§1.4　19 世紀以降の数概念

オイラーの数直線の後，数概念はどんどん抽象化の度合いを増していき，数は定義による人工的な存在物となっていった．その研究は多くの方向に進展していく：(1) 代数方程式の解として現れる全ての数—正数・負数・虚数—を同類の数すなわち複素数として認知すること．(2) 交換・結合・分配などを含む演算の基本法則によって数を研究すること．(3) 実数の属性である連続性に厳密な基礎を与えること．(4) 自然数を公理的に定義すること．等々．

1.4.1　方程式を解くことの意味

まず，簡単な 2 次方程式 $x^2 - 1 = 0$ で例解しよう．因数分解すると

$$x^2 - 1 = x^2 + x - x - 1 = x(x+1) - (x+1) = (x-1)(x+1) = 0$$

だから，$x - 1 = 0$ または $x + 1 = 0$，つまり，解 $x = \pm 1$ を得る．この操作の意味を考えてみよう．

第 1 に，方程式の式変形においては代数の計算法則を前提としている：
‘数’ $a, b, c, \cdots$ に対して

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba \qquad \text{（交換法則）}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a(bc) = (ab)c \qquad \text{（結合法則）}$$

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{（分配法則）}$$

$$\text{任意の } a \text{ に対して} \quad a + 0 = a, \qquad a \cdot 1 = a \qquad \text{（0 と 1 の存在）}$$

などは証明なしに成立する公理とされる[39)]．これらの計算法則はイスラムの

39) これに，逆数（$a \neq 0$ に対する $(1/a)$）の存在，および負数の存在を前提とする加法の逆元（a に対する $(-a)$）の存在が付け加わる（以上の条件を満たす数は「体」と呼ばれる）．ただし，加法の逆元はここでは考えない．また，より基本的な法則：

$$a = b \overset{\text{ならば}}{\Rightarrow} b = a \qquad \text{（対称律）}$$

$$a = b \text{ かつ } b = c \Rightarrow a = c \qquad \text{（推移律）}$$

などは当然ながら前提とする．

代数学（☞ p.27）の時代から長い時間をかけて徐々に確立されてきた．

第 2 に，方程式の式変形においては未知数 x の正負の区別などはやっていられない：式変形 $x^2-1=x^2+x-x-1=x(x+1)-(x+1)=(x-1)(x+1)\ (=0)$ から，$x=\pm 1$ つまり正負の解を得るが，このとき負の方の x についても計算法則を前提として式変形するしかない．はかない抵抗をしたければ，最後に負の解を捨てることはできる．しかしながら，方程式 $x^2+2x-1=0$ を解くと正の解として $x=\sqrt{2}-1$（正数 引く 正数）を得るが，交換法則を用いて $x=-1+\sqrt{2}$ と変形すると ‘ 負数 足す 正数 ’ と解釈せざるをえない．つまり，正数解を考えている場合でも負数を抜きにして済ますことはできない．ニュートンやオイラーによって，数は【単位】が付かない―この世には存在し無い―無名数となったので負数の認知に抵抗は少なく，むしろ負数を完全に公認するための理論を模索する方向に進んでいった．

次に，簡単な 4 次方程式 $x^4-1=0$ を考えてみよう．因数分解すると

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0 \qquad (i=\sqrt{-1})$$

だから，4 つの解 $x=\pm 1, \pm i$ を得る．ただし，虚数解を好まなければ因数分解 $x^2+1=(x-i)(x+i)$ を拒絶することもできる．ここで，負数や虚数の解を認めればどんなに魅力的な定理が生まれるかを見てみよう．それは，上の因数分解で見たように，$x^4-1=0$ の任意の解を $\alpha\,(=\pm 1, \pm i)$ とすると，4 次式 x^4-1 は因数 $(x-\alpha)$ をもつことに注視し，それを一般化することにある．一般の代数方程式（n 次の方程式）

$$P_n(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+cx+d=0 \quad (a\neq 0)$$

の任意の解を α とすると，

$$P_n(\alpha)=a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+\cdots+c\alpha+d=0$$

が成り立つ．そこで，公式

$$x^k-\alpha^k=(x-\alpha)(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\cdots+\alpha^{k-2}x+\alpha^{k-1})$$

を用いると，簡単に

$$P_n(x)=P_n(x)-P_n(\alpha)=(x-\alpha)Q_{n-1}(x)\,(=0) \quad （Q_{n-1}(x)\text{ は } n-1\text{ 次式}）$$

の形に因数分解できる．他の解 β は $Q_{n-1}(x) = 0$ から $Q_{n-1}(x)$ の因数 $(x - \beta)$ に現れる．この操作を繰り返すと $P_n(x)$ は $(x - \text{解})$ の積の形に完全に因数分解される，つまり「n 次の方程式は，負数や虚数も解として認めると，必ず n 個の解をもつ」という大定理[40] が得られることになる．ここまでくると，負数はもちろん虚数も数と認めて，一般的で単純な上記の定理（代数学の基本定理）を承認する方が自然であろう．

さらに，カルダノ（☞ p.32）が得た 3 次方程式の解の公式は，解が全て実数にもかかわらず，公式は虚数で表されるという場合があり，虚数の絶対的な必要性を強調する例となった[41]：一般の 3 次方程式は 2 次の項がない

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \qquad （p,\ q\ \text{は実数}）$$

に同値である．カルダノが得たこの方程式の解の公式は，解を $x = u + v$ と和の形に表すと，

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}}, \qquad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}} \qquad (\overset{\text{デルタ}}{\Delta} = q^2 + p^3)$$

というものである．これが上の方程式を満たすことは，$(uv)^3 = (-p)^3$ よって $uv = -p$ に注意すれば，簡単に示すことができる．そこで，3 根が全て実数の方程式

$$x^3 - 3 \cdot 7x + 2 \cdot 10 = (x-1)(x-4)(x+5) = 0$$

に解の公式を当てはめると，$p = -7,\ q = 10$ なので，$\Delta = 10^2 + (-7)^3 = -243$ だから，解は

$$x = u + v = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\ \ (= 1,\ 4,\ -5)$$

と表される．なに，虚数の和が実数になる？！ 16 世紀の数学者にはこれはパラドックスであった．彼らは虚数と格闘し続けた．18 世紀の終わりには数学者達は虚数を無視できないと悟り，そして 300 年もたってそのパラドックスは肯定的に解決された：その和は 1, 4, − 5 のどれにもなったのだ．そのとき，数学者は虚数を数と認める理論こそが正しい理論だと納得することになる．

---

[40] 多重根は多重度 k に応じて k 個の根と見なします．きちっとした議論は例えば p.16 の脚注『高校数学＋α』§2.4.3 および §10.3.3.3 を参照．

[41] 同上，§2.3.2 および §10.3.2.

1.4.2　数の統一的理解 ― 複素数とその演算の幾何表現

カルダノの 3 次方程式に関する 1545 年の著作から 15 年ほど後，イタリアのボンベリ（Rafael Bombelli，1526〜1572）は複素数の計算規則を（実数の場合からの類推によって）初めて提示した（著書『代数学』は 1572 年に出版）：a, b, c, d を実数として

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1} \overset{\text{同値}}{\Leftrightarrow} a = c,\ b = d,$$

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1},$$

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

複素数の実質的な研究はここに始まったといえるが，虚数に対してはどんな現実的な解釈も存在しないとする考えが大勢を占めた．18 世紀になってようやく，解析学や幾何学および力学に複素数の演算が広く適用されるようになった．

18 世紀の最初の 4 半世紀にイギリスのド・モアブル（Abraham De Moivre, 1667〜1754）は彼の名を冠する公式（ド・モアブルの公式）：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (i = \sqrt{-1})$$

を確立していた．ただし，彼の関心は $\cos\theta$ を $\cos n\theta$ で表すことにあったため，ド・モアブルの公式を上記の現在の形に導いたのはオイラーの 1748 年の著書『無限解析入門』においてである．この著書の中で有名なオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ も確立されている．彼は, 翌年には，複素数の複素数乗はまた複素数であること：

$$(a + bi)^{p+qi} = c + di \qquad （a,\ b,\ c,\ d,\ p, q \text{ は実数}）$$

を示している．なお，$\sqrt{-1}$ に対する記号 i を imaginary（想像上の，虚の）の頭文字として導入したのもオイラーで，1777 年の研究の中であった．

複素数の幾何表現についての最初のヒントは複素数の和と平面ベクトルの和の同値性にあったと思われる：

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}.$$

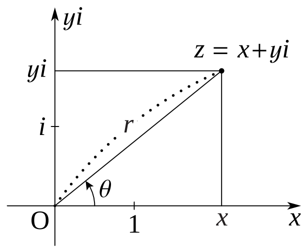
次のヒントはオイラーの公式に由来する複素数の極形式

$$z = z(r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r \geqq 0)$$

から得られる実数単位 1 と虚数単位 i についての情報である：

$$z(1,\ 0^\circ) = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ = 1$$
$$z(1,\ 90^\circ) = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i$$
$$z(1,\ 180^\circ) = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1.$$

これから，単位点 1 は横軸上に，虚数単位 i を表す点は横軸に垂直な縦軸上にあるとできる．ここで，$z = x + yi = z(r, \theta)$ について，z の絶対値 $|z|$（原点と点 z の距離）を



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と定めると，$|z| = r$ である．以上のことから，正数・負数・虚数をまとめた複素数を平面上に表すことができる．正数と負数が横軸の数直線上に並ぶとするのは従来通りで，虚数 $x+yi$ $(y \neq 0)$ は $|yi| = |y|$ だけ横軸から離れたところにある点として表される．

複素数の演算もまた複素数として平面上に表すことができる．複素数の和は，すでに見たように，平面ベクトルの和のように表される．複素数の積は，極形式

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

を用いると，加法定理がどんぴしゃで当てはまる：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}, \end{aligned}$$

よって　$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}.$

上の複素数の幾何的表示に関する研究（の一部）はデンマークのウェッセル（Caspar Wessel，1745～1818）によって 1799 年に，またスイスのアルガン（Jean Robert Argand，1768～1822）によって 1806 年に出版された．残念なこ

とに，ウェッセルは言葉の障害のために全く日の目を見ず，またアルガンのものは，議論がまだ不十分であり，また前世紀の数学者の見解が支配的であったために，影響は限定的であった．

歴史上最高の数学者の一人と称(たた)えられるドイツの天才 ガウス（Johann Carl Friedrich Gauss，1777〜1855）は，1799 年の学位論文で代数学の基本定理（☞ p.40）の証明を初めて行うなど，若い頃から虚数に関心を持っていた．事実，彼は，ウェッセルより早く，1790 年代半ばには複素数平面上で問題を考えていた．ただし，偏見を避けるために虚数が表にでない形で発表し，複素数を完全に理解するために十分な年月をかけ，機が熟するのを 30 年以上待った．例えば，ガウスは代数学の基本定理に対して異なる証明をいくつも行い，代数方程式を解く際に現れる数の連鎖（自然数→分数→負数→虚数）が虚数で止まること，つまり，（複素数の四則演算からはもちろん）複素数係数の n 次方程式から複素数を超えるような解は生み出されないことを確信していった．実数の問題を解くとき，高々複素数まで考慮すれば十分なのである．

1831 年，ガウスは遂に複素数とその演算の幾何的解釈を公表し，数についての一般的形式的理論をほぼ完全に基礎づけた．その中で，彼は，数 $a+bi$ を $a1+bi$ と見なす，つまり単位 1 からなる数と虚数単位 i からなる数が複合した数と考え，それを 複素数 (complex number) と命名し，それまでの名称「架空の数」を清算した．この理論によると，複素数の四則演算は虚数単位 i が直接演算に絡まないように定義され，i は単なる記号に徹する．例えば，複素数の商は，$(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ を利用して，

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

などと定められる．

ガウスの理論に他の秀でた数学者達も納得し，彼らも複素数に関する新しい科学的立場をとるようになった．こうして，19 世紀の中頃に，元々は負数の認知として始まった問題は，虚数を巻き込む複素数の意味付けとその公認という形で，事実上決着した．複素数は数学者の創造物であり，それに含まれる実数や正数もそうである，ということに注意しておこう．