第 2 章　微分・積分の基礎

　数学が最も重要な基礎学問であると認識されるようになったのは，自然の法則が微分を用いて表現され，自然の現象が積分を用いて予知され，それらが物理学・化学を筆頭とする自然科学に応用されて産業革命が起こり，我々が豊かな生活を送れるようになったからである．この章では，微分・積分学の歴史的背景を見ながら，それらの基礎を学ぼう．

§2.1　消滅してゆく量の最後の比 ― 無限小から極限へ

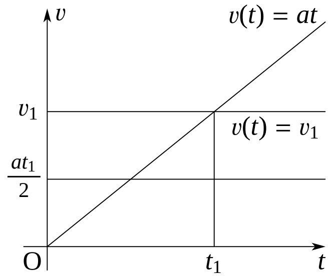
　ニュートン（1642～1727）がケンブリッジ大学で学位を得た 1665 年にペストが大流行して大学が閉鎖された．故郷に疎開した 1 年半の間にニュートンは研究・思索に没頭し，微積分学を構築し，万有引力を発見した．彼は，物体の運動つまり対象とする量が時間に依存する場合の研究に着手し，無限小の手法を駆使して壮大な仕事をなしとげた．無限小については，円の式を用いた場合に既に解説した（☞ p.44）．ここでは，ニュートンが無限小を幾何学的に利用して，万有引力の逆 2 乗法則を導いた例（円運動の場合）を見てみよう．

　先ずは準備から．コペルニクスによる地動説はガリレオ（Galileo Galilei, 1564 年～1642，イタリア）によって 1610 年頃から強力に推進され，1618 年には **ケプラーの 3 法則** が揃った：

第 1 法則　惑星の軌道は，太陽を 1 つの焦点とする楕円である．

第 2 法則　惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は，一定である．

第 3 法則　惑星の公転周期の 2 乗は，楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する．



また，瞬間速度や等加速度運動の概念は既に中世の時代から知られていた（☞ p.30）．物体の速度 $v(t)$ が時間 t に依らずに一定 v_1 のとき，その移動距離 $x(t)$ は $x(t) = v_1 t$ で表されるが，物体が等加速度運動 $v(t) = at$（a は等加速度を表す定数）をするときは，ガリレオが示したように初速が 0 のとき $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ で表される[1)]．

1687 年，ニュートンは『プリンキピア（自然哲学の数学的諸原理）』[2)] を著し，運動の 3 つの基本法則を述べた：

運動の第 1 法則（慣性の法則）　すべての物体は，加えられた力によってその状態が変化させられない限り，静止あるいは 1 直線上の等速運動の状態を続ける．

運動の第 2 法則　運動の量（＝質量 m ×速度 $\vec{v}$）の変化は，加えられた力 $\vec{F}$ に比例し，その力の方向を向く．（$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$）

運動の第 3 法則（作用反作用の法則）　すべての作用（＝力）に対して，それと大きさが等しく反対向きの反作用が存在する．すなわち，2 つの物体の間で互いに働きあう相互作用は常に大きさが等しく，反対方向を向く．

万有引力は質量のある物体間に働く，それらの距離の 2 乗に反比例する，引力である．整理すると，質量が m と M，距離が r の 2 つの物体に働く引力の大きさ F は

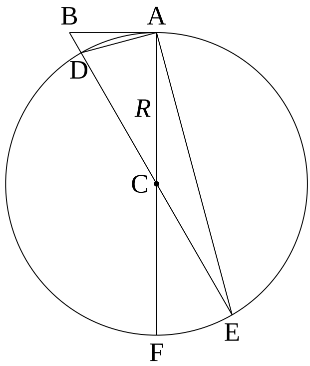
$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad (G\text{ は定数})$$

と表される．万有引力と運動の 3 法則からケプラーの 3 法則が導かれ，また逆に，ケプラーの 3 法則と運動の 3 法則から万有引力が導かれる．楕円の場合は複雑になるため，我々は円軌道（円は特別な楕円）の場合にケプラーの第 3 法則から引力の逆 2 乗法則 $F \propto r^{-2}$ を導くことを試みよう．

---

1) 時間 t_1 までの移動距離 $x(t_1)$ を考える．$0 \leqq t \leqq t_1$ のとき，$v(t)+v(t_1-t) = at+a(t_1-t) = at_1$ と一定になるので，$0 \leqq t \leqq t_1$ の平均速度は $\frac{at_1}{2}$．よって移動距離は $x(t_1) = \frac{at_1}{2}t_1 = \frac{1}{2}at_1^2$.

2) 『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義』（中村誠太郎 監訳，講談社）．
和田純夫 著『プリンキピアを読む』（ブルーバックス，講談社）．



地球 A が太陽 C の周りを回る公転軌道はほとんど円に近い楕円である．ここでは簡単のために，円軌道としよう．また，万有引力が太陽と地球の距離 R にのみ依存する中心力であると仮定しよう．ニュートンはその距離 R がそれらの重心 A と C の間の距離 AC であることを証明した．円運動の場合であるから，地球 A は太陽 C を中心とする半径 R の円周上を等速 v で周回する．公転周期（1 周する時間）を T とすると $vT = 2\pi R$ である．地球 A が微小な円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ を移動するのに要する微小時間を $\varDelta t$ とすると $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} = v\varDelta t$ である．微小時間 $\varDelta t$ は，『プリンキピア』においては無限小量 o（☞ p.44）と考える必要は必ずしもなく，極限操作によって 0 に近づく量である．

さて，運動の第 2 法則より，万有引力 $\overrightarrow{F}$ は地球の **加速度** $\overrightarrow{a}$（速度の変化率）に比例するから，距離が一定な円周上では，万有引力の大きさ F および中心 C に向かう地球の加速度の大きさ a は一定で，$a \propto F$ である．地球が微小時間 $\varDelta t$ に微小な円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ を移動することについて，ニュートンの解説は独創性に溢れている．すなわち，地球 A は，慣性の法則によって軌道の接線方向 AB（AB⊥AC）に飛んでいこうとする（中心 C 方向への初速は 0）が，しかしながら，万有引力によって B から D まで引かれる（落下する）（その結果，軌道上の等速運動が残る）．したがって，落下距離 BD は前ページのガリレオの公式をもちいて $\mathrm{BD} = \frac{1}{2}a(\varDelta t)^2$ と表される．等式 $\mathrm{BD} = \frac{1}{2}a(\varDelta t)^2$ は厳密には $\varDelta t$ が瞬間（＝無限小時間）の場合に成り立つ近似式である．以下，『プリンキピア』的正当化を見よう．

$\frac{1}{2}a(\varDelta t)^2 = \mathrm{BD}$ における加速度の大きさ a が万有引力の大きさ F に比例することに着目し，$\varDelta t \to 0$ のとき $a \propto R^{-2}$，したがって，$F \propto R^{-2}$ を導こう．まず，$vT = 2\pi R$ と $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} = v\varDelta t$ から v を消去すると，$\varDelta t = T \cdot \overset{\frown}{\mathrm{AD}}/(2\pi R)$．これを $\frac{1}{2}a(\varDelta t)^2 = \mathrm{BD}$ に代入すると，

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{T \cdot \overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{2\pi R}\right)^2 = \mathrm{BD}.$$

BD については，$\angle\mathrm{CAB} = \angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{R}$ より，$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{CAE} = \angle\mathrm{BAD}$ だから（※ $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{EBA}$），$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{EBA}$．したがって，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}, \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}}.$$

上の第 1 式を用いて，

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{T\cdot\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{2\pi R}\right)^2 = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}}, \quad \text{よって} \quad a\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AD}} = \frac{8\pi^2R^2}{T^2\mathrm{AE}}$$

が得られる．ここで，A を固定して，$\varDelta t \to 0$ の極限，したがって D→A，B→A および E→F の極限を考える．ここで，$\mathrm{AD} < \overset{\frown}{\mathrm{AD}} < \mathrm{AB}$[3] に注意すると，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} < \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB}} < 1 < \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AD}} < \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$$

だから，$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}} \to \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AF}} = 1$ を用いると極限値が求まる：

$$a = \frac{8\pi^2R^2}{T^2\cdot 2R} = \frac{4\pi^2R}{T^2}.$$

ニュートンは $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ のように $\frac{0}{0}$ の形の極限を持つような場合を『プリンキピア』の中で“ 消滅してゆく量の最後の比 ”と呼んだ．結局，$\frac{1}{2}a(\varDelta t)^2 = \mathrm{BD}$ のように $\varDelta t$ が無限小のときに成り立つ関係は，$a = \frac{2\mathrm{BD}}{(\varDelta t)^2}$ と消滅してゆく量の比をとり，“ 最後の比 ” $\displaystyle\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{2\mathrm{BD}}{(\varDelta t)^2}$（比の **極限値** ）を求めるのが正しい処方であった[4]．

最後に，ケプラーの第 3 法則 $T^2 \propto R^3$ を用いると

$$a \propto \frac{4\pi^2R}{R^3} \propto R^{-2}.$$

したがって，万有引力の逆 2 乗法則 $F \propto R^{-2}$ が成り立つ．

---

[3] $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} < \mathrm{AB}$ は扇形 $\mathrm{C}\overset{\frown}{\mathrm{AD}} < \triangle\mathrm{CAB}$ つまり $\pi R^2\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{2\pi R} < \frac{1}{2}R\cdot\mathrm{AB}$ より得られる．

[4] 関数 $f(x)$ について，x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が α に限りなく近づくならば，$f(x)$ は極限値 α に収束するといい，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ または $f(x) \to \alpha$ $(x \to a)$ と表す．一般に，$\alpha = f(a)$ とは限らず，さらに $f(a)$ が存在しない場合もあることに注意しておこう．例：$f(x) = x/x$，$a = 0$．