§1.2　中世の数学

古代ギリシャ数学は，プラトンというナビゲーターを得て，論理的数学の構築に邁進し，ユークリッドの『原論』において公理的論証数学が完成した．2 千 3 百年も前のことである．公理という概念の確立は，紛れもなく，数学発展史における第一級の功績であり，『原論』は，その後 2 千年以上にわたって，数学の教科書であり続けた．

しかし，現在の数学レベルから古代ギリシャ数学を見ると，解決されるべき 3 つの宿題を残していた：(1) 連続量に対して，幾何学的取り扱いのみでなく，日常行われている計算の正当性を確立すること．(2) 不連続な数と連続量の統一．つまり，数概念の確立．(3) 自在な応用力．つまり，経済や建築・自然現象などを容易に取り扱える簡明な構造.

これらの宿題の解決に向かう努力は，キリスト教が支配する中世ヨーロッパではほとんど見あたらず，東方の国々で散見される程度である．

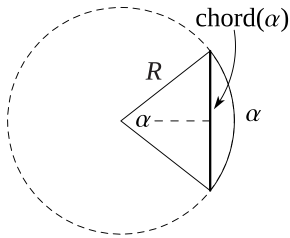
1.2.1　古代ギリシャ数学晩期の巨人たち

ユークリッドが晩年を迎える頃，古代のもっとも偉大な物理学者・工学者で数学者のアルキメデス（Archimedes，前 287〜前 212）が（現在はマフィアで有名な）シチリア島のシラクサで生まれた．彼は天才的な軍事技術者であり，てこを利用したカタパルト（＝投石機）を用いて敵の海軍を打ち破った．また，王が贈り物に作ったが重すぎて進水できずにいた豪華巨船を滑車を用いて進水させたとか，職人に作らせた純金の王冠に銀が混入されていることを浮力を用いて見破ったという逸話が残っている．彼は，若い頃アレクサンドリアに滞在してユークリッドの弟子たちからギリシャ数学を学び，それを完全にマスター

した．それゆえに，てこや浮力などの物理問題に対して「数学的モデル」[22]を作ってそれらの原理を厳密に証明したのだった．彼があのニュートンと比すべき天才とうたわれる所以(ゆえん)である．

ユークリッドは数値計算を行うことはなかったが，アルキメデスはそれを厭(いと)わなかった．『円の計測』という短い論考の中で，円に内接および外接する正多角形を考え，それらの正多角形の周の間に円周があることを利用して，円周率 π の近似値を求めた．彼は正 96 角形まで計算し，$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を得ている．

アルキメデスは，上の結果にあるように，分数を用いるのにためらいはなかった．それは，彼が，不連続な数ではなく，量を扱ったからであり，分数を数と認めたわけではなかった．数の定義のような純粋に形而上学的問題には，彼の関心が向くことはなかった．



膨大な数値計算を必要とするのが三角形の辺と角の関係を調べる「三角法」である．三角法は土地の測量や暦を作るための天体観測の必要性から生じ，そのためには現在の三角関数表にあたる精密な表を作る必要があった．ヒッパルコス（Hipparchus，前 190 頃〜前 120 頃）および後世のプトレマイオス（Ptolemaeus，100 頃〜178 頃）は，上図にあるように，一定の半径 R の与えられた弧 α（または中心角 α）に対する弦の長さ $\mathrm{chord}(\alpha)$ を様々な α の値に対して求めて表にした．$\mathrm{chord}(\alpha)$ は現在の正弦で表すと

$$\mathrm{chord}(\alpha) = 2R\sin(\alpha/2)$$

である．プトレマイオスは，16 世紀に至るまで影響力があり，イスラムの学者から『アルマゲスト』として知られる，13 巻からなる天文学の著作を残した．その中には，$\frac{1}{2}^\circ$ の間隔で $\frac{1}{2}^\circ$ から 180° までの全ての弧の弦の表が載っている．

プトレマイオスは $R = 60$ を採用し，60 進法で計算を行った．このとき，$\mathrm{chord}(\alpha)$ は α の関数となるが，彼はこのことを十分に認識していた[23]．

---

22) 複雑な物理現象を数学的に取り扱うために，物理的な状況を単純化したモデルのこと．例えば，てこについて言えば，てこそのものは変形しない剛体で，重さを持たず，支点と重心は大きさのない点であると仮定する．

23) ☞p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.179.

以上，ユークリッド『原論』以後の，数値計算を必要とする数学の話題を取り上げたが，そこで扱う連続量は，天上の問題を解くにも，地上の問題を解くにも必要であった．この連続量こそが，千数百年の時を経て，我々の数すなわち実数に変身するのである．

1.2.2　位取り記数法とゼロ 0 の発明

始めに，漢字を用いた例で解説しよう．一，二，$\cdots$，九，十と順に書いたとき，次の数は十一と 2 文字を使った 2 桁の数字で書かれる．これは数を表す文字すなわち「数字」を節約し，簡単に数を表すためである．唐以前の中国では二千十 $(= 2 \cdot 10^3 + 10)$ などのように，十 $= 10$，百 $= 10^2$，千 $= 10^3$，$\cdots$，などと 10 を「底」とする累乗 10^n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を用いて各位の数を表す 10 進位取りの記数法を用いた．10 進法に限らず，大きな数を表すには，数字であれ，算木・算盤の類であれ「位取り記数法」は絶対である．

数をもっと簡単に表すには，十，百，千，・・・などの数字も用いない方法があればよい．一番初めに考えられた方法は，古代バビロニア文字（☞ p.3）で行われたように空白␣を用いて，二千十を 二␣一␣などと空位が分かるように表せばよい．これによって，一，二，$\cdots$，九の 9 文字だけでいくらでも大きい自然数を表すことができる．ただし，空白␣は見えないので誤りを生じやすく，それに変わる記号が現れた．古代バビロニアでは，紀元前 5 世紀以降に記号を用いた．ただし，を数字の最後つまり第 1 位に置くことは無かったので，完全な（60 進）位取り記数法にはならなかった．

インドでは，五世紀中頃の教典『ロカヴィバーガ』(458 年）に，14236713 に当たるインド数字の読み（いちよんに $\cdots$ に対応する読み）が位取りの原理にしたがって書かれ，さらにゼロを表す「空（スンヤ）」という言葉も載っていた[24]．文献はかなり失われているが，7 世紀に入る頃には広い地域で，9 個のインド数字および「空」を表す点 ● を空位に用いて，数字が表されるようになっていた（☞ p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.264.）．例えば，二千十は「● 一 ● 二」（左側が低位）．7 世紀のインドでは 10 進位取り記数法は確立していた．

[24] ドゥニ・ゲージ 著『数の歴史』（「知の再発見」双書 ）（藤原正彦 監修，創元社，1998 年）

ここで，重要な出来事に注意しよう．記号 ● は，空位を表すだけでなく，空つまり何もないことを表す．したがって，それが数のように用いられたということは，● は「何もない数」つまり現在のゼロ 0 を表すという意味付けがなされていたことになる．つまり，数がないことに対して‘数がないことを表す数ゼロがある’，もっといえば，‘何もない’を‘無がある’と考える概念上の革命が起こっていたと解釈される．数ゼロ 0 の発明は数学史上第一級の（概念的）発見であるといわれる所以（ゆえん）である．

記録によると，773 年，イスラム帝国の都バグダッドにインドの学者が訪れ，10 進位取り記数法を用いて書かれた天文学書を伝えたという．4 世紀末以降におきたキリスト教の異教徒迫害から東方に逃れたアレクサンドリア図書館の学者をイスラムの支配者は保護し，古代ギリシャ数学の高度な知識はイスラムの学者に引き継がれていた．そのため，インドからの贈り物の重要性は容易に理解され，アル・ファーリズミー（al-Khwārizmī，780 頃〜850）は 9 世紀の初頭に『インド式算術による加法と減法』を著し，インド方式はイスラム数学の中に浸透していった．何しろ，0 を用いるインド式 10 進位取り記数法では，計算は現在の小学生でも分かる，筆算によって計算過程も残せるのだから．

ヨーロッパ人がこの重要な文献に接するのは，ノルマン人の傭兵がイスラム教徒の支配からシチリア島を奪還し，十字軍遠征によってイベリア半島を取り戻した 12 世紀以降のことである．インド数字はこのとき「アラビア数字」の名でヨーロッパに徐々に浸透していき，ゼロ 0 も数として認知された．ユークリッド『原論』を含む古代ギリシャ数学の文献もようやく日の目を見た．代数学（algebra）の語源ともなった，アル・ファーリズミーの『アル・ジャブルとアル・ムカーバラの計算法についての簡約な書』（825 年頃）も何度となく翻訳された（☞ p.27）．

1.2.3　インドにおける負数の認知

負数は 2 次以上の代数方程式の解として現れてしまう‘招かれざる数’であった．ヨーロッパの数学は 2 千年間は負数が現れないようにするための努力に終始し，その後は負数を認知・正当化する方向に転じた．負数が数として確立されたのは今からわずか 2 百年ほど前のことである．

既に見たように，古代バビロニアで扱われた連立 2 次方程式（☞ p.3）では負数が現れないように問題が作られている．

3 世紀にアレクサンドリアで活躍したギリシャの数学者ディオファントス（Diophantus，3 世紀初頭～3 世紀末）は，主著『数論』に現れる次のような式変形のさいに，負数の積に関する規則をすでに用いていた：

$$(2x - 3)(2x - 3) = 4x^2 - 12x + 9.$$

$(-3) \times (-3) = +9$ である．しかしながら，ディオファントスは，-3 を負数とは認識せずに「引く数」といい，正数を「加える数」と名付け，掛け算の規則を次のように表した：“ 加える数に引く数を掛けると引く数になり，引く数に引く数を掛けると加える数になる ”．ちなみに現在の数学では引き算 $2x - 3$ は負数 -3 の足し算 $2x + (-3)$ と定められています．

古代の中国では役人が統治に必要な技術を磨くための実用的問題集形式の数学書『九章算術』が編纂された．加筆修正を経て紀元後 2 世紀頃には完成したようで，263 年には三国の魏の数学者劉徽（りゅうき）が註釈本を制作した．その第 8 章方程には連立 1 次方程式の問題と解法が載っているが，そこで正・負という文字が使われている．具体的な問題で見てみよう[25]．

> 上禾（か）（＝稲）3 束に実 4 斗（＝ 10 升（しょう））益（ま）す（＝加える）と，下禾 7 束にあたる．また，下禾 6 束に実 8 斗益すと上禾 4 束にあたる．上下禾の実は 1 束それぞれいくらか．

この問題は，上禾 1 束の実を x 斗，下禾 1 束の実を y 斗とすると，

$$\begin{cases} 3x + 4 = 7y \\ 6y + 8 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases}$$

のように現代的表示では立式される．右側の表示は，現代風にいえば，行列を用いた掃き出し法[26] を適用する形にするためのもので，当時の中国では係数の数字を算木（さんぎ）とよばれる爪楊枝（つまようじ）のような計算棒 | で表し，それらを格子を書いた算盤（さんばん）と呼ばれる紙や板に並べて計算した．図解すると次のようなものである：

25) 片野善一朗 著『数学用語と記号物語』（裳華房，2003）p.39.

26) 例えば，拙著『高校数学 $+\alpha$ なっとくの線形代数』§6.4.

算木を用いて 1 = 𝍠, 2 = 𝍡, 3 = 𝍢, 6 = 𝍥, 7 = 𝍦 などと表し，また引き算については斜算木＼を用いて −4 = 𝍣⃥, −7 = 𝍦⃥ などとすると，

$$\begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

{ 𝍢 x + 𝍦⃥ y = 𝍣⃥
{ 𝍣⃥ x + 𝍥 y = 𝍧⃥ ⇔

	𝍣⃥		𝍢
	𝍥		𝍦⃥
	𝍧⃥		𝍣⃥

のような手続きで算木が算盤上に並べられる．

以上の対応を頭に入れて，我々は，算盤上で行われた計算を，連立方程式で見てみよう．$a > b > 0$ のとき，計算法則 $(-a) - (-b) = -(a - b)$，$(-a) - b = -(a + b)$ および $0 - (-b) = -(-b) = b$ は知られていた．

$$\begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4x - 7 \cdot 4y = -4 \cdot 4 \\ -4 \cdot 3x + 6 \cdot 3y = -8 \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4x - 7 \cdot 4y = -4 \cdot 4 \\ 0x + (18 - 28)y = -(24 + 16) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ \quad -10y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 70y = -40 \\ \quad -10y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - (70 - 10 \cdot 7)y = -40 - (-40 \cdot 7) \\ \quad 10y = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30x = -40 + 280 = 240 \\ \quad y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

上式で，例えば，第 2 式の方の y の係数が $18 - 28 = -10$ などの算盤上の計算は

𝍠	𝍧	𝍡⃥	𝍧⃥

⇔

𝍠 𝍡⃥	𝍧 𝍧⃥	𝍡⃥	𝍧⃥

⇔

𝍠⃥		𝍡⃥	𝍧⃥

（他の行は省略）のように行われ，$18 - 28 = 18 + (-28) = -10$ と正数＋負数の形になっている．

上の計算において，中国人は方程式の係数が負になることを厭（いと）わず，係数の正負を区別する工夫をうまく行って解いていることがわかる．劉徽の注釈によると「‘益す’と‘損らす’という 2 種の得失は相反するから，つまるところ正と負で名付ける．⋯」とある．これらのことを勘案すると，算木における正数・負数は，正・負という用語は用いているものの，先に見たディオファントスの‘加える数’・‘引く数’と同様，実際には‘益す数’・‘損らす数’と見なされていたことがわかる．古代中国においては，負数＝損らす数を別の数に掛けたり・割ったりすることはなかった．

中国の正・負を学んだインド人は負数に対してより踏み込んだ見解を持つに至った．7 世紀の傑出した天文学者で数学者のブラフマグプタ（Brahmagupta，598〜668）は，773 年にイスラムに伝えられた天文学書は彼の主著『ブラフマスプタシッダーンタ』（628 年）であろうと言われているが，著書の中で正数を‘財産’，負数を‘借金’と解釈した．この財産・借金という解釈は正数と負数が数として対等であることを意味し，その見解は 12 世紀の優れた天文学者・数学者バースカラ（Bhāskara，1114〜1185）に

も受け継がれている．彼らは財産・借金の四則演算つまり加減乗除の全ての計算規則を，理論的基礎づけなしに，示した：$a, b, c > 0$ として，

2 つの財産の和は財産である：$a + b = c$
2 つの借金の和は借金である：$(-a) + (-b) = -c$
財産と借金の和はそれらの差に等しい：$a + (-b) = a - b$
⋮
ゼロから引かれる借金は財産となる：$0 - (-a) = a$
⋮
借金と財産の積は借金：$(-a) \cdot b = -c$
借金と借金の積は財産：$(-a) \cdot (-b) = c$
⋮
財産が借金で割られると借金：$a/(-b) = -c$
借金が借金で割られると財産：$(-a)/(-b) = c$

バースカラは，2 次方程式を解く際に現れる負数が正当な場合があり，それを用いると正しい解が得られることを明白に示している．これは真に負数を認知したことを意味する．その例を与える問題を実際に解いてみよう：

快活な猿の群れがお腹いっぱい食べおえて，遊びはじめた．群れの数の 1/8 を平方した頭数は草地で気晴らし中で，その残りの 12 頭の猿は森でつるにぶら下がり，跳びはねている．この群れの猿は全部で何頭か？

群れの全数を x 頭とすると，方程式は

$$x = (x/8)^2 + 12 \iff x^2 - 64x = -768$$

である．バースカラは，‘財産と財産の積は財産’・‘借金と借金の積は財産’を知っていたため，我々も行う正しい解法「平方完成」を用いて，正しい解を得ている：

$$x^2 - 64x = -768 \iff x^2 - 2 \cdot 32x + 32^2 = -768 + 32^2 = 256$$
$$\iff (x-32)^2 = (\pm 16)^2 \iff x - 32 = \pm 16 \iff x = \begin{cases} 32 + 16 = 48 \\ 32 - 16 = 16 \end{cases}$$

この問題では 48 頭と 16 頭のどちらも正しい解である．彼は，他の 2 次方程式の問題で，つじつまの合わない解が現れた場合には採用していない．

ところで，群れの全数を‘x 頭’としたことは，この未知数 x は現在我々がいうところの数つまり無名数（☞ p.11）であることに注意しよう．もし未知数がギリシャ流の単位付きの 数$_{\text{ギ}}$ = x【頭】だとすると，方程式は x【頭】= (x【頭】/8)^2 + 12【頭】となって【単位】が合わない項の和が現れ，意味のない式になる．ヨーロッパの学者が負数の認知に手こずったのはこの【単位】のせいである．そのせいもあって，正数・負数のインドにおける呼び名財産と借金はヨーロッパではかえって混乱をもたらした．

1.2.4　イスラムにおける代数学の発達

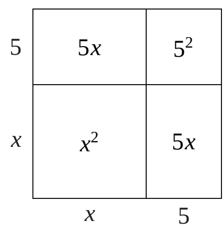
古来より数学の多くの問題は未知の数とそれを決める方程式からなっている．未知数に x などの文字や記号を用いて方程式の解法を研究する学問は**代数学**といわれる．未知数に初めて文字・記号を用いたのは 3 世紀のディオファントス（☞ p.24）で，彼は x およびその 6 次までの累乗の記号を記している（ただし，計算の際には記号を無視して言葉で述べた）．

古代バビロニアの数学を知っていたイスラム数学者は，アレクサンドリアからもたらされた古代ギリシャの著作を研究し，またインドからの知識を吸収して，代数学を発展させた．ギリシャ数学から学んだ最も重要なことは証明という観念である．‘代数方程式を解いても，得られた解の有効性を証明できない限りは，数学の問題を解いたことにはならない’ということをイスラムの学者は理解したのである[27]．彼らはギリシャ数学で行われていた幾何学的方法を代数的規則の証明に取り入れた．

ヨーロッパに 10 進位取り記数法と 0 を伝えた算術書で有名なアル・ファーリズミーは，825 年頃，さらに大きな影響をもたらした『アル・ジャブルとアル・ムカーバラの計算法についての簡約な書』を著作した．幾何的証明のついた例題を見てみよう．

（未知数の）平方と 10 個の（平方の）根で数 39 になる．根を求めよ．

根＝未知数を x とすると，方程式は

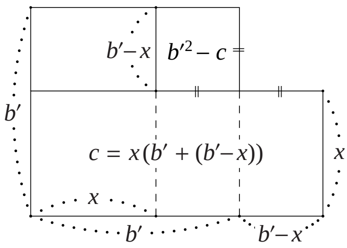


$$\begin{aligned} & x^2 + 10x = 39 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 = 25 + 39 \\ \Leftrightarrow\ & (x+5)^2 = 8^2 \end{aligned}$$

のように平方完成によって解かれ，正の解 $x = 8 - 5 = 3$ を得る．平方完成の正当化は，図からわかるように，未知数や係数を線分の長さに，定数は面積に見立てて行われた．したがって，それらは必然的に正の量でなければならない．

一方，問題「平方と数 21 で 10 根に等しい．根を求めよ」（$x^2 + 21 = 10x$）においては，単純に平方完成すると $(x + (-5))^2 = 5^2 - 21 = 4$ となって，負の線分‘-5’が現れてしまう（$(-5)^2 = +5^2$ の正当化もできない）．したがって，アル・ファーリズミーは，$x^2+21 = 10x$ のようなタイプの方程式は平方完成によって解かれるタイプ $x^2+10x = 39$ とは別物と考え，平方完成を行わない正当化を考えた．彼がそうしたように，一般化した問題 $x^2 + c = 2b'x\ (b', c > 0)$ で解説しよう．変形すると $x^2 - 2b'x + b'^2 = b'^2 - c$ で，左辺は $(x - b')^2$ または $(b' - x)^2$ を表す．彼は $b' > x$ の場合に，$c = x(2b' - x)$ つまり「c は 2 辺が x と $2b' - x = b' + (b' - x)$ の長方形」から出発し，$b'^2 - c$ つまり正方形

27）☞ p.1 脚注『カッツ 数学の歴史』p.277.



b'^2 の面積と長方形 c の面積の差が正方形となる図が描ける（つまり，解が存在する）こと，およびその正方形の 1 辺が $b' - x$ であることを示した（右図）．つまり，彼は $x^2 + c = 2b'x$ の解として $b' - x = \sqrt{b'^2 - c}$ を与え，その正当化を行ったのである（解 $x - b' = \sqrt{b'^2 - c}$ の正当化の方は省略している）．

以上の考えに基づいて，アル・ファーリズミーは 1 次・2 次方程式を解法別に 6 通りに分類した：

$$a, b, c > 0 \text{ として，} ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c$$
$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad bx + c = ax^2.$$

アル・フワーリズミーの解法は，古代ギリシャ流の幾何学的方法によって解の正当性を証明しており，ヨーロッパの学者に広く受け入れられることになった．与えられた問題を整理して 6 通りの解法に当てはめるには，負の項を移項して正の項になおし，同類項を簡約して整理する必要があるが，先に述べた著作の表題にある「アル・ジャブル」が移項,「アル・ムカーバラ」が簡約を意味する．この著作がラテン語に翻訳されたとき，アル・ジャブルは翻訳されずにそのまま代数学 (algebra) の名前になった．著者アル・フワーリズミーのラテン語訳アルゴリスムスもインド式算術の代名詞になり，今日の アルゴリズム (algorithm) の語源となってしまった.

1.2.5　中世ヨーロッパの数学

4 世紀後半，アジア系遊牧民族のフン族が西進し，その圧力に耐えきれずにゲルマン人の諸民族が次々とヨーロッパ各地に移動して建国していった．この大移動による混乱の中，西ローマ帝国は 476 年にゲルマン人の傭兵軍によって滅ぼされ，ヨーロッパは中世の時代に入った．関税や盗賊で陸上交通は不便になり，地中海の制海権も失なったため，貨幣経済を担っていた都市は衰退し，また穀倉地帯の属国も失って自給自足の経済に逆戻りしてしまった．まさに学問どころでない暗黒時代が続くのである．やがて徐々にキリスト教がヨーロッパ各国に広まっていき，第 1 回十字軍遠征（1096 年）の頃にはローマ教皇の権威が確立されて，ヨーロッパの国々はキリスト教信奉の統一体となっていた．そして，都市も発展して国力が増し，ヨーロッパからイスラム勢力を排除するのに成功した．12 世紀の中頃には製紙技術がようやくヨーロッパに伝わっている．

奪還した図書館で見つかったイスラムや古代ギリシャの重要な著作（☞ p.23）はラテン語に翻訳され，12〜13 世紀はヨーロッパの学者がそれらを理解・吸収する期間となった．その一人がその名を冠する数列[28] で有名なイタリアはピサのフィボナッチ（Leonardo Fibonacci，1174 頃〜1250 頃）である．彼は，イスラム文化圏を旅して知識

[28] フィボナッチ数列である．☞ 例えば，p.16 脚注の拙著 §§ 11.3.3.

を深め,『算盤の書』(1202 年) や『実用幾何学』(1220 年)・『平方の書』(1225 年) でイスラムの数学を初めて包括的な形でヨーロッパに紹介した．自治権を得て発展しはじめたイタリアの都市の測量術士や算法教師たちは彼の著作から多くを学び，特に例の数列を含む『算盤の書』は多くの写本が残るほど広く読まれた．この書の冒頭でインド・アラビア数字が紹介される様を見てみよう：

> インド人の用いた九つの記号とは，9，8，7，6，5，4，3，2，1 である．これら九つの記号，そしてアラビア人たちが " zephirum "（暗号）とよんだ，0 という記号を用いれば，いかなる数字も書き表すことができる．以下にそれを示そう．

彼の著作は 300 年以上の長きにわたって読み継がれ，ルネッサンス時代に入って新しい数学がようやく誕生することになる．

12 世紀の末，ヨーロッパの都市に大学が誕生した．その形態は様々で，教会の付属学校から出発したもの（パリ大学），教師のギルド（＝同業組合）から始まったもの（オックスフォード大学），学生のギルドを起源とするもの（ボローニャ大学）がある．例えば，ボローニャ大学では学生が教師を雇って給料を払うという具合である．当時の学校は校舎などの定まった建物を持たなかったことに注意したい．大学は学芸学部，法学部，医学部，神学部の全てまたは一部からなり，教師と学生はやがて各学部単位に独立した集団を構成した．

今風にいえば教養学部にあたる学芸学部では 6 年をかけて基礎学問を学ぶが，カリキュラムは古代の三科（論理学，文法，修辞学）と四科（算術，幾何，音楽，天文）で構成された．その中でも論理学が哲学的・科学的な探求の絶対的方法と考えられ，アリストテレスの論理学書がその基本テキストとされた．後には彼の他の著作も加えられた．

14 世紀になると，オックスフォード大学やパリ大学におけるアリストテレスの自然学関連著作の研究から運動に関する数学が発達した．速度の概念，その数年後には瞬間速度の概念が現れたのである．例えば，1335 年の著作[29] には非一様な運動体の瞬間速度が周到に定義されている：

> 非一様な運動において …… 任意の瞬間の速度は，運動する点が，その瞬間におけるのと同じ度合いの速さで，ある時間だけ一様に運動する場合に描くであろう道のりによって測られる．

残念ながら，このような新しい研究は歴史に埋もれ，そしてルネッサンス時代に再発見されるのである．

§1.3　ルネッサンス以降の数学

29) ☞ p.1 の脚注『カッツ 数学の歴史』p.361.