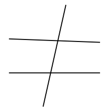
1.4.4　公理化 ― 数学の抽象化・形式化

証明を可能とする論証という形式を数学が確立したのは 2300 年も前のユークリッドの『原論』（☞ p.6）においてであった．そこにおいて，既に，定義や公理（公準を含む）などの数学の基礎概念が確立していて，論理的に厳密な演繹にしたがって証明がなされていた．公理や公準（☞ p.7）は，ごく自然に，最も基本的で‘証明の必要がない，明白な真実’と考えられていた．ただし，いわゆる第 5 公準（下に再掲）は，見るからに冗長だったので，他の公理・公準に比べて自明性は低いと考えられ，もしかしたら他の公理・公準から証明されるべき定理ではないかとの疑念が生じた：

> 一直線が二直線に交わり，同じ側の内角の和が二直角より小ならば，この二直線は，限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側において交わること．



この公準は，命題「1 直線上に無い 1 点を通ってこの直線に平行な直線はただ 1 本ある」を意意味する[50]ので，「平行線公準」と呼ばれ，以後，この公準の証明が古代から数多く試みられた．

しかしながら，その全てが失敗に終わり，ようやく最終決着が見られたのは 19 世紀前半の東ヨーロッパに革命的数学者が現れてからのことである．ロシアの ロバチェフスキー（Nikolai I. Lobachevsky，1792～1856）とハンガリーのボヤイ（János Bolyai，1802～1860）は，独立に，‘平行線は 2 本以上引ける’という第 5 公準に替わる公理から出発して新しい幾何学を矛盾無く構成できることを示した．「非ユークリッド幾何学」である．さらに，19 世紀を代表する数学者 **リーマン**（Georg Riemann，1826～1866，ドイツ）は，種々の曲がった（n 次元）空間を包括的に研究し，空間の曲がりの度合（曲率という）は局所的な最短距離によって特徴づけられることを示し，幾何学の新しい一般的な体系を開拓した．引き続く研究によって，平行線の本数（1 本・2 本以上・無し）を

50) 第 5 公準は「2 直線を延長してどちらの側でも交わらないためには，どちらの同じ側の角の和も 2 直角より小さくない」ことを示している．このとき，両側の角の和全体は $2+2=4$ 直角なので，上の‘2 直角より小さくない’は‘2 直角である’に制限される．このことは，‘1 直線上に無い 1 点を通る直線のなかでこの‘2 直角条件’を満たすものはただ 1 本のみで，それが平行線である’ことを意味する．

公理とする各幾何学とその空間の曲率との関係（それぞれ，0・負・正）が明らかになった．リーマンの幾何学は，20 世紀初頭に，テンソル[51)] を用いた定式化が完成し，その数学を天才 アインシュタイン が「一般相対性理論」を構築する際に用いた．

以上の歴史的経緯を経て，人々が公理に抱いていた‘ 自明な真実 ’という確信は消え失せ,“ 公理とは，演繹的に理論を展開する科学において，証明なしに導入される最も基本的な仮定（前提・命題）である ”と考えられるようになっていった．演繹における公理の役割が検証され，導入した一連の公理（**公理系**という）に対しては，それらだけを用いて成立すべき命題（定理）が証明されることや内部矛盾を含まないことが求められた．実は，ユークリッド『原論』においては,‘ 円の内部の点を通る直線は円周と 2 点において必ず交わる ’ことが暗黙に仮定されている．これは直観的には当然であり，また正しい命題であるが,『原論』の公理・公準のみからは証明できない.『原論』は公理に基づいて数学を展開する立場としては不十分なのである．

20 世紀数学の礎を築いた **ヒルベルト**（David Hilbert，1862〜1943，ドイツ）は，ユークリッド『原論』が抱える論理的欠陥の完全なる払拭を決意し，20 世紀直前の 1889 年,『幾何学基礎論』を著した．それは公理系のみに基づいて幾何学の完全なる演繹的構築を行う意図のもとに書かれ，5 つの公理群からなる．各公理群は，I 結合の公理 (I_{1-8})，II 順序の公理 (II_{1-4})，III 合同の公理 (III_{1-5})，IV 平行線の公理 (IV_1)，V 連続性の公理 (V_1) と名付けられている．ここで，点，直線，平面の間の結びつきを表し，8 公理 I_1〜I_8 からなる 結合の公理群 を見てみよう．

I　結合の公理

I_1　任意の 2 点 A, B に対して，それらを通る直線 ℓ が存在する．

I_2　異なる 2 点 A, B に対して，それらを通る直線はただ 1 つしかない．

I_3　1 直線上には，少なくとも，異なる 2 点が存在する．1 直線上にない，少なくとも，3 点が存在する．

---

51) 粗っぽくいうと，ベクトル A_i や行列 A_{ij} を一般化した添え字付きの量 $A_{ijk\cdots l}$ のこと．添え字が n 個あるものが n 階のテンソルである ($n = 0, 1, 2, \cdots$)．添え字は上付きのもの $A^{ijk\cdots l}$ やそれらを混合したもの $A^{ij\cdots k}_{lm\cdots n}$ もあり，いくつかの制約条件を満たす．

I_4 1 直線上にない 3 点 A, B, C に対して，それらを含む（がその上にある）平面 α が存在する．平面上には少なくとも 1 点が存在する．

I_5 1 直線上にない 3 点 A, B, C を含む平面はただ 1 つしかない．

I_6 直線 ℓ 上の異なる 2 点 A, B が平面 α 上にあるならば，直線 ℓ は（直線 ℓ 上の全ての点は）α 上にある．

I_7 点 A が 2 平面 α, β の両面上にあるならば，A の他に少なくとも 1 つ，それら両面上にある点が存在する．

I_8 1 つの平面上にない少なくとも 4 点が存在する．

どれも正に当たり前の仮定（命題）であることが見て取れるであろう[52)]．ヒルベルトは，この公理系が内部矛盾を含まない，つまりこの公理系からある命題とその否定命題が共に証明されることがないこと（無矛盾性），各々の公理が他の公理からは導かれないこと（独立性），知られる限りの正しい命題（定理）がこの公理系で実際に証明可能であること（完全性）など，公理系が満たすべき必須条件を慎重に吟味している．独立性についていえば，例えば，平行線公理の替わりに‘平行線は 2 本はある’という公理を用いると，奇妙ではあるが

---

52) 残りの公理群も載せておきましょう．（☞ 『岩波 数学事典』（日本数学会 編，岩波書店）．D. ヒルベルト 著『幾何学基礎論』（中村幸四郎 訳，ちくま学芸文庫））．

II　順序の公理

II_1 B が A, C の間にあるというとき，A, B, C は 1 直線上の相異なる 3 点であって，そのとき B は C, A の間にもある．

II_2 直線 ℓ 上の異なる 2 点 A, C に対して，ℓ 上に点 B を見出して，C は A, B の間にあるようにできる．

II_3 B が A, C の間にあれば，A が B, C の間にあることはない．

定義：異なる 2 点 A, B の組を線分とよび，AB または BA で表す．A, B を通る直線上の点に関して，A, B の間にある点を線分 AB の内点，A と B を AB の端点，それ以外の点を AB の外点という．

II_4 （パシュの公理）A, B, C を 1 直線上にない 3 点とし，平面 ABC 上にあって，点 A, B, C のいずれをも通らない直線を ℓ とする．ℓ が線分 AB の 1 つの内点を通過するならば，ℓ は線分 BC または CA の内点の 1 つを通る．

定義：ℓ を平面 α 上の 1 直線とし，A, B を ℓ 上にない α 上の 2 点とする．A=B または線分 AB の内点に ℓ の点がないとき，A, B は α 上で ℓ に関して‘同じ側’にあるといい，内点に ℓ の点があるときは‘異なる側’(反対側）にあるという．α 上で ℓ に関して A と同じ側にある点の全体および異なる側にある点の全体を，ℓ を‘境界’とし，平面 α に属する‘半平面’という．

内部矛盾のない非ユークリッド幾何学が得られる．このことは，もし平行線公理が他の公理から導かれるとすると，‘ 平行線は 1 本だけある かつ 2 本はある ’ という公理の設定になって必ず矛盾が出てくるはずだから，そうでなかったことは平行線公理が他の公理とは独立なことを意味する．完全性については，1 つの公理を外すと証明可能な命題が減って意味の無い公理系になり，独

III　合同の公理

定義：直線 ℓ 上に 1 点 O および O と異なる 2 点 A, B をとるとき，A=B または O が線分 AB の外点ならば A, B は O に関して ‘ 同じ側 ’ にあるといい，内点ならば A, B は O に関して ‘ 異なる側 ’ にあるという．直線 ℓ 上の点で，O に関して A と同じ側にある点全体を，ℓ に属し，O を端点とする（O から出る）A と同じ側の半直線という．

III_1　A, B を直線 ℓ 上の異なる 2 点，A′ を直線 ℓ' 上の 1 点とする．直線 ℓ' 上の A′ に関して一方の側にただ 1 点 B′ が存在して，線分 AB と線分 A′B′ の間に AB≡A′B′（AB は A′B′ に合同である）とすることができる．

III_2　AB≡A′B′，AB≡A″B″ ならば A′B′≡A″B″．

III_3　A, B, C は直線 ℓ 上の 3 点で B は A, C の間にあり，A′, B′, C′ は直線 ℓ' 上の 3 点で B′ は A′, C′ の間にあり，かつ AB≡A′B′，BC≡B′C′ ならば AC≡A′C′．

定義：ℓ_h, m_h を 1 点 O から出て，異なる直線 ℓ, m のそれぞれに属し，O を含む平面 α 上にある半直線とする．このような 2 つの半直線の組を平面 α の ‘ 角 ’ といい，$\angle(\ell_h, m_h)$ または $\angle(m_h, \ell_h)$ で表す．ℓ_h, m_h 上にそれぞれ点 A, B があるとき，$\angle(m_h, \ell_h)$ を ∠AOB と表す．ℓ_h, m_h をこの角の ‘ 辺 ’，O をこの角の ‘ 頂点 ’ という．また，α に属し，m を境界とし ℓ_h の点と同じ側にある半平面と，ℓ を境界とし m_h の点と同じ側にある半平面との共通部分を角 $\angle(\ell_h, m_h)$ の ‘ 内部 ’ といい，α 上の点で，$\angle(\ell_h, m_h)$ の内部になく，その頂点でもなく，辺の上にもないものの全体をこの角の ‘ 外部 ’ という．

III_4　$\angle(\ell_h, m_h)$ を平面 α 上の角とし，ℓ' は平面 α' 上の直線とする．O′ を ℓ' 上の 1 点，O′ を出て ℓ' に属する 1 つの半直線を ℓ'_h，ℓ' を境界とし α' に属する 1 つの半平面を α'_h とする．このとき，α'_h 上に半直線 m'_h を求めて，$\angle(\ell_h, m_h) \equiv \angle(\ell'_h, m'_h)$ とすることができ，かつこのような m'_h はただ 1 つ存在する．

III_5　A, B, C および A′, B′, C′ がそれぞれ 1 直線上にない 3 点であるとき，AB≡A′B′，AC≡A′C′，∠BAC ≡ ∠B′A′C′ ならば ∠ABC ≡ ∠A′B′C′．

IV　平行線の公理

IV_1　ℓ を任意の直線，A をその直線外の点とする．この場合，直線 ℓ と点 A によって決まる平面上に，点 A を通り直線 ℓ と交わらない直線は高々 1 つ存在する．

V　連続性の公理（☞ パガレロフ 著『幾何学の基礎』（垣田高夫 他訳，内田老鶴圃 新社））

定義：1 直線上の点に対して向きをつける．A<B は点 A が点 B の ‘ 左 ’ にあること，A>B は A が B の ‘ 右 ’ にあることとする．公理 II 群から次の定理が得られる．以下，A<B とする．C が A, B の間にあるとき A<C<B，B の右にあるとき A<B<C．A<B (<C) のとき，B<A (<C) となることはない．

V_1　（デデキントの公理）1 直線上の点を，空でない 2 つの組に分け，第 1 の組の全ての点が第 2 の組のどの点よりも左にあるとする．このとき，‘ 第 1 の組において最も右にある点が存在する ’ か，‘ 第 2 の組において最も左にある点が存在する ’ かのいずれかである．

立した公理を加えると，条件がきつくなりすぎて，互いに矛盾する命題が証明されてしまうので，完全性と無矛盾性は密接に関係している．公理系は，一般に，完全性を満たすべく，ぎりぎり多くの公理群を動員して構成されるため，無矛盾性の検証が最も重要になる．ヒルベルトは，実数によって座標を構成する解析幾何を用いて，彼の公理系を「実数論」に翻訳し，実数論が無矛盾であれば『幾何学基礎論』の公理系も無矛盾であることを示した．

さて，本題に入ろう．I 結合の公理では点・直線・平面が出てくるが，その定義の文が見あたらない．ユークリッド『原論』が定義：‘ 点とは部分をもたないものである ’ から始まるのとは大違いである．ヒルベルトは友人の数学者と酒場でビールを飲みながら，“ 点・直線・平面はテーブル・椅子・ビールジョッキに置き換えられる ” といったそうである．このことは次のことを意味する：点・直線・平面は公理で定められたそれらの間の結合（関係）が全てであり，それらに別の名（例えば，T・C・H）を用いても，演繹は実行されて T・C・H についての定理が得られ，それは点・直線・平面が満たす定理になる．

確かめてみよう．定理 1：‘ 異なる 2 つの C（直線）は 1 つより多くの共通の T（点）をもたない ’ を ‘ 異なる 2 つの T が異なる 2 つの C ℓ, m の上にあることはない ’ と同値な表現をしておく．すると，I_2：‘ 異なる 2 つの T に対して，それらを通る C はただ 1 つしかない ’ より，C ℓ と C m は一致して，上の定理が得られる．

もう 1 題．定理 2：‘ 異なる 2 つの H（平面）α, β が共通の T（点）を含むならば，α, β は共通の C（直線）を含む ’ を示そう．まず，I_7：‘ T A が 2 つの H α, β の両 H 上にあるならば，A の他に少なくとも 1 つ，それら両 H 上にある T B が存在する ’．次に，I_2：‘ 異なる 2 つの T A, B に対して，それらを通る C ℓ はただ 1 つしかない ’．ここで，I_6：‘ C ℓ 上の異なる 2 つの T A, B が H α 上にあるならば，C ℓ は α 上にある ’．もう 1 回，I_6：‘ C ℓ 上の異なる 2 つの T A, B が H β 上にあるならば，C ℓ は β 上にある ’．したがって，C ℓ は 2 つの H α と β に共通の C である．これで定理 2 が得られた．つまり，公理を $\mathrm{I}_7, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_6, \mathrm{I}_6$ の順で並べると定理 2 が得られたことになる．

以上のように，各公理において，同値な表現を用いたり，T・C・H（点・直線・平面）に具体名（A, B, $\cdots$・$\ell, m, \cdots$・$\alpha, \beta, \cdots$）を挿入したりして，各公理を並

べていくと，あたかも音符を五線譜に並べると楽曲ができるかのように，定理が製造されるというわけである．他の公理群についても同様である．

ヒルベルトは，点・直線・平面などの基本的対象だけでなく，‘ 存在する ’・‘ 間にある ’・‘ 合同である ’ といった基本的関係を「基本概念」と考えて，それらに直接的な定義を与えず，基本概念は，その公理系の中で，それらが満たすべき条件によって間接的に定義されていると考えた．そのような基本的用語は「無定義用語」と呼ばれる．また，ヒルベルトは，公理が ‘ 理論の前提としての単なる仮定 ’ であることを明確に掲げ，理論はこのような公理系だけに基づいて演繹的に構築されるべきとする立場を打ち出した．現在 **公理主義** と呼ばれる立場である．

公理主義を貫くには，公理や演繹に用いられる言葉も，日本語や英語のような曖昧さを残す自然言語ではなく，人工的な ‘ 数学言語 ’ を必要とした．それは，四則演算に使われる記号の他に集合（☞ p.48）や 関数（写像）の記号，および演繹を誤りなく進めるための 命題論理 や 述語論理 と呼ばれる一連の記号からなる．**命題** は ‘ 真偽を定められる主張 ’ を意味し，数学では記号 P, Q などで表現されることが多い．命題 P, Q に対して，$P \wedge Q$ は命題「P かつ Q」を表し，$P \vee Q$ は「P と Q の少なくとも一方」の意味で「P または Q」を表す．また，記号 $\Rightarrow$（ならば）や $\neg$（〜でない）も頻繁に用いられる．例えば,「僕は君が好き」を P,「君は僕が好き」を Q とすると,「僕は君に片思い」は $P \wedge \neg Q$ となる．$P \vee Q$ は「僕と君は片思いか相思相愛」に注意する．変数を含む命題，例えば $P(n)$:「n は素数である」は変数に代入する値に応じて真偽が定まる命題である：$P(3)$ は真，$P(4)$ は偽．このような命題は演繹を行うときに重要で，**存在記号** $\exists$（〜が存在する）や **全称記号** $\forall$（全ての〜，任意の〜，どんな〜）などと共によく用いられる．例えば，m, n を自然数として $P(m, n)$: $m < n$ のとき，$\exists n P(5, n)$ は $\exists n(5 < n)$:「5 より大きい自然数 n が存在する」を表す．$\forall m(\exists n(m < n))$（どんな自然数 m に対しても，$m < n$ を満たす自然数 n が存在する）は「自然数は限りなく続く」の ‘ 数学語 ’ 表現である．このような言語武装のもとで，公理系の無矛盾性を検証する試みが推し進められた[53)]．

53) 残念ながら 1931 年,「公理系ーその内部に自然数論の公理系を含むーは，その中で自分自身の無矛盾性を証明できない」という定理がゲーデル（Kurt Gödel，1906〜1978，チェコ）によって証明された．

公理主義の立場が主流になると，当然のことながら，実数も公理系によって定義することが試みられた．その公理系に対しては，考察の対象 a が満たすべき条件が与えられて，a が実数であるための必要かつ十分な性質を満たすこと，全ての実数が考察の対象であること，および無矛盾で完全なことなどが求められた．そのような公理系は**体**と呼ばれる集合によって‘実数全体を間接的に定義’した．

集合 $\mathbb{R}$ の要素（元）が以下の公理（法則）を満たすとき $\mathbb{R}$ を実数体という．

I. 四則演算の公理

i) $x, y \in \mathbb{R}$（$\mathbb{R}$ の要素 x, y）に対して，和 $x + y \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まり，次の法則をみたす．

$$x + y = y + x, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z). \qquad \text{（結合法則）}$$

また，特別な要素 $0 \in \mathbb{R}$ が存在して，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x + 0 = x. \qquad \text{（0 の存在）}$$

更に，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$-x \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ存在して

$$x + (-x) = 0. \qquad \text{（加法の逆元の存在）}$$

※ $x + (-y)$ を $x - y$ と書く（減法の定義）．

ii) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，積 $xy \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まり，次の法則をみたす．

$$xy = yx, \qquad \text{（交換法則）}$$

$$(xy)z = x(yz), \qquad \text{（結合法則）}$$

$$(x + y)z = xz + yz. \qquad \text{（分配法則）}$$

また，特別な要素 $1 \in \mathbb{R}$ が存在して，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$1x = x. \qquad \text{（1 の存在）}$$

更に，$x \neq 0\,(x \in \mathbb{R})$ に対して，$1/x \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ存在して

$$x(1/x) = 1. \qquad \text{（乗法の逆元の存在）}$$

※ $x(1/y)$ を x/y と書く（除法の定義）．

※ 以上から，$\mathbb{R}$ は，0 による除法を除いて，加減乗除の四則演算が定義される集合になる．このような集合を 体 という．

II. 順序（大小）に関する公理

i) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，次の 1 つだけが成り立つ．

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y. \qquad \text{（全順序性）}$$

※ $x < y$ は $y > x$ とも書く．

$x < y$ または $x = y$ のとき $x \leqq y$ と書き，次が成り立つ．

$$x \leqq y \text{ かつ } y \leqq z \text{ ならば } x \leqq z. \qquad \text{（推移法則）}$$

※ 等号成立 $x = z$ は ‘ $x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$ ’ の場合のみ．

※ $x \leqq y$ かつ $y < z$ ならば $x < z$，$x < y$ かつ $y \leqq z$ ならば $x < z$.

ii) 順序と演算

$$x \leqq y \text{ ならば } x + z \leqq y + z,$$

$$x \leqq y,\ 0 \leqq z \text{ ならば } xz \leqq yz.$$

※ $x < y, 0 < z$ ならば $xz < yz$（この場合のみ不等号が成立）．

※ $x > 0$ のとき x を 正数，$x < 0$ のとき x を 負数 という．

※ x の 絶対値 $|x|$ を次のように定める：

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

III. 連続性に関する公理

i) デデキントの **連続性公理**

$A, B \overset{\text{含まれる}}{\subset} \mathbb{R}$，$A, B \neq \emptyset$（空集合）は次を満たす：

$$A \overset{\text{または}}{\cup} B = \mathbb{R}, \quad A \overset{\text{かつ}}{\cap} B = \emptyset,$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B \text{ に対して } a < b.$$

このような A, B に対して，それらの$\overset{\text{ペア}}{\text{組}}$ $(A|B)$ を $\mathbb{R}$ の **切断** という．

このとき，各々の切断 $(A|B)$ に対して，或る $x \in \mathbb{R}$ が存在して，

x は A の最大数（ $\forall a \in A (a \leqq x)$, $\forall b \in B (x < b)$），または

x は B の最小数（ $\forall a \in A (a < x)$, $\forall b \in B (x \leqq b)$）である．

※ 結局，$A = (-\infty, x]$, $B = (x, \infty)$ または $A = (-\infty, x)$, $B = [x, \infty)$ となるが，いくらでも大きい（小さい）実数の存在を示す必要がある．

※ $\mathbb{R}$ は実質的にただ 1 つ存在することが示されている．

この公理系のみから実数の全ての性質が導かれるはずである．ここでは基本的な 2〜3 の性質を導いて満足しよう．（以下の証明では，公理系のうちよく知られた法則は黙って使うが悪しからず）．

まず，$\forall x(0x = 0)$ は当然成り立つが，公理主義の立場では，これも証明しなければならない．$x+0 = x$ より，$(x+0)x = xx = x^2$．よって $(\therefore)$，$x^2+0x = x^2$．$\therefore (x^2 + 0x) - x^2 = x^2 - x^2$．$\therefore 0x = 0$.（推移法則の＝の場合を使っている！）

次に，$1 > 0$ を示す．これは，$1x = x$ より $1^2 = 1$ を用いる．よって，$x^2 > 0$ $(x \neq 0)$ を示せばよい．まず，$x > 0$ のとき，$x^2 > 0x = 0$．$\therefore x^2 > 0$．次に，$x < 0$ のとき，$x - x < 0 - x$．$\therefore 0 < -x \Leftrightarrow -x > 0$．よって，$x < 0$ のとき，$x(-x) < 0(-x) = 0$．ここで，$x + (-x) = 0$ より，$x^2 + x(-x) = 0$．$\therefore x(-x) = -x^2$．$\therefore -x^2 = x(-x) < 0$．$\therefore -x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0\,(x < 0)$．以上から，$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$．よって，$1 = 1^2 > 0, \therefore 1 > 0$.（※ $1 \neq 0$ は $\forall x(1x = x)$ から得られる．$1 = 0$ とすると，$1x = 0x = 0$ だから，$\forall x(0 = x)$．矛盾！）

最後に，通常 **アルキメデスの原理** と呼ばれる重要定理：

$$0 < a < b\,(a, b \in \mathbb{R}) \text{ のとき，} an > b \text{ となる自然数 } n \in \mathbb{R} \text{ が存在する，}$$

を公理系から示そう．これは，‘ $a\,(> 0)$ がどんなに小さく，b がどんなに大きくても，a を繰り返して加えていけば必ず b を超える数になる ’ ことを表す．

その最も厳密な導出のためには，より基本的な **上限**[54] に関する定理を証明しておくのが役に立つ：（**ワイエルシュトラスの定理**）

集合 $S \subset \mathbb{R}$ が **上に有界** ならば S の上限 $x = \sup S \in \mathbb{R}$ が存在する．

まず，S の上界の集合を B とすると，上界の定義より $\forall s \in S\ \forall b \in B(s \leqq b)$．ここで，$B$ の $\mathbb{R}$ における補集合を A（$A \cup B = \mathbb{R}$，$A \cap B = \emptyset$，$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$）とすると，A の要素は上界でないから $\forall a \in A\,\forall b \in B(a < b)$ である．したがって，$(A|B)$ は実数の切断を定義し，A の最大数または B の最小数となる実数 x が存在する．（ア）S に最大数 m があるとき，$\forall s \in S(s \leqq m)$ を満たし，m は上界の最小数つまり B の最小数 x である．次に，（イ）S に最大数がないとき，

---

[54] $\mathbb{R}$ の部分集合 S（例えば 数列や区間など）について，$\forall s \in S(s \leqq b)$ となるとき，S は 上に有界 であるといい，b を S の **上界** という．上界は無数にある．このとき，或る x が存在して，（1°）$\forall s \in S(s \leqq x)$（$x$ は上界である），かつ（2°）$a < x$ ならば $\exists s \in S(a < s \leqq x)$（$x$ より小さい上界はない）が成り立つとき，x を S の 上限といい，$x = \sup S$ と表す．

任意の $s \in S$ に対して，$s < s'$ となる $s' \in S$ が存在するから，S の要素が上界になることはない．したがって，$S \cap B = \emptyset$，$(S \cup B) \subset \mathbb{R}$ および $A \cap B = \emptyset$，$A \cup B = \mathbb{R}$ より，$S \subset A$ である．このとき，もし，A に最大数 x があれば，$\forall s \in S\,(s \leqq x)$ となるから，x は S の上界となる．これは A には上界がないと仮定したことに矛盾する．したがって，A に最大数はなく，B に最小数 x が存在する．以上から，S の最大数の有無に依らずに，S の上界の集合 B には最小数が存在する，すなわち S の上限が存在することが示された．

アルキメデスの原理に戻ろう．$\exists n \in \mathbb{N}(an > b)$（$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合）は，数列 $\{an\}$ に対して，b がその上界でないことを意味する．$0 < an < a(n+1)$ だからこの数列は単調に増加するが，もし仮に $\{an\}$ が上に有界であると仮定すると，$\{an\}$ の上限 x が存在する：$\forall n \in \mathbb{N}(an \leqq x)$．ここで，$a > 0$ だから $x - a < x$ となって，$x - a$ が $\{an\}$ の上限となることはない．したがって，$\exists n \in \mathbb{N}(x - a < an)$ が成り立つ．これは $\exists n \in \mathbb{N}(x < a(n+1)$ を意味するが，$(n+1) \in \mathbb{N}$ より，$\exists n \in \mathbb{N}(x < an)$ となって，上限 x が存在するとの仮定に矛盾する．したがって，$\{an\}$ の上界は存在せず，$\exists n \in \mathbb{N}(an > b)$ が成り立つ．（したがって，$\exists n \in \mathbb{N}(n > b/a)$：「いくらでも大きな自然数が存在する」）．

これで，数学史の話を終わります．古代ギリシャからデカルトの時代までは，‘ 数 ’ は実は【単位】の付いた ‘ 量 ’ のことであり，それゆえに，数の 2 乗は平方・3 乗は立方と呼ばれて，面積・体積を表したこと，デカルトが単位の長さを乗法や除法に持ち込んで，演算によって量の【単位】が変わらないようにしたことを思い出そう．また，量の【単位】を取り去った無名数の ‘ 数 ’ を導入して初めて負数まで対応する数直線が正当化され，負数の完全なる理解はガウスによる複素数の正当化と同時に得られたことも思い出そう．また，数学が極端に高度になっていくのは実数の連続性が厳密に取り扱われるようになってからで，それに加えて，公理主義という抽象化が数への素朴なイメージを引きはがしてしまって，好奇心あふれる多くの門外漢を門前払いする結果になっているようである．大学の数学を学ぼうとする人はこれらのことを承知の上で数学に向かうのが良いであろう．工学部生や数学科以外の理学部生は，公理主義については，その精神を嗅ぎ取ってもらえば十分でしょう．数学科に進む人は公理系から全てを演繹する訓練をお忘れなく．