などで表現されることが多い．命題 P, Q に対して，$P \wedge Q$ は命題「P かつ Q」を表し，$P \vee Q$ は「P と Q の少なくとも一方」の意味で「P または Q」を表す．また，記号 $\Rightarrow$（ならば）や $\neg$（〜でない）も頻繁に用いられる．例えば，「僕は君が好き」を P，「君は僕が好き」を Q とすると，「僕は君に片思い」は $P \wedge \neg Q$ となる．$P \vee Q$ は「僕と君は片思いか相思相愛」に注意する．変数を含む命題，例えば $P(n)$：「n は素数である」は変数に代入する値に応じて真偽が定まる命題である：$P(3)$ は真，$P(4)$ は偽．このような命題は演繹を行うときに重要で，**存在記号** $\exists$（〜が存在する）や **全称記号** $\forall$（全ての〜，任意の〜，どんな〜）などと共によく用いられる．例えば，m, n を自然数として $P(m, n)$：$m < n$ のとき，$\exists nP(5, n)$ は $\exists n(5 < n)$：「5 より大きい自然数 n が存在する」を表す．$\forall m(\exists n(m < n))$（どんな自然数 m に対しても，$m < n$ を満たす自然数 n が存在する）は「自然数は限りなく続く」の‘数学語’表現である．このような言語武装のもとで，公理系の無矛盾性を検証する試みが推し進められた[54]．

[54] 残念ながら 1931 年，「公理系—その内部に自然数論の公理系を含む—は，その中で自分自身の無矛盾性を証明できない」という定理がゲーデル（Kurt Gödel，1906〜1978，チェコ）によって証明された．

公理主義の立場が主流になると，当然のことながら，実数も公理系によって定義することが試みられた．その公理系に対しては，考察の対象 a が満たすべき条件が与えられて，a が実数であるための必要かつ十分な性質を満たすこと，全ての実数が考察の対象であること，および無矛盾で完全なことなどが求められた．そのような公理系は**体**と呼ばれる集合によって‘実数全体を間接的に定義’した．

集合 $\mathbb{R}$ の要素 (元) が以下の公理（法則）を満たすとき $\mathbb{R}$ を実数体という．

I. 四則演算の公理

i) $x, y \in \mathbb{R}$（$\mathbb{R}$ の要素 x, y) に対して，和 $x+y \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まり，次の法則をみたす．

$$x+y=y+x, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z). \qquad \text{（結合法則）}$$

また，特別な要素 $0 \in \mathbb{R}$ が存在して，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x+0=x. \qquad \text{（0 の存在）}$$

更に，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$-x \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ存在して

$$x+(-x)=0. \qquad \text{（加法の逆元の存在）}$$

※ $x+(-y)$ を $x-y$ と書く（減法の定義）．

ii) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，積 $xy \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まり，次の法則をみたす．

$$xy=yx, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(xy)z=x(yz), \qquad \text{（結合法則）}$$

$$(x+y)z=xz+yz. \qquad \text{（分配法則）}$$

また，特別な要素 $1 \in \mathbb{R}$ が存在して，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$1x=x. \qquad \text{（1 の存在）}$$

更に，$x \neq 0\,(x \in \mathbb{R})$ に対して，$1/x \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ存在して

$$x(1/x)=1. \qquad \text{（乗法の逆元の存在）}$$

※ $x(1/y)$ を x/y と書く（除法の定義）．

※ 以上から，$\mathbb{R}$ は，0 による除法を除いて，加減乗除の四則演算が定義される集合になる．このような集合を 体 という．

II. 順序（大小）に関する公理

i) $x,\, y \in \mathbb{R}$ に対して，次の 1 つだけが成り立つ．

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y. \qquad \text{（全順序性）}$$

※ $x < y$ は $y > x$ とも書く．

$x < y$ または $x = y$ のとき $x \leqq y$ と書き，次が成り立つ．

$$x \leqq y \text{ かつ } y \leqq z \text{ ならば } x \leqq z. \qquad \text{（推移法則）}$$

※ 等号成立 $x = z$ は‘$x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$’の場合のみ．

※ $x \leqq y$ かつ $y < z$ ならば $x < z$，$x < y$ かつ $y \leqq z$ ならば $x < z$．

ii) 順序と演算

$$x \leqq y \text{ ならば } x + z \leqq y + z,$$

$$x \leqq y,\ 0 \leqq z \text{ ならば } xz \leqq yz.$$

※ $x < y, 0 < z$ ならば $xz < yz$（この場合のみ不等号が成立）．

※ $x > 0$ のとき x を 正数，$x < 0$ のとき x を 負数 という．

※ x の 絶対値 $|x|$ を次のように定める：

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

III. 連続性に関する公理

i) デデキントの **連続性公理**

$A, B \overset{\text{含まれる}}{\subset} \mathbb{R}$，$A, B \neq \emptyset$（空集合）は次を満たす：

$$A \overset{\text{または}}{\cup} B = \mathbb{R}, \quad A \overset{\text{かつ}}{\cap} B = \emptyset,$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B \text{ に対して } a < b.$$

このような A, B に対して，それらの組（ペア） $(A|B)$ を $\mathbb{R}$ の **切断** という．

このとき，各々の切断 $(A|B)$ に対して，或る $x \in \mathbb{R}$ が存在して，

x は A の最大数（ $\forall a \in A\,(a \leqq x),\ \forall b \in B\,(x < b)$），または

x は B の最小数（ $\forall a \in A\,(a < x),\ \forall b \in B\,(x \leqq b)$）である．

※ 結局，$A = (-\infty, x],\ B = (x, \infty)$ または $A = (-\infty, x),\ B = [x, \infty)$ となるが，いくらでも大きい（小さい）実数の存在を示す必要がある．

※ $\mathbb{R}$ は実質的にただ 1 つ存在することが示されている．

この公理系のみから実数の全ての性質が導かれるはずである．ここでは基本的な 2〜3 の性質を導いて満足しよう．（以下の証明では，公理系のうちよく知られた法則は黙って使うが悪しからず）．

まず，$\forall x(0x = 0)$ は当然成り立つが，公理主義の立場では，これも証明しなければならない．$x+0 = x$ より，$(x+0)x = xx = x^2$．よって ($\therefore$)，$x^2+0x = x^2$．$\therefore (x^2 + 0x) - x^2 = x^2 - x^2$．$\therefore 0x = 0$．（推移法則の $=$ の場合を使っている！）

次に，$1 > 0$ を示す．これは，$1x = x$ より $1^2 = 1$ を用いる．よって，$x^2 > 0$ $(x \neq 0)$ を示せばよい．まず，$x > 0$ のとき，$x^2 > 0x = 0$．$\therefore x^2 > 0$．次に，$x < 0$ のとき，$x - x < 0 - x$．$\therefore 0 < -x \Leftrightarrow -x > 0$．よって，$x < 0$ のとき，$x(-x) < 0(-x) = 0$．ここで，$x + (-x) = 0$ より，$x^2 + x(-x) = 0$．$\therefore x(-x) = -x^2$．$\therefore -x^2 = x(-x) < 0$．$\therefore -x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0\,(x < 0)$．以上から，$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$．よって，$1 = 1^2 > 0, \therefore 1 > 0$．（※ $1 \neq 0$ は $\forall x(1x = x)$ から得られる．$1 = 0$ とすると，$1x = 0x = 0$ だから，$\forall x(0 = x)$．矛盾！）

最後に，通常 **アルキメデスの原理** と呼ばれる重要定理：

$0 < a < b\,(a, b \in \mathbb{R})$ のとき，$an > b$ となる自然数 $n \in \mathbb{R}$ が存在する，

を公理系から示そう．これは，‘$a\,(> 0)$ がどんなに小さく，b がどんなに大きくても，a を繰り返して加えていけば必ず b を超える数になる’ことを表す．

その最も厳密な導出のためには，より基本的な **上限**[55] に関する定理を証明しておくのが役に立つ：(**ワイエルシュトラスの定理**)

集合 $S \subset \mathbb{R}$ が **上に有界** ならば S の上限 $x = \sup S \in \mathbb{R}$ が存在する．

まず，S の上界の集合を B とすると，上界の定義より $\forall s \in S\ \forall b \in B(s \leqq b)$．ここで，$B$ の $\mathbb{R}$ における補集合を A（$A \cup B = \mathbb{R}$，$A \cap B = \emptyset$，$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$）とすると，A の要素は上界でないから $\forall a \in A\ \forall b \in B(a < b)$ である．したがって，$(A|B)$ は実数の切断を定義し，A の最大数または B の最小数となる実数 x が存在する．（ア）S に最大数 m があるとき，$\forall s \in S\,(s \leqq m)$ を満たし，m は上界の最小数つまり B の最小数 x である．次に，（イ）S に最大数がないとき，

[55] $\mathbb{R}$ の部分集合 S（例えば 数列や区間など）について，$\forall s \in S\,(s \leqq b)$ となるとき，S は 上に有界 であるといい，b を S の **上界** という．上界は無数にある．このとき，或る x が存在して，（1°）$\forall s \in S\,(s \leqq x)$（$x$ は上界である），かつ（2°）$a < x$ ならば $\exists s \in S\,(a < s \leqq x)$（$x$ より小さい上界はない）が成り立つとき，x を S の 上限といい，$x = \sup S$ と表す．

任意の $s \in S$ に対して，$s < s'$ となる $s' \in S$ が存在するから，S の要素が上界になることはない．したがって，$S \cap B = \emptyset$，$(S \cup B) \subset \mathbb{R}$ および $A \cap B = \emptyset$，$A \cup B = \mathbb{R}$ より，$S \subset A$ である．このとき，もし，A に最大数 x があれば，$\forall s \in S(s \leqq x)$ となるから，x は S の上界となる．これは A には上界がないと仮定したことに矛盾する．したがって，A に最大数はなく，B に最小数 x が存在する．以上から，S の最大数の有無に依らずに，S の上界の集合 B には最小数が存在する，すなわち S の上限が存在することが示された．

アルキメデスの原理に戻ろう．$\exists n \in \mathbb{N}(an > b)$（$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合）は，数列 $\{an\}$ に対して，b がその上界でないことを意味する．$0 < an < a(n+1)$ だからこの数列は単調に増加するが，もし仮に $\{an\}$ が上に有界であると仮定すると，$\{an\}$ の上限 x が存在する：$\forall n \in \mathbb{N}(an \leqq x)$．ここで，$a > 0$ だから $x - a < x$ となって，$x - a$ が $\{an\}$ の上限となることはない．したがって，$\exists n \in \mathbb{N}(x - a < an)$ が成り立つ．これは $\exists n \in \mathbb{N}(x < a(n+1)$ を意味するが，$(n+1) \in \mathbb{N}$ より，$\exists n \in \mathbb{N}(x < an)$ となって，上限 x が存在するとの仮定に矛盾する．したがって，$\{an\}$ の上界は存在せず，$\exists n \in \mathbb{N}(an > b)$ が成り立つ．（したがって，$\exists n \in \mathbb{N}(n > b/a)$：「いくらでも大きな自然数が存在する」）．

これで，数学史の話を終わります．古代ギリシャからデカルトの時代までは，‘数’は実は【単位】の付いた‘量’のことであり，それゆえに，数の 2 乗は平方・3 乗は立方と呼ばれて，面積・体積を表したこと，デカルトが単位の長さを乗法や除法に持ち込んで，演算によって量の【単位】が変わらないようにしたことを思い出そう．また，量の【単位】を取り去った無名数の‘数’を導入して初めて負数まで対応する数直線が正当化され，負数の完全なる理解はガウスによる複素数の正当化と同時に得られたことも思い出そう．また，数学が極端に高度になっていくのは実数の連続性が厳密に取り扱われるようになってからで，それに加えて，公理主義という抽象化が数への素朴なイメージを引きはがしてしまって，好奇心あふれる多くの門外漢を門前払いする結果になっているようである．大学の数学を学ぼうとする人はこれらのことを承知の上で数学に向かうのが良いであろう．工学部生や数学科以外の理学部生は，公理主義については，その精神を嗅ぎ取ってもらえば十分でしょう．数学科に進む人は公理系から全てを演繹する訓練をお忘れなく．