第3章　初等関数の微積分

我々は第 2 章で導関数を学び積分の原理を理解した．この章では基本的な微積分の公式を導き，巾関数・三角関数・指数/対数関数などの初等関数について微分や積分の公式を求めよう．

§3.1　関数の連続，微積分の基本公式

関数 $y = f(x)$ の **定義域**[1] が開区間のとき，その開区間で $f(x)$ が連続であるための条件はすでに学んだ（☞ p.46）：

$$\text{その開区間内の各点 } p \text{ において } \lim_{x\to p} f(x) = f(p) \text{ が成り立つ.}$$

このとき，記号 $x \to p$ は‘x が p に近づくさいに，p との大小を問わない’ことに注意する．これは，定義域が開区間のために区間の **端点** が無いからである．もし，定義域が閉区間 $[a, b]$（つまり $a \leqq x \leqq b$）の端点で関数の連続を議論するときは注意を要する．端点 a, b での連続は，区間内で近づく必要がある．したがって，

x が p より大きい値で p に近づくことを，$x \to p + 0$,
x が p より小さい値で p に近づくことを，$x \to p - 0$

で表すと，

$$f(x)\text{が } [a, b] \text{ の } a \text{ で連続：} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)\,(\textbf{右連続}),$$
$$f(x)\text{が } [a, b] \text{ の } b \text{ で連続：} \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(a)\,(\textbf{左連続}).$$

$\lim\limits_{x\to p\pm 0} f(x)$（$=f(p \pm 0)$ と表す）を p における**右極限値**/**左極限値**という．

---

[1] 関数 $y = f(x)$ の変数 x のとりうる値の範囲つまり x の **変域** のことである．このとき，変数 y の変域を **値域** という．値域は明確に表すことが面倒なことも多く，値域を含む範囲を「終域」と表すこともある．

関数の連続に関する基本定理は極限に関する基本定理（☞ p.75）から直ちに得られる：

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a} g(x) = g(a)\ (f(x),\ g(x) \text{ が } a \text{ で連続）のとき}$$

(1°)　$\displaystyle \lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kf(a)$　　（k は定数），

(2°)　$\displaystyle \lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a)$　　（複号同順），

(3°)　$\displaystyle \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$，

(4°)　$\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$　　$(g(x) \neq 0,\ g(a) \neq 0)$.

§2.3 で学んだように，関数 $y = f(x)$ の $x = p$ における微分係数 $f'(p)$ は

$$f'(p) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(p+\Delta x) - f(p)}{\Delta x}$$

によって，極限値が存在するならば，定義される．このとき，p は開区間の点または閉区間の端点でない点 — **内点** — である．極限値の場合と同様にして，**右微分係数/左微分係数**：

$$f'(p \pm 0) = \lim_{\Delta x\to \pm 0} \frac{f(p+\Delta x) - f(p)}{\Delta x}$$

が定義される．両微分係数が存在して一致する場合：$f'(p+0) = f'(p-0)$ のみ $f'(p)$ が存在して，それら 3 者は一致する．したがって，$f(x)$ の定義域が閉区間の場合，その端点では $f(x)$ は微分可能ではない．

関数が連続でも（一般に）微分可能ではないが，その逆は正しい：微分可能なら連続である．$f(x)$ が $x = p$ で微分可能な場合を調べる．このとき，$f'(p)$ は存在することに注意すると，極限に関する基本定理を用いて

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0} f(p+\Delta x) - f(p) &= \lim_{\Delta x\to 0} \{f(p+\Delta x) - f(p)\} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(p+\Delta x) - f(p)}{\Delta x} \cdot \Delta x \\
&= f'(p) \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = f'(p) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle \lim_{\Delta x\to 0} f(p+\Delta x) - f(p) = \lim_{x\to p} f(x) - f(p) = 0$ だから，$f(x)$ は $x = p$ で連続である．

関数の極限に関する基本定理（☞ p.75）は 2 つの関数の和・差・積・商などの極限に関する定理であったが，微分に関しても同類の極限が存在し，それらは**微分法の基本公式**として表される：

$f(x), g(x)$ が微分可能ならば次の公式が成り立つ.

(I)　$\{kf(x)\}' = kf'(x)$　　（k は定数），

(II)　$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$　　（複号同順），

(III)　$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(IV)　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$　　$(g(x) \neq 0)$.

以下，関数の極限に関する基本定理を用いて証明しよう．(I)：

$$\{kf(x)\}' = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{kf(x+\varDelta x) - kf(x)}{\varDelta x} = k \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = kf'(x).$$

(II)：

$$\begin{aligned}\{f(x) \pm g(x)\}' &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\{f(x+\varDelta x) \pm g(x+\varDelta x)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{\varDelta x} \\ &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \pm \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} \\ &= f'(x) \pm g'(x).\end{aligned}$$

(III)：

$$\begin{aligned}&\{f(x)\,g(x)\}' = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x)}{\varDelta x} \\ &= \lim_{\varDelta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} g(x+\varDelta x) + f(x) \frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} \right\} \\ &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} g(x+\varDelta x) + \lim_{\varDelta x \to 0} f(x) \frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} \\ &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \cdot \lim_{\varDelta x \to 0} g(x+\varDelta x) + \lim_{\varDelta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} \\ &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).\end{aligned}$$

(IV)：(III) を利用しよう． $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，$f(x) = g(x)\,h(x)$．したがって，$f'(x) = g'(x)\,h(x) + g(x)\,h'(x)$ だから

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)\,h(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}.$$

特に，$f(x)=1$ のとき，

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \qquad (g(x) \neq 0).$$

我々はすでに原始関数や不定積分を学んでいる（☞ p.85）．微分の基本公式 (I〜III) を適用すると，**不定積分の基本公式**が得られる：

$$\text{(i)} \qquad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad (k\ \text{は定数})$$

$$\text{(ii)} \qquad \int\{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

$$\text{(iii)} \qquad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \qquad (\textbf{部分積分法})$$

証明.（ i ）：$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると $F'(x)=f(x)$ であり，不定積分との関係：$F(x)+C=\int f(x)dx=\int F'(x)dx$（$C$ は任意の積分定数）に注意する．

$$\int kf(x)dx = \int kF'(x)dx = \int\{kF(x)\}'dx = kF(x)+C' \quad (C'\ \text{は積分定数})$$

において，C', C は任意の定数だから，$C'=kC$ と書くと，

$$\int kf(x)dx = kF(x)+kC = k\{F(x)+C\} = k\int f(x)dx.$$

（ii）：同様に，$G(x)$ を $g(x)$ の原始関数とすると

$$\int\{f(x) \pm g(x)\}dx = \int\{F(x) \pm G(x)\}'dx = F(x) \pm G(x) + C''$$

だが，積分定数 C'' を $C_1 \pm C_2$ と書き直すと

$$\int\{f(x) \pm g(x)\}dx = \{F(x)+C_1\} \pm \{G(x)+C_2\} = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

(iii)：微分法の基本公式 (III) と上の（ii）より

$$\begin{aligned} f(x)g(x)+C &= \int\{f(x)g(x)\}'dx = \int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

積分定数 C は右辺の不定積分に含めてよい．右辺第 1 項を左辺に移項すると (iii) になる．