1.4.3　微分学と実数の連続性

デカルトの『幾何学』(1637) の後，曲線と方程式の関係（円：$x^2 + y^2 = r^2$ など）が調べられ，代数的な方法によって図形の性質を研究する幾何学 — 解析幾何学 — が発達した．接線や極値および面積や体積を計算する新しい方法が探求され，微積分学が生まれる環境が整った．そして，2 人の巨人が生まれた．ニュートン（1642〜1727）とライプニッツ（1646〜1716）である．

“ リンゴが落ちるのを見て万有引力を思いついた ”という逸話で有名なニュートンは自然法則の究明という観点から数学研究を進めた．物体は時間と共に運動することに着目し，‘ 瞬間 ’（moment（モーメント））を研究の手がかりとした．物体が円運動 $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$ をする場合で例解してみよう．ある時刻 t に着目し，$x(t), y(t)$ を x, y と書き，x, y の（瞬間）速度を $\dot{x}, \dot{y}$ で表す[42]．時刻 t の次の瞬間，つまり無限小の時間間隔 o の後 x, y は位置 $x(t + o), y(t + o)$ に移る．このとき，o が無限小[43] であるから，$x(t + o), y(t + o)$ は，速度 $\dot{x}, \dot{y}$ を用いて，$x(t + o) = x + \dot{x}o$，$y(t + o) = y + \dot{y}o$ と表すことができる[44]．円運動をしているから，$x^2 + y^2 = r^2$ と $x(t + o)^2 + y(t + o)^2 = (x + \dot{x}o)^2 + (y + \dot{y}o)^2 = r^2$ が成り立ち，それらの差をとると，$2x\dot{x}o + (\dot{x}o)^2 + 2y\dot{y}o + (\dot{y}o)^2 = 0$ である．ここで，両辺を無限小 o で割って，

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + \dot{x}^2 o + \dot{y}^2 o = 0$$

が得られる．このとき，o は無限小であるから，有限の $2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ と比べて $\dot{x}^2 o + \dot{y}^2 o$ は 0 に等しい．したがって，

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \ \left(\Leftrightarrow \ \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} = 0\right), \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \left(= \frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{y}$$

となる．疑わしい議論であるが，得られた結果は正しい．

42）$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$，$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ のことである．ニュートンは，時間に依存する x, y を「流量」，その速度 $\dot{x}, \dot{y}$ を「流率」と呼んだ．

43）無限小は，‘ 限りなく 0 に近い数 ’ を想定した言葉であり，任意に選んだ（0 に近い）実数より 0 に近い ‘ 数 ’ をいう．こんな ‘ 数 ’ は値の定まった実数で表すことができず，0 に収束する変数として表される．無限小の逆数が無限大である．つまり，無限大は任意に選んだ（大きい）実数より大きい ‘ 数 ’ である．（その定義より，∞ が無限大のとき，$\infty + 1$ なども無限大であり，無限大は定まった値の実数ではない．その逆数の無限小も同様である）．

44）ニュートンは，流量 x, y の無限小変化 $\dot{x}o, \dot{y}o$ を「モーメント」と呼んだ．

曲線の接線を研究し，ニュートンとは独立に微積分学を構築したのはライプニッツである．彼は現在も使われる無限小記号を駆使して微分積分を記述した：t の無限小 o に dt，x, y の無限小 $\dot{x}o, \dot{y}o$ に $dx = \frac{dx}{dt}dt$，$dy = \frac{dy}{dt}dt$ など．無限小という‘数’は大いに役立ち，オイラー（1707〜1783）はそれを駆使して微積分学の発展に大いに寄与した[45]．

微積分学の誕生から 1 世紀半が過ぎ，漸（ようや）く微積分演算の正当化に焦点があてられるようになった．コーシー（Augustin Louis Cauchy, 1789〜1857，フランス）は「極限」(limit) つまり‘限りなく近づいていく’という概念を導入し，その理論を体系的に発展させた．これによって，無限小を用いることなく，例えば，極限値の表現

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ (x \to a)$$

（x が a に限りなく近づくとき，x の関数 $f(x)$ は極限値 α に収束する―限りなく近づく）ができるようになった．

極限を用いて，先の円運動 $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$ の問題の取り扱いを正当化してみよう．無限小の時間間隔 o の替わりに t の増分 $\varDelta t$ を導入すると，x, y の増分は $\varDelta x = x(t + \varDelta t) - x(t), \varDelta y = y(t + \varDelta t) - y(t)$ と表される．したがって，$x(t+\varDelta t) = x + \varDelta x$，$y(t+\varDelta t) = y + \varDelta y$ に注意すると，$x(t+\varDelta t)^2 + y(t+\varDelta t)^2 = r^2$ は $(x+\varDelta x)^2 + (y+\varDelta y)^2 = r^2$ と書ける．その式から $x^2 + y^2 = r^2$ を辺々引くと，

$$2x\varDelta x + 2y\varDelta y + \varDelta x^2 + \varDelta y^2 = 0$$

となる．正当化の工夫は増分同士の割り算だった．$\varDelta t$ または $\varDelta x$ で割ると

$$2x\frac{\varDelta x}{\varDelta t} + 2y\frac{\varDelta y}{\varDelta t} + \frac{\varDelta x}{\varDelta t}\varDelta x + \frac{\varDelta y}{\varDelta t}\varDelta y = 0, \quad 2x + 2y\frac{\varDelta y}{\varDelta x} + \varDelta x + \frac{\varDelta y}{\varDelta x}\varDelta y = 0$$

となる．ここで，$\varDelta t \to 0$ のとき，$\varDelta x \to 0, \varDelta y \to 0$ であり，第 1, 2 項の $\frac{\varDelta x}{\varDelta t}$，$\frac{\varDelta y}{\varDelta t}$ は瞬間速度に収束する：

$$\lim_{\varDelta t \to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t \to 0}\frac{x(t+\varDelta t) - x(t)}{\varDelta t} = \frac{dx}{dt}, \quad \lim_{\varDelta t \to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t \to 0}\frac{y(t+\varDelta t) - y(t)}{\varDelta t} = \frac{dy}{dt}.$$

[45] 無限小の概念は数学的に厳密な取り扱いができないとして一度は放棄された．しかしながら，誤りなく扱えば有用な‘数’は厳密な構成に耐えるのであろう．1960 年代にもなって，実数に無限小・無限大を加えた「超実数」が厳密な形で正当化され，「超準解析」と呼ばれる解析学の 1 分野をなしている．

このとき，第 3, 4 項は 0 に収束する．したがって，無限小の議論の場合と同じ結果が得られる：

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

また，極限を用いると関数の連続が表現できるようになった：

> ある開区間で関数 $f(x)$ が連続とは，その区間内の各点 a において $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことをいう．

しかしながら，lim ―限りなく近づく― は 我々が高校で習った概念であるが，その意味は実は単純明瞭ではなく，扱いにくい．例えば，基本的な定理

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

（※極限値が存在するとして）を高校数学では証明できない．そのため，コーシーは，時として，小さい正数 $\overset{\text{イプシロン}}{\varepsilon}$（error 誤差の略語）と $\overset{\text{デルタ}}{\delta}$（distance 距離の略語）を導入して基礎づけを行った．この $\varepsilon - \delta$ を用いる論法は関数の極限に関する定理の証明において非常に強力であり，ワイエルシュトラス（Karl T. W. Weierstraß，1815～1897，ドイツ）が 1860 年代の講義のなかでその論法を完成させた．

極限の式 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ を $\varepsilon - \delta$ 論法で表してみよう．それは，$f(x)$ の α からの ‘ 誤差 ’ ε を前もって考え，その ‘ 誤差 ’ 以内に納めるためには x と a との ‘ 距離 ’ δ をどのようにとればよいかという形で論じられる：

> 任意に選んだ正数 ε に対して適当な正数 δ が存在し，$0 < |x - a| < \delta$ となる全ての実数 x に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つならば，x が a に限りなく近づくとき $f(x)$ は極限値 α に収束するという．

ε はいくらでも小さくとれる正実数，δ はそれに伴って小さくなる正実数である．このとき，不等式 $0 < |x - a| < \delta$ および $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ は常に無限小を含む領域になっている．したがって，$\varepsilon - \delta$ 論法は無限小を用いる議論に取って代わることができると言えよう．

$\varepsilon - \delta$ 論法によって，数学の基礎は確立されたかと思われたが，基礎の厳密性をもっと高める必要があると感じる数学者もいた．19 世紀ドイツの優れた

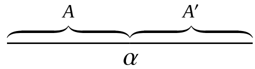
数学者 デデキント（Julius W.R. Dedekind，1831〜1916）は“ 微分学は連続関数を扱うが，その変数を表す実数に対して連続性は厳密に保証されているのか？ ”と疑った．数直線の定義（☞ p.37）より実数は直線上の点に対応して定まり，その実数の大きさは対応する点と原点の‘ 距離 ’で定められる．数直線上の点は連続して存在するから，対応する実数の連続性も保証される．これが当時の多くの数学者の共通の見解であった．

点と原点の距離は目盛り付き定規の原理を用いて測られる．単位の長さの目盛りを用いてその点を含む目盛り区間から対応する実数の整数値を決め，次にその区間を 10 等分して実数の小数第 1 位を求め，同様にさらに 10 等分して小数第 2 位が定まる．この操作を n 回くりかえすと点に対応する実数が小数第 n 位まで求めることができる．このことから数直線上の点に対応する実数は有限・無限の小数で表されると考えられた．しかしながら，10 等分の操作は有限回しかできないから，この方法で表される小数は有限小数のみである．したがって，点に対応する実数が，有限小数や循環小数（つまり，分数でも表される有理数）なのか，循環しない無限小数（つまり無理数）なのかは不明である．逆の言い方をすると，例えば，循環しない無限小数 $0.101101110111101111101\cdots$（1 の並び方の規則を推測しよう）に対応する点はどこであろうか．その位置は近似的にしかわからないであろう．点と実数の対応は直感に頼る議論であった．

循環しない無限小数 $0.101101110111101111101\cdots$（これが定める数を α で表す）を例にとって，無限小数の厳密な議論を見てみよう．始めから無限を扱うことはできないから，α の小数第 n 位までの有限小数近似（つまり有理数近似）を a_n（$a_3 = 0.101$ など）とすると，この無限小数は $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と解釈される．ただし，この式の意味は厳密で，「無限数列 $\{a_n\}$ は n が限りなく大きくなるとき，a_n がいくらでも近づくような‘ α が存在するならば ’，数列 a_n の極限値は α である」と読む．数 α の存在が厳密に保証されなければならないのだ．当時は有理数の理論は確立していたが，一般の循環しない無限小数を数として保証する理論はまだ無かった．なお，当時，循環しない無限小数の議論がどこまで進んでいたかは不明である．また，小数と数の 1 : 1 対応 と関連するが，$0.999999\cdots = 1$? の問題が解決していたかも不明である．

デデキントは，数直線つまり幾何学的‘点’を持ち出さずに数それ自身の中で理論を構築し，そしてそれから証明できることのみを信頼するという考えを鮮明にした[46)]．この理論が **デデキントの切断** と今日呼ばれているもので，実数の理論に真に厳密な基礎付けをもたらした.

デデキントの切断は，有理数についてはよく知っていると見なし，有理数全体の集合[47)] $\mathbb{Q}$ を大きさの順に並べた有理数直線を 2 つに切断し，その切断面に現れる数を「実数」と定義するというイメージを理論化したものである.



$\mathbb{Q}$ を以下の条件を満たすように下組・上組と呼ばれる 2 つの部分集合 A, A' に分割したとき，A, A' の組(ペア)で表される $< A, A' >$（有理数の切断 を表す記号）によって実数（α と表す）が定まる：$\alpha =< A, A' >$.

（i）$A \overset{\text{または}}{\cup} A' = \mathbb{Q}$,　$A \overset{\text{かつ}}{\cap} A' = \overset{\text{空集合}}{\emptyset}$,　$A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$.（分割の表現）

（ii）$r \overset{\text{属す}}{\in} A$, $s \in A'$ ならば $r < s$.（A が下組，A' が上組の条件）

（iii）A に属する最大の有理数はない.（紛れないための配慮）

（iv）$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\}$[48)], $A' = \{s \in \mathbb{Q} \mid s \geqq \alpha\}$ のとき $\alpha =< A, A' >$.

例えば，A が（有理数）$\frac{4}{3}$ より小さい有理数，A' が $\frac{4}{3}$ 以上の有理数のときは，（iv）からわかるように，有理数の切断 $< A, A' >= \frac{4}{3}$ である．このとき，上組 A' に最小値 $\frac{4}{3}$ がある．このことを“切断面の右面に有理数がある”と表そう．また，A が（無理数）$\sqrt{2}$ より小さい有理数，A' が $\sqrt{2}$ 以上の有理数のとき，$\sqrt{2}$ は有理数でないから A' には最小値が存在しない（$\sqrt{2}$ より大きく，$\sqrt{2}$ にいくらでも近い有理数が存在し，最小と呼べるものがない）．このとき，切断面には有理数が無いことを意味する．そして，このとき，有理数の切断 $< A, A' >$

---

46) デーデキント 著『数について一連続性と数の本質一』（河野伊三郎 訳，岩波文庫，1961）

47) 集合は明確に区別のできる‘もの’（要素という）の集まりである．集合の表現は, 多くの場合，{ 集合の要素 | 要素についての条件 } の形をとる．r が集合 A の要素であるとき $r \in A$ と書き，r は A に属するという．集合 A または A' の要素からなる集合を $A \cup A'$ で表し，A と A' の両方に共通な要素からなる集合を $A \cap A'$ と表す．要素を 1 つも含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す．A の要素が全て集合 B の要素でもあるとき，A は B の部分集合であるといい $A \subset B$ で表す．A と B の要素が全て一致するとき A と B は等しいといい $A = B$ で表し，そうでないときは $A \neq B$ と書く.

48) 切断による数の相等・大小の定義：$\alpha =< A, A' >$, $\beta =< B, B' >$ のとき

$\alpha = \beta$ は $A = B$ を意味し，$\alpha < \beta$ は $A \overset{\text{含まれる}}{\subset} B$ かつ $A \neq B$ を意味する.

は無理数 $\sqrt{2}$ を定義する．つまり，このとき切断面には無理数 $\sqrt{2}$ が存在することを意味する．これらのことはそのまま一般化できる：

（I）A' に最小の有理数 a があるとき，$< A, A' >$ は有理数 a 自身．このとき，a は切断面の右面にある．

（II）A' に最小の有理数がないとき，$< A, A' >$ は，有理数ではなく，切断面にある無理数を定義する．

以上のようにして，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ を巧妙に用いて，その切断として有理数と無理数つまり実数が定義される．すなわち，実数が定義によって数学的に創造されたことを意味する．すべての切断を考えるとすべての実数が定義される．そのとき，実数の連続性が調べられる．（実）数直線を開区間 $(-\infty, \infty)$ で表して，実数 α の位置で切断すると，半開区間の下組 $(-\infty, \alpha]$・開区間の上組 (α, ∞)，または開区間の下組 $(-\infty, \alpha)$・半開区間の上組 $[\alpha, \infty)$ に分割される．すなわち，今度は ‘ 実数の切断 ’ を行うと，下組に最大値があるか，または上組に最小値がある．つまり，実数直線の切断面の左面または右面には（いかなる切断を行っても）必ず実数が現れる．このことは正に実数の連続性の証（あかし）である．デデキントは有理数の切断で定義された実数の集合に対して切断を行い，実数の連続性を証明した[49]．

デデキントの研究の後，証明は幾何学的直感を排除した，より厳密なものになっていき，素人目には “ 図を描けば明らか ” なこともきちんと証明することを要求されるようになった．もちろん，連続性に関係する非常に微妙な問題に対して明確な正しい答えを出せるようになったことはいうまでもない．

デデキントの切断は，しかしながら，有理数から出発するために，無理数同士の積についてはすでによく知られていること（例えば，$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ など）を証明する必要に迫られ，実数の交換法則 $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ や分配法則 $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ も同様であった．このような煩雑さを避けるために，現在では，実数の連続性は公理と見なす ‘ 実数の公理的定義 ’ もよく用いられる．それは次の §§ で議論しよう．

---

[49] 例えば，小平 邦彦 著『解析入門 I』（岩波書店）．この書は，厳密でありながら，感覚的にわかりやすく叙述されている．

1.4.4　公理化 — 数学の抽象化・形式化