§2.6　定積分と微積分学の基本定理

前の § で不定積分 $F(x)+C=\int f(x)dx$ を考えた．積分定数と呼ばれる C は任意の定数で，この式は $\{F(x)+C\}'=f(x)$ に同値である．不定積分を表すために使われた記号はまさに §2.2 でライプニッツが用いた微積分の記号である．この § では，彼の議論を緻密にしよう．

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続として，区間 $[a,b]$ を n 個の小区間に分割しよう．それらの分点 x_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ は

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

の条件で任意に選ぶ．したがって，分割間隔 $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ は一般に一定ではない．また，$n\to\infty$ のとき全ての k に対して $\Delta x_k\to 0$ としよう．

出発する式は $\{F(x_k)+C\}'=f(x_k)$ である．これは

$$F'(x_k)=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\Delta x_k}=f(x_k)$$

と表されるが，$n\to\infty$ のとき $\Delta x_k\to 0$ に注意すると，$x_k\leqq t_k\leqq x_{k+1}$ を満たす任意の t_k を選び，

$$n\to\infty \text{ のとき}\quad \frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\Delta x_k}\to f(x_k),\quad f(t_k)\to f(x_k)$$

のように表すことができる．そこで，極限をとる前の両辺に Δx_k を掛けて k の和をとったものを考えるとき，それらの極限値が存在するならば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\Delta x_k}\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\Delta x_k$$

が成立すると期待される．以下，そのことを示そう．

左辺は階差の和の形（☞ p.65）になり

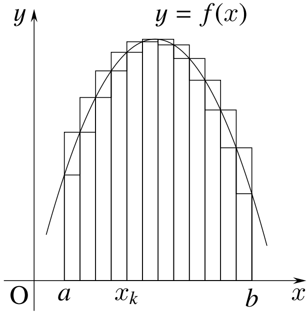
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1})-F(x_k))=\lim_{n\to\infty}(F(x_n)-F(x_0))=F(b)-F(a)$$

となる．右辺 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(t_k)\Delta x_k$ については，極限値が存在する場合に，不定積分に似せた記号 $\int_a^b$ を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$$

と書き表し，これを‘$f(x)$ を **被積分関数** とする **下端** a，**上端** b の **定積分**’という．

その極限値が正しく定まることを示そう．$f(t_k)\varDelta x_k$ は，右図からわかるように，高さが $f(t_k)$ $(x_k \leqq t_k \leqq x_{k+1})$，横幅が $\varDelta x_k$ の細い長方形の面積[27] である．それらを区間 $[a, b]$ で集めたものは，$n \to \infty$ $(\varDelta x_k \to 0)$ の極限で，区間 $[a, b]$ における曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間にある部分の面積[28] に一致することが示される．



部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$ の t_k は n 分割したときの各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ の中で任意に選べ，それに依らずに $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在することを示す必要がある．我々は関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続としている[29]．まずは，核心部分を証明しよう．$f(x)$ の小閉区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における最大値を f_k^M，最小値を f_k^m とすると，

$$f_k^m \leqq f(t_k) \leqq f_k^M \qquad (x_k \leqq t_k \leqq x_{k+1})$$

である．したがって，$S_n^M = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^M \varDelta x_k$，$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \varDelta x_k$ とすると，

$$S_n^m \leqq S_n \leqq S_n^M$$

が成り立つ．そこで，部分和の差 $S_n^M - S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1}(f_k^M - f_k^m)\varDelta x_k$ を考えると，差 $\varepsilon_{n,k} = f_k^M - f_k^m$ に対して $\varepsilon_{n,k} \to 0$ $(\varDelta x_k \to 0)$ であり，$\varepsilon_{n,k}$ の（k についての）最大値 ε_n についても $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ である．よって，$\sum_{k=0}^{n-1} \varDelta x_k = x_n - x_0 = b - a$ に注意して

$$S_n^M - S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n,k}\varDelta x_k \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_n \varDelta x_k = \varepsilon_n(b-a) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

---

27) $f(t_k) > 0$ なら面積，$f(t_k) < 0$ なら面積の値を負にしたもの．

28) $f(t_k) < 0$ の部分は負の値にする．

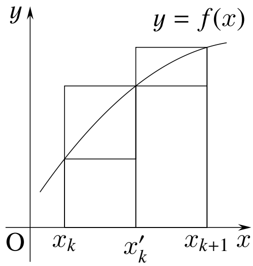
29) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続でない場合にも，$\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在することがある．その場合，$f(x)$ は $[a, b]$ でリーマン可積分であるといい，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\varDelta x_k$ を **リーマン積分** という．

が成り立つ．これは殆ど $\lim_{n\to\infty} S_n^M = \lim_{n\to\infty} S_n^m$ ($= \lim_{n\to\infty} S_n$) を意味している．ただし，厳密には，それらの極限値の存在を示す必要がある．

そのためには，上限（下限）に関するワイエルシュトラスの定理（☞ p.59）：

「集合 $S \subset \mathbb{R}$ が 上に有界 ならば S の上限 $\sup S \in \mathbb{R}$ が存在する[30]
（集合 $S \subset \mathbb{R}$ が 下に有界 ならば S の下限 $\inf S \in \mathbb{R}$ が存在する）」

を証明済なので，それを用いよう．集合として先ず数列 $\{S_n^m\}$ を考える．$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \Delta x_k$ に対して，ある小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ を分点 x'_k でさらに分割して，S_{n+1}^m と比較しよう．新たな分点記号 $x_k = x_l < x'_k = x_{l+1} < x_{k+1} = x_{l+2}$ を導入すると，区間 $[x_k, x_{k+1}]$ は区間 $[x_l, x_{l+1}]$ と区間 $[x_{l+1}, x_{l+2}]$ に細分され，増分については



$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (x_{l+2} - x_{l+1}) + (x_{l+1} - x_l) = \Delta x_{l+1} + \Delta x_l$$

となる．このとき，$f_k^m \Delta x_k = f_k^m \Delta x_l + f_k^m \Delta x_{l+1}$ であるが，区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における最小値 f_k^m とその区間を細分してえられた区間 $[x_l, x_{l+1}]$，$[x_{l+1}, x_{l+2}]$ における最小値 f_l^m，f_{l+1}^m を比較すると，右上図からもわかるように，後者の方が一般に大きくなる．したがって，

$$f_k^m \Delta x_k \leqq f_l^m \Delta x_l + f_{l+1}^m \Delta x_{l+1}$$

であるから（等号成立は $f(x)$ が区間 $[x_k, x_{k+1}]$ で一定のとき），

$$S_n^m \leqq S_{n+1}^m$$

が成り立ち，$\{S_n^m\}$ は単調増加数列になる．また，$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \Delta x_k$ で，区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の最大値を f^M とすると，$f_k^m \leqq f^M$ だから，

$$S_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^m \Delta x_k \leqq \sum_{k=0}^{n-1} f^M \Delta x_k = f^M (b-a) < \infty$$

---

[30] 実例で考えるとわかりやすい．開区間 $(-\infty, b)$，数列 $\{a_n \,|\, a_n = b - \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$，半開区間 $(-\infty, b]$ を考えてみよう．この 3 集合のどれにおいても，その要素は b 未満または b 以下であり，b 以上の数は‘超えられない数’= 上界 と呼ばれる．どの集合でも，b より小さい要素 a に対しては $a < x < b$ を満たす要素 x が存在する（b が上限であるための条件である）．最小の上界 b を 上限 と呼ぶ．

であり，数列 $\{S_n^m\}$ は上に有界である．よって，$\{S_n^m\}$ の上限 $S_{上限}^m$（＝最小の上界）が存在する．同様にして，数列 $\{S_n^M\}$ についても，同様の議論を行えば，単調に減少して下に有界であることがわかる（確かめよう）．したがって，$\{S_n^M\}$ の下限 $S_{下限}^M$（＝最大の下界）が存在し，$S_n^m \leqq S_n^M$ より

$$S_n^m \leqq S_{上限}^m \leqq S_{下限}^M \leqq S_n^M$$

である．したがって，

$$\left|S_{下限}^M - S_{上限}^m\right| \leqq \left|S_n^M - S_n^m\right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから，$S_{下限}^M = S_{上限}^m$（$= I$ と書く）が成立する．したがって，

$$S_n^m \leqq S_{n+1}^m \leqq \cdots \leqq I \leqq \cdots \leqq S_{n+1}^M \leqq S_n^M$$

がえられる．ここで，

$$S_n^m \leqq S_n \leqq S_n^M, \quad S_{n+1}^m \leqq S_{n+1} \leqq S_{n+1}^M$$

も考慮すると，S_n と I の値が共に S_n^m と S_n^M の間にあるから

$$|S_n - I| \leqq \left|S_n^M - S_n^m\right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．つまり，S_n は I に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\mathit{\Delta} x_k = I \left(= \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

S_n^m, S_n, S_n^M は，区間 $[a, b]$ における連続関数 $y = f(x)$ と x 軸の間にある部分の面積（正しくは，積分値）を求める際に，$y = f(x)$ を階段状に近似してえられたものであるが，$n \to \infty$ の極限でそれらが共に極限値 I に収束したことは，近似無しに面積（積分値）を正しく求めたものと認められる．

ここで，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ について，下端 a・上端 b についての拡張および基本性質を述べておこう．$a < b$ として区間 $[a, b]$ を小区間に分割したが，$a > b$ として区間 $[b, a]$ を分割しても構わない：

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n = b.$$

すると，今度は分割間隔 $\mathit{\Delta} x_k = x_{k+1} - x_k < 0$ として議論することになる．$\mathit{\Delta} x_k < 0$ に留意すると，先ほどの議論は完全にパラレルに進み，$a > b$ のとき

の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が定義できる．部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k$ と上の拡張の議論から，定積分の基本性質が得られる：

$$(1^\circ)\quad \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \qquad (\text{複号同順}),$$

$$(2^\circ)\quad \int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \qquad (c\ \text{は定数}),$$

$$(3^\circ)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b),$$

$$(4^\circ)\quad [a,\ b]\ \text{で}\ f(x) \leqq g(x)\ \text{ならば}\quad \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$(5^\circ)\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \qquad (a < b).$$

$$(6^\circ)\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

$$(7^\circ)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (a \lesseqgtr b)$$

(1°)，(2°) は定積分の定義と §§2.4.2 の基本定理で $x \to a$ を $x_n \to a\ (n \to \infty)$ と考えれば，その基本定理の (2°)，(1°) が適用できる．(3°) は後ほど証明する $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を用いれば自明．(4°) は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k \leqq \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\Delta x_k$ から明らか．(5°) も同様：$\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta x_k\right| \leqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\,f(t_k)\,|\Delta x_k$．$(6^\circ)$ は定積分と面積の関係から明らかだが，定義と見なしてよい．(7°) もすでに説明したが，これも定義と考えてよい．

最後に，懸案の $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を導こう．そのためには，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ [31] が $f(x)$ の原始関数であることを示せば済む．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

[31] 変数 t で積分する形になっているが，定積分では積分の実行後には積分変数は消えて，上端・下端の変数のみが現れます．

$\displaystyle\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt$ を評価しよう．積分区間は小区間 $[x,\,x+\varDelta x]$ [32] なので，区間 $[x,\,x+\varDelta x]$ における $f(x)$ の最大値を f_x^M 最小値を f_x^m とすると，

$$\int_x^{x+\varDelta x} f_x^m\,dt = f_x^m \varDelta x \leqq \int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt \leqq f_x^M \varDelta x = \int_x^{x+\varDelta x} f_x^M\,dt$$

が得られ（$\varDelta x < 0$ のときは不等号の向きが反対になる），$\varDelta x$ で割ると，

$$f_x^m \leqq \frac{\displaystyle\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt}{\varDelta x} \leqq f_x^M$$

となる．したがって，$\varDelta x \to 0$ のとき，$f_x^m \to f(x)$，$f_x^M \to f(x)$ だから，

$$\lim_{\varDelta x\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が成立する．この関係式は**微積分学の基本定理** と呼ばれる．この基本定理は‘$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ が $f(x)$ の原始関数（の 1 つ）である’ことを意味する：

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C_a \qquad （C_a \text{ は定数}）.$$

$0 = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C_a$ だから，$C_a = -F(a)$ と定まり，

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

したがって，上端 x を b で置き換えると，念願の

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ \left(= [F(x)]_a^b \text{ と書く} \right)$$

が得られる．$[F(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b$ に注意しよう．

[32] 簡単のために $\varDelta x > 0$ としよう．