§2.3　導関数

デカルトの『幾何学』(1637)(☞ p.34)において座標を用いる方法の基礎が明らかになり，そのおかげで，変数を用いる代数と図形を表す幾何の関係が密接なものになった．変数 x, y で表された代数方程式は x 軸・y 軸を座標軸とする平面上の図形として表される．x, y の代数方程式は，横軸の変数 x の値に対応して縦軸の変数 y の値がただ 1 つ定まる **関数** の場合に，取り扱いがたやすくなる．例えば，$y^4 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{x}$ では，関数 $y = \sqrt[4]{x}$ と関数 $y = -\sqrt[4]{x}$ に分けて考える方がよい．関数 (function) という用語は 1673 年にライプニッツが「(あれこれの働きをする量の) 役割」の意味で用いた．関数は，よく知られているように，一般に $y = f(x)$ のように表す[8]．関数の概念を導入する必然性は，微分に関連する問題を統一的で一貫した立場で取り扱えるようにしたことにあった．その中には，関数を微分して得られるものがまた関数 — **導関数** — であることも含まれる．

物体には重力・電磁力・その他多くの力が働く．ある物体の空間座標を (x, y, z)，それに働く力 $\overrightarrow{F}$ の x, y, z 方向成分を F_x, F_y, F_z とすると，x, y, z はそれぞれ F_x, F_y, F_z のみに支配される．つまり，F_x, F_y, F_z は陰に陽に時間（時刻）t に依存し，x は F_x のみに依存して，y は F_y のみに依存して，z は F_z のみに依存して，それぞれ t の関数として原理的には定まる：$x = f(t), y = g(t), z = h(t)$．これらの式は，数学においては一般化・抽象化されて，関数 $y = f(x)$ などと代表して表現される．

関数 $y = f(x)$ において，x を時刻 t，y をある物体の z 座標（高さ）としたとき，その物体の速度の z 成分（z 方向の速度）を求めることから始めよう．時刻 $x = a$ における瞬間速度を求めるときには，瞬間（＝無限小時間 dt）の概念

---

[8] 古くは整式，3 角関数，指数関数，対数関数などの具体的な数式で表されるものだけが関数として扱われていたが，関数概念の発展とともにその制限はとり除かれた．また，x のとり得る値の変域を連続領域とする制限も取り除かれ，変域の各 x にただ 1 つの実数（または複素数）$f(x)$ を対応させることだけが関数の条件となった．例えば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は自然数の上で定義された関数 $f(n) = a_n$ と見ることができる．
上の関数の定義では，x に対してただ 1 つの値 $f(x)$ が対応するが，場合によっては，複数の値をとるものも関数ということがある．このような関数を **多価関数** と呼び，上で定義した通常の関数を **1 価関数** という．例えば，円 $x^2 + y^2 = r^2$ は 2 価関数 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ と同じである．

が曖昧なので，有限の時刻差 $\varDelta x\,(\gtrless 0)$ の間の平均速度から考えなければならない．平均の速さ (speed) が「動いた距離 / 要した時間」であるのに対して，負の値も考慮した **平均速度** (velocity) は「位置の差 / 時刻の差」によって定義される．したがって，時刻 $x = a$ と $x = a + \varDelta x$ の間の平均速度は，位置の差 $\varDelta y = f(a + \varDelta x) - f(a)$ を用いて

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{(a+\varDelta x) - a} = \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{\varDelta x}$$

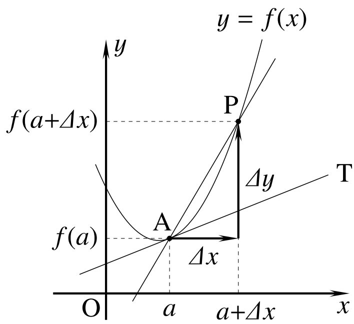
と定められる[9]．時刻 $x = a$ の瞬間速度を求める正しい処方は，ニュートンが“消滅してゆく量の最後の比”（☞ p.63）と呼んだ，分子・分母が共に 0 に限りなく近づいていく場合の比の極限を求めることであり，一般化に耐える方法であった：

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{\varDelta x} \quad (= c \text{ とおく}).$$

ここで，$\varDelta x \to 0$ は $\varDelta x\,(\gtrless 0)$ が，0 で割らないように条件 $\varDelta x \neq 0$ を満たしながら，任意の方法で 0 に限りなく近づいていくことを意味し，lim は近づいていった極限の値を求めることを意味する．このとき，その極限の値が存在する（＝有限なただ 1 つの値になる）ときは，$x = a$ で瞬間速度が定義できることを意味する．一般の関数 $y = f(x)$ に対して上の極限値が存在するとき f は a で **微分可能** であるという．このとき，c を f の a における **微分係数** といい，$f'(a)$，$\dfrac{df}{dx}(a)$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ などと表される：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{\varDelta x} \left(= \frac{df}{dx}(a)\right).$$

以上の極限操作の意味を関数 $y = f(x)$ のグラフを用いて調べよう．グラフ上に 2 点 A$(a,\ f(a))$，P$(a+\varDelta x,\ f(a+\varDelta x))$ をとると，平均変化率 $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ は‘直線 AP の傾き’を表す．ここで，P $\to$ A とする，つまり点 P をグラフの曲線に沿って点 A に，P $\neq$ A の条件付で，任意の方法で限りなく近づける．A の付近で行きつ戻りつしながら近づいて



[9] 一般の関数 $y = f(x)$ においては，$\varDelta x$, $\varDelta y$ は x, y の **増分**，$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ は **平均変化率** と呼ばれる．

も構わない．このとき，$\varDelta x \to 0$ となるので，直線 AP の傾きは微分係数 $f'(a)$ の値に限りなく近づく．したがって，直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づいていく．この直線 AT を関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における **接線**，A をその **接点** と定める．よって，微分係数 $f'(a)$ はグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における‘接線 AT の傾き’を意味する．

微分可能性を具体的に調べてみよう．

例 1 : $y = f(x) = x^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．この場合，

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(a+\varDelta x) - f(a)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(a+\varDelta x)^n - a^n}{\varDelta x}$$

なので，公式

$$\begin{aligned} x^n - a^n &= (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= (x-a) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(a+\varDelta x)^n - a^n}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(a+\varDelta x - a) \sum_{k=1}^{n} (a+\varDelta x)^{n-k} a^{k-1}}{\varDelta x} \\ &= \lim_{\varDelta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} (a+\varDelta x)^{n-k} a^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} a^{k-1} = na^{n-1} \end{aligned}$$

のように $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が定まる [10)]．実際，分母の $\varDelta x$ は分子に表れるそれによって打ち消され，$(a+\varDelta x)^{n-k}$ は，$\varDelta x$ が（0 とならずに）0 にいくらでも近づくとき，極限値 a^{n-k} に近づく：

$$y = f(x) = x^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \text{ のとき } f'(a) = na^{n-1}.$$

---

10) 今のところ，関数の極限に関して成り立つ以下の基本定理は証明なしで使うことにしよう．（今の場合，x を $a + \varDelta x$ に置き換え，$\displaystyle\lim_{a+\varDelta x \to a} (\cdots) = \lim_{\varDelta x \to 0} (\cdots)$ を用いる）．

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ が有限な一定値になる(収束する）とき

(1°)　$\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$　（k は定数），

(2°)　$\displaystyle\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$　（複号同順），

(3°)　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$,

(4°)　$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$　$(g(x) \neq 0,\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$.

例 2：$y = f(x) = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ のとき，微分係数 $f'(a)\ (a > 0)$ を求める．

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\sqrt{a + \varDelta x} - \sqrt{a}}{\varDelta x}$$

だが，$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \dfrac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ に注意すると，

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(a + \varDelta x) - a}{\varDelta x\,(\sqrt{a + \varDelta x} + \sqrt{a})} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{a + \varDelta x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

したがって，$f(x) = \sqrt{x}\ (= x^{\frac{1}{2}})$ のとき，$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ (= \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}})\ (a > 0)$.

例 3：$y = f(x) = 1/\sqrt{x}\ (= x^{-\frac{1}{2}})$ のとき

$$f'(a) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}\ \left(= -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\right)\ (a > 0)$$

である．これを示そう．

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+\varDelta x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a + \varDelta x}}{\varDelta x \sqrt{a + \varDelta x}\sqrt{a}}$$

$$= -\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\sqrt{a + \varDelta x} - \sqrt{a}}{\varDelta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{a + \varDelta x}\sqrt{a}}.$$

ここで，関数の極限に関する基本定理を用い，例 2 に習うと

$$f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}.$$

例 4：$f(x) = x^{-k} = 1/x^k\ (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$f'(a) = -ka^{-k-1}$$

となることを示そう．$k = 0$ のとき $f(x) = 1$ より $f'(a) = 0$．$k > 0$ の場合，

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\frac{1}{(a+\varDelta x)^k} - \frac{1}{a^k}}{\varDelta x} = -\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(a + \varDelta x)^k - a^k}{\varDelta x(a + \varDelta x)^k a^k}$$

において，極限の基本定理を用い，例 1 に習うと

$$f'(a) = -ka^{k-1}\frac{1}{a^k a^k} = -ka^{-k-1}.$$

例 5：$f(x) = x^k\sqrt{x} = x^{k+\frac{1}{2}}\ \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$f'(a) = \left(k + \frac{1}{2}\right) a^{k-\frac{1}{2}} \quad (a > 0)$$

を示すのは練習問題としよう．

$f(x) = x^{\alpha}$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は a を正の定数としたが，実際には任意の正の実数に対して $f'(a)$ を考えることができる．つまり，$f'(a)$ は a を変数とする関数と見なせる．このことをすっきり表すために $f'(a)$ の a を x で置き換え，その結果得られる関数 $f'(x)$ $(= \{f(x)\}')$ を関数 $f(x)$ の **導関数** と呼ぶことにする：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

我々の扱う殆ど全ての関数は微分可能であり，導関数が存在する．

導関数を求める問題として，$f(x) = x^{\alpha}$ のべき α を（先に調べた整数や半整数の場合から）一般の有理数：$\alpha = \dfrac{m}{n}$ （m は整数，n は自然数）の場合に拡張して調べよう．$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$（$n$ が偶数のとき $x > 0$），$m < 0$ のとき $x^{\frac{m}{n}} = 1/x^{\frac{|m|}{n}}$ である．$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ の両辺を n 乗すると，$f(x)^n = x^m$．よって，両辺の導関数 $\{f(x)^n\}' = \{x^m\}'$ において，右辺は，先の例より，$\{x^m\}' = mx^{m-1}$．左辺を求めよう．

$$\begin{aligned}
\{f(x)^n\}' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)^n - f(x)^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x + \Delta x) - f(x)\}}{\Delta x} \sum_{k=1}^{n} f(x + \Delta x)^{n-k} f(x)^{k-1} \\
&= f'(x) \times \{nf(x)^{n-1}\} = nf'(x)x^{\frac{m}{n}(n-1)}
\end{aligned}$$

したがって，$nf'(x)x^{\frac{m}{n}(n-1)} = mx^{m-1}$ だから，

$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{m-1-\frac{m}{n}(n-1)} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

したがって，

$$\{x^{\alpha}\}' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \text{ は有理数})$$

が成立する．上の公式は無理数の α に拡張できるであろう．つまり残った仕事はべき α が任意の実数でよいと示すことである．そのためには対数関数の微分の知識を得るまで待とう．

§2.4　$\varepsilon - \delta$ 論法による証明

この § では，$\varepsilon - \delta$ 論法の歴史，関数の極限に関する基本定理の証明に加えて，一様連続や一様収束などの概念の基礎を学ぼう．

2.4.1　$\varepsilon - \delta$ 論法の歴史

微分係数の具体的な計算において，関数の極限に関する基本定理（☞ p.68）（例えば，$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$）を証明なしで用いたが，その証明は極限の概念の範疇（はんちゅう）では無理である．たとえば，$x \to a$ は‘x が a に限りなく近づく（ただし，$x \neq a$）’状態を表すが，これを，普通の証明において利用できるように，x は a に近いある定数などとすることはできない．特に，$x \to 0$（限りなく 0 に近づく）を考えたり，その逆数に対応する $x \to 1/0$（限りなく無限に近づく）を考えると，極限は無限小や無限大と隣り合わせに存在していることがわかる．このことは極限それ自身をうまく飼い慣らして役立たせるのは非常に難しいことを意味している．

数学は，できるだけ少ない基本仮定から出発して，それ以外の正しい命題を全て証明するように宿命づけられた学問である．関数の極限に関する基本定理（と現在呼ばれる命題）も証明されるべきものと見なされたのは当然のことであった．

極限を正しく取り扱う方法の起源は古代ギリシャ時代まで遡（さかのぼ）る．エウドクソス（☞ p.11）は，面積や体積を理論的に正しい計算をするために，17 世紀に「取り尽くし法」と名づけられた方法を用いた．それを簡単な例で解説しよう：長さ a の線分とそれよりずっと短い線分 ε が与えられたとしよう．いま，a の線分の半分を取り除くと，$a_1 = a/2$ の線分が残る．さらに，a_1 の半分を取り除くと $a_2 = a/2^2$ が残る．さらに，半分，半分と取り除いていくと，n 回目には $a_n = a/2^n$ の長さの線分が残る．取り除く回数 n を多くすれば，ε をいかに小さく定めようとも，a_n は ε より小さくできる．これは，実質的に $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を意味する．つまり，$n \to \infty$ の極限で長さ a の線分は取り尽くされる．

19 世紀前半の優れた数学者 コーシー（☞ p.46）は，厳密性を求めて書かれた著書『解析学教程』(1821）において，取り尽くし法のアイデアを基にして極限を定義した（わかりやすくするため，少々脚色する）：

> 1 つの変数 y の引き続く一連の値 y_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が，1 つの定まった値 α に限りなく近づき，最終的には，引き続く一連の値 y_n と α の差が望むだけ小さな値 ε (> 0) より小さくなるならば，この定まった値 α は，一連の値 y_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の 極限 と呼ばれる．[11)]

コーシーは‘極限の定義に，任意に（小さく）とれる普通の数 ε を考えた [12)]’ことに注意しよう．これによって，極限 — 限りなく近づく — という制御不可能な概念は通常の数の概念に置き換わった．彼は，極限の概念を関数に適用するとき，変数 y を関数 $y = f(x)$ の意味で用い，一連の値 y_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ には関数値 $y_n = f(x_n)$ を考えた．

ここで，関数の極限と $\varepsilon - \delta$ 論法（☞ p.46）との関係を調べておき，引き続く議論に役立たせよう．現代数学では関数の極限は次のように定義される：

> ‘$f(x) \to \alpha$ $(x \to a)$ $(\lim_{x\to a} f(x) = \alpha)$’とは‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し（選べて），$0 < |x - a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ’ことである．

$\varepsilon - \delta$ 論法がいわゆる極限の自然な拡張であることを見よう．$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ において，$\varepsilon \to 0$ を考えてみる．このとき，$|x - a| \to 0$ のとき $|f(x) - \alpha| \to 0$，つまり‘$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$’— 極限 — が得られる．逆に，極限を単に有限に拡張してみよう．‘$0 < |x - a| < \delta$ のとき $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$’とするだけでは問題が起こる．小さい δ に対して同程度に小さい ε が期待されるが，実際に

11) その現代的な書き方は無限数列 $\{y_n\}$ の極限値の定義そのものである：
‘$y_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ $(\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha)$’とは，‘任意に選んだ正数 ε に対して或る番号（自然数）N が存在し（選べて），$n > N$ となる全ての自然数 n に対して $|y_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ’ことである．（これは $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる，数列用の $\varepsilon - \delta$ 論法による極限値の定義である）．

12) 文字 ε が実際に用いられたのは，その著書の分数関数の極限に関する定理の証明において，“ε を望むだけ小さい数とすると，$x \geqq h$ で，$k - \varepsilon < f(h + 1) - f(h) < k + \varepsilon$ となるような h が存在する”という記述が最初である．

はそうはならない場合がある．$f(x)$ が $x = a$ 付近で極端な増（減）をする場合（例えば，$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$，$f'(x) = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$）を考えると，$\delta$ が極めて小さくとも ε は遥（はる）かに大きいこともある．それを解決するために，ε の方を先に定めて，‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し（選べて）’というお呪（まじな）いを付けるわけです．

$\varepsilon - \delta$ 論法の歴史に戻ろう．$\varepsilon - \delta$ 論法が明確に現れたのはコーシーの 1823 年の著作『無限小解析要論』における定理である：「関数 $f(x)$ は区間 $[x_0, X]$ で連続とし，この間での導関数 $f'(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．このとき，$m < \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} < M$ が成り立つ」．彼はこの定理の証明を「δ と ε を 2 つの十分に小さい正数とするとき，$|\Delta x| < \delta$ となる Δx と区間 $[x_0, X]$ の任意の x に対し，不等式 $f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < f'(x) + \varepsilon$ が成り立つような δ を選ぶ.」という記述から始めている．$\varepsilon - \delta$ 論法の名前の語源はここにある．残念ながら，その記述には重大な見落としがあり，それに気づくのに数十年もかかったが，結果として 一様連続 や 一様収束 という極めて重要な概念を産みだし，$\varepsilon - \delta$ 論法の有用性が明らかになった [13]．それらの概念については §§2.4.3 で別途議論しよう [14]．$\varepsilon - \delta$ 論法はワイエルシュトラス (☞ p.46) による 1860 年代の講義のなかで完成された．

---

13) 彼は‘正数 ε が与えられたとき，任意の x に対し，不等式 $f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < f'(x) + \varepsilon$ $\left(\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x)\right| < \varepsilon\right)$ が成立する $\delta (> |\Delta x|)$ を選ぶ’として議論を進めた．つまり，不等式は各 x についてのものであるのに対して，δ は x に依らない共通の値が選べるとしている．しかしながら，関数 $f(x)$ は，連続だが，x の変化に応じて病的に増 (減) する部分区間がある場合には，δ は，ε に依存するだけでなく，x に依存していくらでも小さく取らねばならない場合があることが後に判明した．現在，x に依存しない δ が選べる場合は，関数 $f(x)$ が与えられた区間上で 一様連続 であると呼ばれる．コーシーは，関数の連続性について，$f(x + \Delta x) \to f(x)$ $(\Delta x \to 0)$ を $\varepsilon - \delta$ 論法に焼き直したものと了解していたようである．ただし，彼のいう連続は，x の各点におけるものではなく，区間における連続性に限られているが，δ は x に依存しないとした．また，彼は連続関数の無限数列 $\{f_n(x)\}$ の収束性を $\varepsilon - \delta$ 論法（$\varepsilon - N$ 論法）で扱ったが，そこに現れる N は x に依らない — 一様収束 — としたために誤った定理を導いた．このように彼の議論には欠陥があったが，このような微妙な議論は $\varepsilon - \delta$ 論法だからこそ可能になったことに注意しよう．

14) 関数が病的な増減を示す場合もあることを考慮するとき，一様連続と一様収束という概念が必須になり，関数に関する定理の証明には $\varepsilon - \delta$ 論法が欠かせなくなった．こんな事情を教わらずに $\varepsilon - \delta$ 論法を学ぶ学生も多いようである．そこで，悩み多き学生の良き道案内として，数学史的考察に加えて教育的配慮が十分な 中根 美知代 著『$\varepsilon - \delta$ 論法とその形成』（共立出版，2010）を薦めたい．

2.4.2　関数の極限に関する基本定理の証明

$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて証明するのは以下の基本定理である：

$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ が有限な値 α, β に収束するとき

(1°)　$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = k\alpha$　　（k は定数），

(2°)　$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \alpha \pm \beta$　　（複号同順），

(3°)　$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) = \alpha\cdot\beta,$

(4°)　$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　$(g(x)\neq 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta \neq 0).$

(1°)　$\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha \Leftrightarrow kf(x) \to k\alpha\ (x \to \alpha)$ は‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が選べ，$0 < |x-a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ’[15) 16)] ……①° を意味する．その証明は $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) \to \alpha\ (x\to\alpha)$，つまり

> 任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ_1 が選べ，$0 < |x-a| < \delta_1$ となる実数 x に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon'$ が成り立つ ……①

から得られる（記号 ε' や δ_1 を用いたのは対応する ε や δ と必ずしも同じ値にならないようにするため）．

証明：①より $|kf(x)-k\alpha| = |k||f(x)-\alpha| < |k|\varepsilon'$（※ 極限を取らない有限の範囲で扱っているから，通常の定理が使えることに注意しよう）．したがって，‘任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ_1 が選べ，$0 < |x-a| < \delta_1$ となる実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha| < |k|\varepsilon'$ が成り立つ’が得られる．ここで，$\varepsilon = \varepsilon', \delta = \delta_1$ とおく，または $\varepsilon = \varepsilon'/|k|, \delta = \delta_1$ とおくと，①°と同値な結果が得られる．

---

15) 後半部分は $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |kf(x)-k\alpha| < \varepsilon$ と表せる．

16) ε については，任意に選んだ正数 ε の ε と $|kf(x)-k\alpha| < \varepsilon$ の ε は同一でなくてもよく，互いに他の正有限倍（よって共に（有限な！）正数）であればよいことに注意する．例えば，
‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が選べ，$0 < |x-a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha| < 2\varepsilon$ が成り立つ’とか
‘任意に選んだ正数 $\varepsilon/3$ に対して適当な正数 δ が選べ，$0 < |x-a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|kf(x)-k\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ’なども許される．

(2°)　$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\alpha\pm\beta$ の証明：$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ を‘任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ_2 が選べ，$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-\beta|<\varepsilon'$’……② と表すと

$$|(f(x)\pm g(x))-(\alpha\pm\beta)|=|(f(x)-\alpha)\pm(g(x)-\beta)|\leqq|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|$$

に注意して，①の δ_1 と②の δ_2 の小さい方を δ とすると‘任意の正数 ε' に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |(f(x)\pm g(x))-(\alpha\pm\beta)|<2\varepsilon'$’が成立する．これで (2°) は証明されたが，形式にこだわる人は $\varepsilon'=\varepsilon/2$ とおくとよい．

(3°)　$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$ の証明：①と②を用いると

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-\alpha\beta| &= |(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta)+\beta f(x)+\alpha g(x)-2\alpha\beta|\\ &= |(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta)+\beta(f(x)-\alpha)+\alpha(g(x)-\beta)|\\ &\leqq |f(x)-\alpha||g(x)-\beta|+|\beta||f(x)-\alpha|+|\alpha||g(x)-\beta|\\ &< \varepsilon'^2+|\beta|\varepsilon'+|\alpha|\varepsilon'\\ &= (\varepsilon'+|\beta|+|\alpha|)\varepsilon'\end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon'<1$ に選ぶと，

$$|f(x)g(x)-\alpha\beta|<(1+|\beta|+|\alpha|)\varepsilon'$$

が得られる．そこで，$\varepsilon=(1+|\beta|+|\alpha|)\varepsilon'$ として，①の δ_1 と②の δ_2 の大きくない方を δ とすると，‘任意の正数 $\varepsilon/(1+|\beta|+|\alpha|)<1$ に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)-\alpha\beta|<\varepsilon$’が得られる．したがって (3°) が証明された．

(4°) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ の証明：$\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\dfrac{1}{g(x)}$ のように，商は積の形に書ける．したがって，(3°) の積に関する定理を考慮すれば

$$g(x)\to\beta\ \ (x\to a)\ \Rightarrow\ \frac{1}{g(x)}\to\frac{1}{\beta}\ \ (x\to a)\quad(\beta\neq 0)$$

が示されれば (4°) は証明されたことになる．そこで，②を用いると

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right|=\left|\frac{\beta-g(x)}{\beta g(x)}\right|=\frac{|g(x)-\beta|}{|\beta||g(x)|}<\frac{\varepsilon'}{|\beta||g(x)|}$$

となるので，分母の $|g(x)|$ を条件 $|g(x)-\beta|<\varepsilon'$ の下で評価すればよい．

ここで不等式 $||x|-|y|| \leqq |x-y|$ および $|x-y|<z \Leftrightarrow -z<x-y<z$[17] を用いると，

$$||g(x)|-|\beta|| \leqq |g(x)-\beta| < \varepsilon'$$

だから，

$$-\varepsilon' < |g(x)|-|\beta| < \varepsilon' \Leftrightarrow |\beta|-\varepsilon' < |g(x)| < |\beta|+\varepsilon'$$

が得られる．これから，$\varepsilon' < |\beta|$ を満たす ε' を選んで，

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right| < \frac{\varepsilon'}{|\beta||g(x)|} < \frac{\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')}$$

と評価される．この結果と①，②から

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| &= \left|(f(x)-\alpha)\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{f(x)}{\beta}+\frac{\alpha}{g(x)}-2\frac{\alpha}{\beta}\right| \\
&= \left|(f(x)-\alpha)\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}(f(x)-\alpha)+\alpha\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right)\right| \\
&\leqq |f(x)-\alpha|\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right|+\frac{1}{|\beta|}|f(x)-\alpha|+|\alpha|\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right| \\
&< \varepsilon'\frac{\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')}+\frac{\varepsilon'}{|\beta|}+|\alpha|\frac{\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')} \\
&= \frac{(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')}
\end{aligned}$$

よって，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| < \frac{(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|-\varepsilon')} \quad (=\varepsilon\,(>0)\ \text{と置く})$$

が得られる．このとき，

$$\varepsilon' = \frac{|\beta|^2\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|(1+\varepsilon)} \quad (<|\beta|\ \text{に注意})$$

となるので，①と②および先に定めた δ より，‘任意の正数 $\frac{|\beta|^2\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|(1+\varepsilon)}$ $(<|\beta|)$ に対して適当な正数 δ が選べ，$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right|<\varepsilon$’ が得られる．したがって (4°) が証明された．

---

[17] 前者は x と y の正負に場合分けして調べる．x, y が同符号のとき $|x-y| = |\pm|x|-(\pm|y|)| = ||x|-|y||$．異符号のとき $|x-y| = |\pm|x|-(\mp|y|)| = ||x|+|y|| > ||x|-|y||$．少なくとも一方が 0 のとき等号成立．（※ $|a| \leqq |b|$ は $|a|<|b|$ または $|a|=|b|$ を意味する）．後者は，$x-y>0$ のとき $x-y<z$，$x-y<0$ のとき $-(x-y)<z \Leftrightarrow -z<x-y$．どちらの場合も $-z<x-y<z$ が成り立つ．

2.4.3　一様連続と一様収束

慎重に議論を進めたはずのコーシーが間違いを起こし，かつその後の解析学の発展に決定的な概念となった一様連続と一様収束を概観しておこう [18].

関数の極限の定義 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ において α を $f(a)$ で置き換えると関数の連続の定義になる（$f(a)$ は，もちろん，存在しなければばならない）:

> 区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ について，‘$f(x)$ が区間 I の点 a で連続 $(\lim_{x\to a} f(x)=f(a))$’とは‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し，$0<|x-a|<\delta$ となる全ての実数 $x\in I$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ’ことである.
>
> もし，関数 $f(x)$ が区間 I の各点 a で連続ならば，$f(x)$ は I 上で連続であるという．このとき $f(x)$ は 連続関数 と呼ばれる.

$f(x)$ が区間 I 上の連続関数のとき，I の各点 a で同一の ε を選ぶと，対応する δ の値は a に依存して変わる．$f(x)$ が極端な増（減）を示すところでは δ は極端に小さくする必要がある．そのことを区間 $I=(0,\infty)$ 上で定義した関数 $f(x)=1/x$ で例解しよう．今の場合，条件は

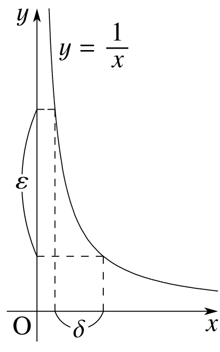
$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$$

であるが，$f(x)=1/x$ が単調関数なので，等式

$$|x-a|=\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\varepsilon$$

で調べることができる．これから $x=a\pm\delta$,

$$\left|\frac{a-x}{(a\pm\delta)a}\right|=\frac{\delta}{(a\pm\delta)a}=\varepsilon.$$



したがって

$$\delta=\frac{a^2\varepsilon}{1\mp a\varepsilon}$$

が得られる．これから，ε が正定数のとき，a が 0 に近づくとともに，δ はいくらでも小さくなっていき，最小の正数 δ はない.

---

[18] 歴史的発展の記述は，中根 美知代 著『$\varepsilon-\delta$ 論法とその形成』（共立出版，2010）が優れており，教育的配慮も深い力作である.

重要なのは，$f(x)$ が病的な増（減）をしない‘たちのよい’連続関数の場合であり，そのときは最小の δ が存在する．このことを区間 $I = [0, \infty)$ 上で定義された関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の場合に例解しよう．条件は

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$$

であるが，$f(x) = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ が単調に増加するので，今度は $a = 0$ がとれることに注意すると，先の例を参考にして，等式

$$x - a = \delta \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{a} = \varepsilon$$

で調べるのがよい．$x = a + \delta$, $\sqrt{a+\delta} - \sqrt{a} = \varepsilon$ より，$\delta = (2\sqrt{a} + \varepsilon)\varepsilon$ を得る．これより $a = 0$ のとき δ の最小値 ε^2 が得られるが，それは次のことを意味する：‘関数 $f(x) = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ については，任意に選んだ正数 ε に対して正数 $\delta = \varepsilon^2$ が選べ，$0 < |x-a| < \delta$ となる全ての実数 $x\,(\geqq 0)$ および $a\,(\geqq 0)$ に対して $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$ が成り立つ’．このように，単に関数が区間 I の全ての点で連続であるだけでなく，正数 ε を定めたとき，I の点に依らずに正数 δ が選べるとき，関数は区間 I 上で一様連続であると呼ばれる．一般には,

> ‘関数 $f(x)$ が区間 I 上で **一様連続** である’とは，‘任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が選べ，$0 < |x-a| < \delta$ となる全ての実数 $x, a \in I$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ’ことである．
> （δ は ε のみに依存し，x や a には依らない）．

コーシーによる関数の連続の定義は，区間の各点における連続ではなく，区間上における連続であった．また，彼の定義は，‘望むだけ小さくなる’**無限小**[19] という言葉をもちいて表現され [20]，明確な $\varepsilon - \delta$ 論法による表現

19) コーシーによる無限小の定義：‘変化する量が順にとる値が，限りなく減少し，与えられたどのような量よりも小さくなるとき，この変化する量は 無限小 あるいは 無限小量 と呼ばれる．この種の変化する量は 0 を極限としてもつ’．コーシー以前の数学者は，例えばオイラーは，無限小を“指定されたあらゆる量よりも小さい量であり，実質的には 0 である”と捉えるなど，無限小を変化する量として扱ってはいない．

20) コーシーによる関数の連続性の定義：‘変数 x に与えられた 2 つの点の間で，それぞれの x について，差 $f(x + \Delta x) - f(x)$ の値が Δx の値とともに減少するとき，関数 $f(x)$ は，この間で，この変数について連続といわれる．別の言葉でいえば，関数 $f(x)$ が与えられた端点の間で x について連続であるとは，変数の無限小の増加が関数それ自体の無限小の増加を常に作り出すことである’．上の Δx がコーシーの無限小である（コーシーの記号は α）.

ではなかったが，彼の無限小は変化する量として扱われ，それが故に極限や $\varepsilon-\delta$ 論法と結びついたのである．コーシーによる関数の区間上における連続の定義を $\varepsilon-\delta$ 論法で表してみよう：‘関数 $f(x)$ が区間 I 上で連続とは，小さい正数 ε に対して小さい正数 $\delta > |\varDelta x|$ が選べ，全ての $x,\ x+\varDelta x \in I$ に対して，$|f(x+\varDelta x)-f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことである’．この表現によると，δ は，ε には依存するが，$x,\ x+\varDelta x$ には依らず，一様連続の定義になっていることがわかる．コーシーは区間上における連続を考え，区間の各点における連続を考えることはなかった．区間上で定義される導関数 $f'(x) = \lim_{\varDelta x\to 0}\dfrac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$ はコーシーの手に成る．

コーシーは一様連続の問題よりずっと深刻な誤りを起こした．それは連続関数 $f_n(x)$[21] を一般項とする無限数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I 上で $f(x)$ に収束する ($\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$) とき，$f(x)$ は区間 I 上で連続関数になるか？という問題であった．彼の証明には誤りがあり，そして得られた結論 yes も誤りであった[22]．それには簡単な反例がある：関数列 $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ の各項 x^n は，閉区間 $[0,1]$ 上で連続な関数ではあるが，$x\neq 1$ のとき 0 に収束 ($\lim_{n\to\infty} x^n = 0\ (0 \leqq x < 1)$)，$x=1$ のとき 1 に収束する ($\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$)．したがって，極限関数 $\lim_{n\to\infty} x^n$ は区間 $[0,1]$ 上で連続関数にはならない．

彼の誤りは，例えば，関数列 $\{x^n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上で調べるとすぐわかる．今の場合，$\lim_{n\to\infty} x^n = 0\ (0 < x < 1)$ であるが，それを $\varepsilon-\delta$ 論法的にいうと，‘$\cdots\ n > N \Rightarrow\ |x^n - 0| < \varepsilon$’（$\varepsilon - N$ 論法 ☞p.72 の脚注）となる．$x^n < \varepsilon$ において両辺の対数をとると $n\log x < \log\varepsilon$ である．$0 < x < 1$ より $\log x < 0$ に注意すると，$n > \log\varepsilon/\log x$ が得られ，N は ε だけでなく，x にも依存する．$\lim_{x\to 1}\log x = 0$ だから，x が 1 に近づくにつれて，N は限りなく大きくする必要がある．したがって，最大の N は存在せず，x に依らない N を選ぶことはできない．コーシーは誤って‘選べる’とした．もし，そのことが可能な場合には関数列は一様収束するといわれる：

---

21) 当時は無限級数の収束性が問題として取り上げられ，$f_n(x)$ は，殆どの場合，連続関数 $u_n(x)$ を一般項とする数列 $\{u_n(x)\}$ の第 n 部分和：$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ とされた．

22) コーシーによる 無限級数と連続関数に関する誤った定理：‘数列 $\{u_n\}$ のそれぞれの項が同一の変数 x の関数で，この無限級数が収束するようなある点の付近で，この関数が変数 x について連続ならば，その和もまた，その点の付近で x の連続関数になる’．

関数の無限数列 $\{f_n(x)\}$ は区間 I の各点 x において関数 $f(x)$ に収束する ($\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$) とする．このとき‘$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に **一様収束** する’とは，‘任意に選んだ正数 ε に対して，$x \in I$ に依らない自然数 N が存在し，$n > N$ となる全ての自然数 n に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が全ての $x \in I$ で成り立つ’ことである．

一様収束性を考慮すると，コーシーの誤りを正した定理が得られる：

関数列 $\{f_n(x)\}$ の各項 $f_n(x)$ は区間 I 上で連続とする．このとき，$\{f_n(x)\}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ も I 上で連続である．

以下，この定理を証明して §2.4 を終えよう．区間 I の任意の点を a とするとき，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を示せば済む．証明のヒントは

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|.$$

まず，$\{f_n(x)\}$ の一様収束性より，任意の正数 ε' に対して，（ε' には依存するが）区間 I の点には依らない N が選べ，区間 I の任意の点 x, a に対して

$$n > N \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon',\ |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon'$$

が成り立つ（※ ここが一様収束！）．次に，全ての n に対して $f_n(x)$ は連続関数であるから，$f_n(x)$ は区間 I の任意の点 a において連続である．したがって，$\varepsilon - \delta$ 論法による連続性の定義より，上で与えた正数 ε' に対して，一般には ε' と a に依存する正数 $\delta(a)$ が選べ

$$0 < |x - a| < \delta(a) \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon'$$

が成り立つ．これらから，$n > N$ および $0 < |x - a| < \delta(a)$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< 3\varepsilon' \end{aligned}$$

となる．したがって，任意に選んだ $\varepsilon/3$ に対し，区間 I の任意の点 a で適当な正数 $\delta(a)$ が選べ

$$0 < |x - a| < \delta(a) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$f(x)$ は区間 I の任意の点 a で連続，つまり $f(x)$ は区間 I 上で連続関数になる．（証明終）