§2.2　微積分記号 d と $\int$ — 微積分学の基本定理の起源

ライプニッツ（1646〜1716）は 17 才のときイェーナ大学で高度な数学に触れ，そしてそこで受けた講義に強い影響を受けて，生涯にわたって普遍学—哲学や思想のあらゆる認識を公理から記号的演算によって演繹的に導こうという企て—を追求することになった（☞ p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』§12.6）．数学における記号の重視もその一環であった．彼の構想は，数学の分野で，20 世紀の公理論としてようやく完成した．

ライプニッツの微分積分学が生まれるための着想は，**数列**[5)]の和と差に関する逆の関係に基づくものであった．数列 $\{a_n\}$ の**階差** $b_n = a_{n+1} - a_n$ から始めよう（☞ p.16 の脚注『高校数学＋α』§§11.1.3）（ここでは $\{a_n\}$ の階差を $\varDelta a_n$ と書く）．数列 $\{a_n\}$ の和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

に対して，その階差 $\varDelta a_n = a_{n+1} - a_n$ からなる階差数列 $\{\varDelta a_n\}$ の和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \varDelta a_k &= \varDelta a_1 + \varDelta a_2 + \cdots + \varDelta a_{n-1} \qquad\qquad (n \geqq 2)\\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})\\ &= a_n - a_1\end{aligned}$$

は数列 $\{a_n\}$ の第 n 項と初項との差に等しい[6)]．同様に，数列 $\{a_n\}$ の項の和からなる数列 $\{s_n\}$=$\{\sum_{k=1}^{n-1} a_k\}$ に対して，階差 $\varDelta s_n = s_{n+1} - s_n$：

$$\varDelta s_n = \varDelta \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$$

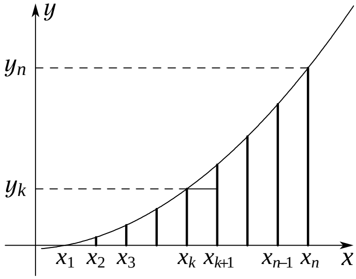
は元の数列 $\{a_n\}$ の項を与える．$a_1 = 0$ のとき，$\varDelta \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varDelta a_k = a_n$ が成り立つことに注意しよう．

---

5) $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ のように，番号を付けた数の並びを数列といい，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または簡単に $\{a_n\}$ で表す．それぞれの数を **項**，初めの項を**初項**，n 番目の項を**第 n 項**という．

6) 階差の威力を確認しておこう．例えば，数列 $\{a_n\}$=$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ は $a_n = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ だから，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$



ライプニッツはこのような関係を xy 平面上の曲線に対して拡張することを試みた．区間 $[x_1, x_n]$ を多くの区間に分割し, 分点 x_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ に対応する曲線の y 座標を y_k とする．分割間隔 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ は一定でなくともよい．こうして，数列 $\{y_k\}$ が得られる．$\sum_{k=1}^{n-1}$ を $\sum$ と略記すると，$y_1 = 0$ のとき，先の階差の議論と同様にして $\sum \Delta y_k = y_n$，$\Delta \sum y_k = y_n$ が得られ，両者は一致する．

さらに, ライプニッツは分割点 x_k を無数に多くとり, 分割間隔 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ が無限小 dx となる場合の議論を試みた．このとき，階差 $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ も無限小 dy となり，$\sum \Delta y_k = y_n$ において y_n を y と書き，無限個の和 (Sum) を表す場合に記号 $\sum$ を $\int$ で表すと，$\int dy = y$ となる．このとき，$\Delta \sum y_k = y_n$ は，形式的には，$d \int y = y$ を与えるので，$\int dy = d \int y = y$ となる．しかしながら，$\int y = \sum_{k=1}^{n-1} y_k$ は無数の有限な y_k の和であるから，それが有限になることはまず無い．つまり，$\int y$ は，無限大になって，そもそも定義できない．そこで，ライプニッツは有限な $y\,(= y_k)$ を無限小の面積 $y\,dx\,(= y_k \Delta x_k)$（高さが y_k，幅が無限小である $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ の長方形）にとり替えた．このようにして，$\int y\,dx\,(= \sum_{k=1}^{n-1} y_k \Delta x_k)$ は区間 $[x_1, x_n]$ における曲線と x 軸の間の面積[7] と解釈できる．このとき，$d \int y\,dx = y\,dx$（$\Delta \sum_{k=1}^{n-1} y_k \Delta x_k = y_n \Delta x_n$．$\Delta x_n = \Delta x_{n-1}$ とする）は全体の図形の面積から右端にある無限に細い長方形の面積を取り出すことを意味する．関係式 $d \int y\,dx = y\,dx$ は，現在の数学では，両辺を dx で割って無限小量が顕わには現れないよう

$$\frac{d}{dx} \int y\,dx = y$$

のように表され，**微分積分学の基本定理** と呼ばれている．

$\{x_k\}$ や $\{y_k\}$ の階差 Δx_k，Δy_k から得られた無限小量 dx，dy はまさに **微分** と呼ばれるものである．一方，無限個の和を表す意味で導入された記号 $\int$ は Sum の頭文字から得られ，**積分記号** といわれる．

---

[7] 曲線が x 軸より上にあるときは面積であるが，部分的にでも下にあるときは，文字通りの面積とは解釈できず，**積分値** と呼ばれる．