§2.5　ニュートンの運動方程式と不定積分

ニュートンの運動方程式は『プリンキピア』(1687) の中で述べられた 運動の第 2 法則（☞ p.61）にその起源がある：運動の量（＝質量 m ×速度 $\vec{v}$）の変化（＝質量 m ×加速度 $\vec{a}$） $\left(\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)$ は，加えられた力 $\vec{F}$ に比例し，その力の方向を向く：$m\vec{a} = \vec{F}$．ここで，質量や加速度や力は量なので，まず，それらを数学的計算ができるように数に直す‘ 儀式 ’を行っておこう．質量 m は【単位】に【kg】をとろう．速度 $\vec{v}$ は，移動量の(時間的)変化率 $\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{x}(t)}{\Delta t}$ だから，その【単位】を【m/sec】にとれば，加速度 $\vec{a}$ は速度の変化率だから【単位】は【m/sec】/【sec】=【m/sec^2】である．このような単位のとりかたは MKS 単位系と呼ばれる．力 $\vec{F}$ については，1 kg の物体に作用して，それに 1m/sec^2 の加速度（速度の変化が 1m/sec）を生じさせるのに必要な力を 1 newton という．よって【単位】は【newton】である．以上のことから，運動の第 2 法則を物理量の間の等式として正しく表すと

$$m\vec{a}\,【\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/sec}^2】 = \vec{F}\,【\mathrm{newton}】$$

である．ここで，1 kg·m/sec^2 =1 newton であるから，両辺の【単位】は同じものであり，等式から外されて，数で表される：$m\vec{a} = \vec{F}$．この儀式は，多くの場合，省略される．上の数式表現は **ニュートンの運動方程式** と呼ばれ，多くの場合，微分方程式の形で表される：

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}.$$

この運動方程式において，力 $\vec{F}$ として万有引力を考える．例えば，太陽（質量 M）を中心として地球（質量 m）の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると，地球が太陽から受ける万有引力は

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$\left(r = |\vec{r}|,\ \hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\vec{r}}{r}\right.$ は単位ベクトル，$G = 6.67\times 10^{-11}$ は万有引力常数）である．この方程式を解くことによって，地球が太陽の周りを楕円軌道で回ることが明

らかになった．このように，ニュートンの運動方程式を通して，**数学は自然の基本法則を表現でき，自然現象が根本から理解できるようになった**．数学に最高の価値を認める真の理由はこの 1 点にあるといっても過言ではない[24)]．事実，力 $\overrightarrow{F}$ として荷電粒子が電場や磁場の中で受ける力 $\overrightarrow{F} = e(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})$[25)] を考えると，それは電気や磁気が関係する自然の基本法則になっている．さらなる研究の結果得られたマックスウェル方程式：

$$\mathrm{div}\overrightarrow{D} = \rho, \quad \mathrm{rot}\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{rot}\overrightarrow{H} - \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} = \overrightarrow{j}, \quad \mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$$

によって，光の正体は電気と磁気の振動であることが明らかになった．さらに，極微の世界を探る基本方程式（シュレーディンガー方程式）：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

は化学反応の本質や原子核・素粒子の性質を明らかにして，体の組織の働きの解明，遺伝の本質の究明，新薬の発見に貢献している．やがては生命誕生の謎にまで迫るであろう．目を大宇宙に転ずれば，アインシュタインによって導かれた一般相対性理論の重力場の方程式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

は大質量の星によって光の進路は曲げられることを示し，光さえも脱出できないブラックホールの存在を予言し，さらには，宇宙は 137 億年前に 1 点で誕生したと考えられているが，この方程式はその直後に起きたとされる宇宙の大膨張に根拠を与えている．今後も自然の基本法則に関わる理論が現れるであろうが，それは数学 — もし必要なら，点という概念で捉えきれない‘数’の形 — で表現されるであろう．

自然の基本法則は方程式で表された物理法則であり，本来は数学の場合と違って測定の操作が関与し，左辺と右辺の物理量の値が一致したときのみ等号が成立する．ニュートンの運動方程式 $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$ でいえば，$m\overrightarrow{a}$ を精確に測定し，$\overrightarrow{F}$ を正しく仮定したときのみ‘=’で結ばれる．例えば，野球のボールを

---

24) ニュートンの運動方程式以後，数学は輝かしい発展を加速している．始めの数十年間で微分方程式の解法技術を習得し，それ以後は，厳密な証明法の研究・実数の連続性の研究が発展し，19 世紀末には古代ギリシャ数学以来の念願であった厳密な公理化が完成した．

25) 式の各記号の説明は省略する．大学の物理の講義で学ぼう．

放り投げることを考えてみよう．地球上の物体が地球から受ける万有引力は地上付近では一定で，よってボールの加速度は一定である．その力のみを考慮すると，運動方程式を解いた結果は，下で示すようにボールは放物線を描くように飛ぶことがわかる．ただし，正しい（精確に測定された）加速度を得るためには，ボールに働く風の影響・空気の摩擦抵抗・地球の自転による遠心力なども考慮しなくてはならない．

以上のことを考慮すると，運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ においては，適当な力 $\vec{F}$ を考えても正確な加速度 $\vec{a}$ を得ることは難しい．そこで数学においては，等式 $\vec{a} = \vec{F}/m$ の右辺の $\vec{F}$ に適当と思われる力を代入し，それによって左辺の $\vec{a}$ を定義するという，いわば関数の定義と同じような扱いをする．数学としてはその段階で落着とし，物理的には，精確な加速度 $\vec{a}$ を与える力 $\vec{F}$ を探し続けることになる．

さて，ボール投げ問題の運動方程式を解いてみよう．地上で質量 m のボールの重さを量ることは，かなりよい近似で，その物体に働く地球の重力を与える．日本付近の海面上（海抜 0 メーター）では m kg のボールに働く重力の大きさは mg【newton】$(g = 9.80)$ なので，その運動方程式は，方向を考慮して，

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{dv_x(t)}{dt} = 0,\ \frac{dv_y(t)}{dt} = 0,\ \frac{dv_z(t)}{dt} = -g$$

と与えられる（鉛直上向きを z 方向としている）．ベクトルの性質によって，各成分の方程式が得られることに注意しよう．x, y 成分については右辺が 0 だから，$y = v_{x,y}(t)$ のグラフの接線の傾きが時刻 t に依らずに 0 である．したがって，$v_{x,y}(t)$ は定数になる：

$$v_x(t) = C_x, \quad v_y(t) = C_y.$$

z 成分については右辺が定数 $-g$ だから，$y = v_z(t)$ のグラフの接線の傾きが時刻 t に依らずに $-g$ である．したがって，$v_z(t)$ は 1 次関数になる：

$$v_z(t) = -gt + C_z.$$

定数項 $C_{x,y,z}$ は微分方程式の解に常に現れ，以下に示すように極めて重要な役割を演じ，**積分定数** と呼ばれている．一般に，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数** というが，$F(x)$ に任意の定数 C を加えた $F(x) + C$ も

原始関数である：$\{F(x)+C\}' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x)$[26]．そのとき，$X(x)$ を未知とする微分方程式 $X'(x) = f(x)$ の最も一般的な解は $X(x) = F(x) + C$ であり，それを $f(x)$ の **不定積分** と呼んで，次のように表す：

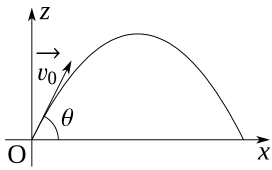
$$F(x) + C = \int f(x)dx.$$

C が積分定数である．この書式にしたがうと，微分方程式 $\frac{dv_z(t)}{dt} = -g$ の最も一般的な解（一般解）は

$$v_z(t) = \int(-g)dt = -gt + C_z$$

となる．

積分定数の重要性を見よう．ボールは xz 平面上で，時刻 0 に，初速 v_0 で斜め上に角 θ で投げられたとしよう．すると，



$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \quad v_y(t) = 0, \quad v_z(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

と積分定数が定まる．ボールの位置 $\vec{r}(t)$ と速度の関係は $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ だから，不定積分によって

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t + D_x, \quad y(t) = D_y, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + D_z$$

（$D_{x,y,z}$ が積分定数）が得られる[27]．時刻 0 でボールの位置 $\vec{r}(0) = \vec{0}$ とすると，$D_{x,y,z} = 0$ となる．よって

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t.$$

これから，時刻 t を消去すると，時刻に関係しない x と z の関係，つまり，ボールの軌跡が得られる：

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}.$$

この式はボールの軌跡が放物線であることを示している．

---

26) $F(x)$ と $G(x)$ が共に $f(x)$ の原始関数のとき，$\{F(x)-G(x)\}' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$ だから，$F(x)$ と $G(x)$ の差は高々定数である．

27) 微分して $-gt$ になる関数は $-\frac{1}{2}gt^2$ およびそれと定数だけ異なるものに限られる．