第1章　論証数学の誕生とその歴史

紀元前 3〜5 世紀といえば，日本では，弥生土器を使う人々が竪穴式住居で生活し水田で稲作をしていた時代である．その頃，古代のギリシャではすでに民主的な都市国家が成立していた．そこでは，ゼノンが “ アキレスは亀に追いつけない ” とか “ 飛んでいる矢は止まっている ” などという ‘ 証明 ’ を試み，その後まもなく，図形の研究からピタゴラス派が無理量[1]を発見したようである．そして，その後 1 世紀を経ずして，ユークリッドが，「点とは部分をもたないものである」という定義に始まる『原論』において，それまでの数学の基礎や理論を体系的・演繹的に叙述した[2]．ここに厳密な公理的論証数学が誕生したといえる．

そのギリシャ数学は首尾一貫した理論ではあった．それは，しかしながら，偏屈な部分を内包するという弱点があった．数は自然数（正しくは，基数）に限定され，0 や負数を数とは認めないことはもちろん，エジプトやバビロニアでは使われていた分数も数とは認めなかった．長さ・容積・重さなど連続的に変化するものは，数ではなく，「量」と見なされた．ギリシャ時代の後も，ヨーロッパの数学者たちはユークリッド『原論』の呪縛に縛られ，東方から 0 や負数がもたらされても何世紀にもわたって頑強に拒否し続けた．

しかしながら，ヨーロッパの学者達は，単に偏狭な思想に凝り固まっていたわけではなく，説得力ある厳密な論理に基づいた数の概念が新たに提示されるならばそれを受け入れ，さらに発展させる

---

1) 当時は「無理数」という概念が無かった．線分の長さは量とされた．

2) 数学史全般については，『グレイゼルの数学史 I·II·III』（保阪秀正・山崎昇 訳，大竹出版），『カッツ 数学の歴史』（ヴィクター J. カッツ 著，上野健爾・三浦伸夫 監訳，共立出版）を参照しました．詳細に関する部分は個別に参照します．

ことができた．17 世紀には，デカルトが数や量を線分の長さに対応させる理論を広め，その後ニュートンが同種の量の比という形で実数を定義するに至った．その後は，よく知られているように，ヨーロッパの数学は他の世界のそれを圧倒した．現在，数（＝実数）は数直線上の点と同一視され，その‘基本的振る舞い’を完全に規定する公理によって定義される．

この章では，ギリシャ数学の成立のみならず，ギリシャの数概念に特別の注意を払い，実数の公理的定義に至るまでの数概念の変遷を辿(たど)ってみよう．数概念の発展は数学全般の発展にほぼ一致している．

§1.1　古代ギリシャの数学と数

1.1.1　ギリシャ以前の数学

数は人類が集団生活を始めたときに発生したことは間違いない．言葉を話し，狩猟の獲物を分配し，農地を耕し，収穫物を分配するうちに数は人々の生活にしっかりと根付いたことだろう．農耕は人々の生活を豊かにし，多くの人々が集団で定住生活を行えるようになると文明が起こり，それが大きく発展するなかで文字の一部として数を表す記号（数字）が発明された．

数の和・差・積・商などの四則演算は集団生活の早い段階から現れ，測量・建築・軍事・天文などの技術の進歩と共に量の四則演算も発達した．実際，エジプトのピラミッドを見れば，現代のものにも匹敵する測量技術があり，数学が発達していたことの証拠になっている．

古代エジプトでは文字を書くのにパピルスから作られた巻紙を利用した．紀元前 1650 年頃に書記のアーメスによって筆写された巻紙『リンド・パピルス』は数学問題集であり，分数を用いた問題と答えが載っていた．例えば，3 番目の問題は「パン 6 斤(きん)を 10 人で分けるにはどうすればよいか」を問うている．そこに載っている答えは，$\dfrac{3}{5}$ つまり 1 斤の 3/5 ずつ取るのではなく，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \left(= \frac{6}{10}\right)$$

のように「単位分数」で表した．つまり，各自が半斤と 1/10 斤だけ受け取るとする方がわかりやすい．この単位分数による方法は 2000 年以上にわたって東地中海沿岸で使われた．

一方，メソポタミア南部に栄えたバビロニアの数学は，計算に便利な「位取り記数法」を用いたために，エジプトの数学に比べてはるかに進歩していた．当時の数学の内容は楔形（くさびがた）文字で書かれた粘土板に保存されており，乗法や除法の表に加えて，逆数・冪（べき）・根（こん）・指数計算の表があり，また数学の問題と解答を記した粘土板がハンムラビ王の時代を含む古バビロニア期（前 19 世紀～前 17 世紀）に集中して見出されている．

バビロニアでは 60 進法がとられ，数を表すのに 2 つの楔形記号 𒁹（＝ 1）と 𒌋（＝ 10）を組み合わせて用いた．例えば，25 は 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹，73 は位の違いを示す隙間を付けて 𒁹 𒌋𒁹𒁹𒁹 である．ただし，位の違いを表すのに便利な「0」や小数点「.」に当たる記号がなかったので，例えば 𒌋𒁹 は 11 だけでなく，11×60 とか 11/60 その他なども表し，それらの違いは文脈から読みとられた．この位取り記数法によりバビロニアの数学は単位分数に苦労していたエジプト数学を圧倒し，ギリシャ数学がそれに追いついたのはようやくユークリッドの時代に入ってからである．

数値計算にそれほど苦労せずに済んだバビロニアでは，エジプトでは扱われなかった，2 次の代数問題にも取り組んだ．

> 長さと幅がある．長さと幅をかけて面をつくった．長さが幅より多い分だけ面に加えると 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹（＝ $3 \times 60 + 3$）である．長さと幅を加えると 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹（＝ 27）である．長さと幅，面はそれぞれいくらか．

長さを x，幅を y とすると

$$xy + (x - y) = 183, \qquad x + y = 27$$

である．解答は，$y' = y + 2$ とおいて，対称形 $xy' = 210$，$x + y' = 29$ に導き，

その解法のパターン[3)] にしたがって解 $x = 15,\ y = 12$ を得ている．この例では，長さを面積に加えるという，次元の区別を無視した計算をしているが，むしろ次元を考慮しない無名数としての数は同じ計算法則に従うことを了解していたと見ることができる．

1.1.2　ギリシャ数学の夜明け

ギリシャ人は紀元前 20 世紀～前 12 世紀の間に 3 派が北方からギリシャ地方に南下した．ギリシャの国土は山がちで起伏がはげしく，海岸線は入り組んでいて岬や入江が多い．そのため，居住に適した土地は散在する平野に限定され，土地も痩せていて収穫が足りず，ギリシャ人は貿易を主とする都市国家（ポリス）を形成した．紀元前 8 世紀半ば以降には植民やオリエントとの交流によって国力が増し，ギリシャ人市民数万人とその数割にも達する奴隷からなる人口を抱えるポリスも現れた．

ポリス間には戦争が絶えなかった．山岳地帯が多いため貴族層からなる騎兵部隊の機動力は落ち，重装備の歩兵が密集陣形で突撃する戦術が発達した．歩兵部隊は自前の武器を持参した自由農民である．また，海戦においては，武器を持たない自由貧民も軍船の漕ぎ手となって活躍した．そのためポリス自由市民はその政治的地位を大いに高めていき，ギリシャの「民主政」を築く原動力になった．その民主的社会とは，地位を高めた特権市民が奴隷を支配・搾取し，それによって得た暇な時間を使って政治や戦争に参加する，社会体制としては真正の奴隷制社会であった．

奴隷を労働させることによって暇を得た市民は，初期の頃，戦争に備えて体を鍛え，政治談義に日々を送ったことだろう．私立の学校では読み書き・音楽・体練術を青少年に必須の一般教養とした．文字として，学習に苦労するエジプトの象形文字やメソポタミアの楔形文字でなく，表音文字を使用したことも市民の読み書きを可能にし，高度な知識を普及するのに役立った．人々は，

---

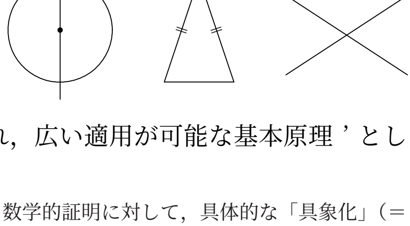
3) 連立方程式 $\begin{cases} x+y=p \\ xy\ \ =q \end{cases}$ $(x>y>0)$ において $\sqrt{p^2/4-q} = \sqrt{(x+y)^2/4-xy} = (x-y)/2$. よって，$x+y=p,\ x-y=2\sqrt{p^2/4-q}$ より，公式 $x=p/2+\sqrt{p^2/4-q},\ y=p/2-\sqrt{p^2/4-q}$ が得られる．参考：伊東俊太郎 著『ギリシャ人の数学』（講談社学術文庫，1990）．

議論と討論の技術を学ぶ素地ができ，筋道を立てて考えを進めることにも徐々に慣れていった．学問好きな者達は，全く実用的ではない事柄についても，自由に思索し，喧喧諤諤（けんけんがくがく）の議論を行うようになっていったことであろう．その結果，ギリシャの人々は古代から伝えられてきたことをそのまま受け取ることが少なくなり，やがて創造的な精神活動を行う才知に満ちた人物が次々と現れることになる．

ギリシャ人が東地中海全体に及ぶ地域に植民して生活水準が上昇するにつれ，オリエントの国々との交易も栄え，有能な人材が行き来するようになった．多くの分野にわたる未知の知識や技術もギリシャに流入した．その中には，もちろん，エジプトやバビロニアの数学や自然科学なども含まれる．ギリシャの発展期にオリエント貿易に有利なのはギリシャ東部のイオニア地方で，そこはエーゲ海に面した現在のトルコ南西部にあるギリシャの植民地であった．

そのイオニアのミレトスにある名門の家系から，後にギリシャ哲学および科学の創始者といわれるターレス（Thales，前 624 年～前 546 年頃）が生まれた．若い頃彼は恵まれた境遇とギリシャ的雰囲気の中で知性を磨き，合理的思考を強めていったと思われる．青年時代，ターレスは商業活動に手を染め，エジプトに長らく滞在したことがある．そのとき神官から測量術を学び，ミレトスに帰ってからは研究に心血を注ぎ，弟子達を教育した．

ターレスの合理的思考の精神は，エジプトから持ち帰った知識を鵜呑（うの）みにせず，論理的に徹底的に反芻（はんすう）吟味して結論を導いた．そのことがギリシャ数学の伝統を生みだす源泉になったのである．エジプトの学者は「円の直径はその円を二等分する」，「二等辺三角形の底角は等しい」，「対頂角は互いに等しい」ことなどを経験的に知っていたが，それで満足していた．それらを‘証明した’[4] 最初の人がターレスであるという古い記録がある．その証明の詳細は残されていないが，‘自明と見なされ，広い適用が可能な基本原理’とし



[4] ユークリッドより古い時代のギリシャ人は，数学的証明に対して，具体的な「具象化」（＝目に見えるようにすること）と理解していた．例えば，A.K. サボー 著『数学のあけぼの』（伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全（たもつ） 訳，東京図書，1976）第 1 部 1．

て「互いに重なり合うものは互いに等しい」という明白な事実を考えてみよう．そうすると，円の二等分問題は円を直径で折って重ねて見せる簡単な証明が可能であり，二等辺三角形の問題では，三角形を裏返した三角形をつくり，それを元の三角形に重ね合わせるという証明ができることがわかる[5)]．重要なことは，**すでに知られている事実を単に受け入れるのではなく，より基本的な一般原理まで還元し，そこから証明するという態度である**．この点において，ターレスはギリシャの論証数学の第一歩を踏み出したといえる．

基本原理を追求するターレスの精神は，また，自然現象を観察する際にも現れ，自然現象全体にわたる統一的な第一原理を探し求めた．この世界の起源については，それまでは神話的説明のみであったが，ターレスは「万物の根源」（アルケー）なるものを創案し，それによって世界を構築しようとした．具体的には，水から全ての存在が誕生し，最終的に再び水に帰ると主張した．

さらに，ターレスは，後に詳しく議論するが，ギリシャ数学における「数」を定義した最初の人でもあった．その定義は，しかしながら，その後 2 千年以上にわたってヨーロッパ数学を呪縛する元凶ともなった．

1.1.3　公理的論証数学の誕生

現在の厳密な論証数学の起源は，紀元前 300 年頃にアレクサンドリアで活躍したといわれる，ユークリッド（Euclid，前 365 年頃〜前 275 年頃）の手に成る『原論（ストイケイア）』にある．この名著において，彼は，過去の業績を編纂し，また新たな証明を付け加えて，論証的学問としての数学を確立した．

厳密な論証数学を打ち立てるためには，論証の前提となる定義（＝用語の明確な意味）や公理（＝理論の出発点として，証明なしに採用される主張）の概念が明らかになり，論証を実行するために必要な「三段論法」や「背理法」などの技術が確立されることが不可欠である．以下，論証数学の生い立ちという観点から『原論』の成立を調べてみよう．

『原論』の第 1 巻はいきなり次のように始まる：

---

5) 例えば，数学の歴史 I『ギリシャの数学』（彌永昌吉・伊東俊太郎・佐藤徹 著，共立出版，1979）第 1 章 第 1 節タレス 参照．対頂角の問題でも，重ね合わせを用いた証明であったと推測されている．

定義（ヒュポテシス）

1　点とは部分をもたないものである.

2　線とは幅のない長さである.

3　線の端は点である.

⋮

23　平行線とは，同じ平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である.

公準（アイテマ）（次のことが要請されているとせよ）

1　任意の点から任意の点へ直線をひくこと.

2　有限直線を連続して一直線に延長すること.

3　任意の点と距離（＝半径）をもって円を描くこと.

4　すべての直角は互いに等しいこと.

5　一直線が二直線に交わり，同じ側の内角の和が二直角より小ならば，この二直線は，限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側において交わること.

公理（アキシオマ）

1　同じものに等しいものはまた互いに等しい.

2　等しいものに等しいものを加えれば全体は等しい.

3　等しいものから等しいものを引けば残りは等しい.

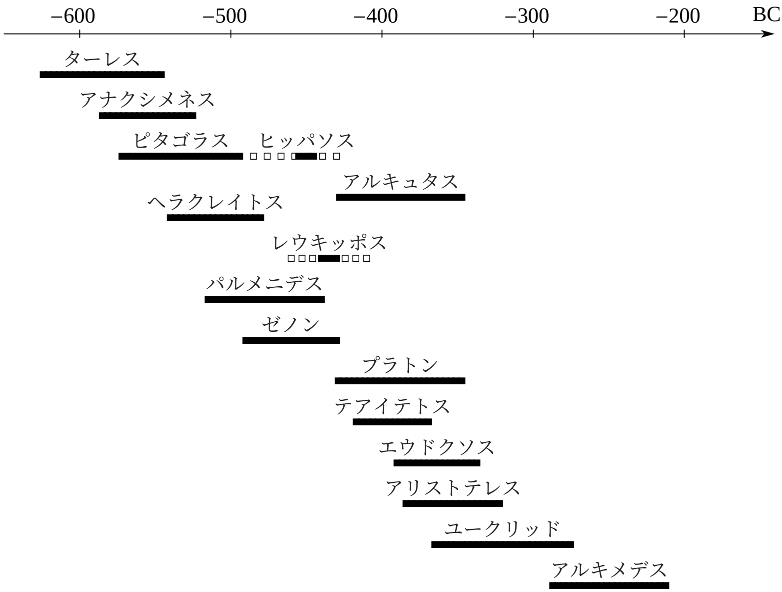
4　互いに重なり合うものは互いに等しい.

5　全体は部分より大きい.

この書き出しのように，議論の出発点を明々白々にし，その第一原理に基づいて厳密に論理的な演繹を行うことが，すでに紀元前 300 年頃には，なされていた．古代ギリシャでのみ発達したこの公理的論証数学，その起源はどこにあるのだろうか．それを探ってみよう.

紀元前 6〜5 世紀のギリシャは，ターレスの影響もあって，哲学が盛んになった．アルケーを空気とするミレトス学派のアナクシメネス（前 585〜前 525），ピタゴラス派とされる‘ 万物流転 ’を説くヘラクレイトス（前 540 頃〜前 480 頃），デモクリトス（前 460 頃〜前 370 頃）の「原子論」の基礎を築いたレウ

キッポス（活動期：前 440〜430 年頃），また（後で議論するが）‘ 不動不変 ’ の「唯一者」を説くエレア派のパルメニデス（前 515 頃〜前 440 頃？）とその弟子のゼノン（前 490 頃〜前 430 頃）などを代表格とする多くの哲学者達が覇を競い合った．



学者達は自分の派内・派外で多くの討論・論争を行って説得の技術を高め，また自己の理論を一段と昇華していったことであろう．いま，A と B が議論をしていて，A はある主張をし，B はそれを疑ったとしよう．B は A の主張の根拠を問い，A はそれに答えるが，B は納得せず，さらに根拠を求める．これを繰り返して，A の主張の根拠となる根本的な前提が明らかにされる．B がその根本前提を受け入れれば，その議論は成立するが，そうでなければ議論は物別れになる．実際の議論では，相手の根本前提そのものを論破しようとする苛烈な場合もあったことだろう．しかしながら，ある根本前提を誰もが認めるならば，それは万人の議論の出発点をなす第一原理となる．

ハンガリーの古典言語学者・数学史家 アルパッド・サボーは,「ヒュポテシス」（定義）・「アイテマ」（公準）・「アキシオマ」（公理）という古代ギリシャ語の意

味の時代変遷に注目し，1960 年に始まる一連の注目すべき研究を発表した[6]．彼は詳細な分析の後，「ヒュポテシス」は本来「討論の相手によって同意された仮定」を意味し，「アイテマ」は「相手の同意が得られないとき，仮に議論を進めるために，論者の一方が要請するもの」，また「アキシオマ」は「討論の双方が是認するというよりは，誰もが自明と認める前提」であったとの結論に達した．古代ギリシャの前 5 世紀には，すでに，これらの仮定・前提に基づく厳密な議論・討論が行われていたのである．そのためには，自説の正しさを証明し，誤った説を論破する論証術がすでにあったとみるのが自然である．その論証術について，サボーは，南イタリアにあるギリシア植民都市エレアで活動していた，前ソクラテス期の哲学の 1 学派であるエレア派に照準を合わせた．

エレア派のパルメニデス（Parmenides，前 515 頃〜前 440 頃？）とその弟子ゼノン（Zenon，前 490 頃〜前 430 頃）―‘ アキレスは亀に追いつけない ’ の逆理で有名― は万物の根源を「不動・不変で不生・不滅な唯一の完全なる存在」[7] であると主張した．彼らがこの実に珍奇な説の主張に用いた方法が，サボーに注目された，間接証明法（＝帰謬(きびゅう)法＝背理法）である．間接証明法は「ある事柄 P を証明したいときに，‘ P が成り立たないとすると矛盾が起こる ’ ことを導き，‘ よって，P は成り立つしかない ’ ことを示す方法」である．パルメニデスの哲学詩 [6] の中にその 1 例（らしきもの）がみてとれる．

　女神が探求の道を説いている：
一つは，（それは）ある，そして（それが）あらぬことは不可能である，という道．
これは説得の女神（ペイトー）の道である（なぜなら彼女は心理の女神にかしずくがゆえ）．
もう一方は，（それは）あらぬ，そして（それが）あらぬことが必要である，という道．

---

6) アルパッド K. サボー 著『ギリシャ数学の始原』（中村幸四郎・中村清・村田全 訳，玉川大学出版部，1978）．これは専門書である．入門編：村田全 著『数学史散策』（ダイヤモンド社，1974；参考サイト：`http://redshift.hp.infoseek.co.jp/scilib.html`），同 著『数学史の世界』（玉川大学出版部，1977），伊東俊太郎 著『ギリシャ人の数学』（講談社学術文庫，1990）．

7) M. スコフィールド 他著『ソクラテス以前の哲学者たち』【第 2 版】（内山 勝利 他訳，京都大学学術出版会（英語版：1983））

> これは全く持って識別不能の道であると私（＝女神）はあなたに言明する．というのも，あなたはあらぬものを知ることはできないであろうし
> — それはなされえない —
> またそれを指し示すこともできないであろうから．

古代ギリシャ語からの翻訳は難解であるが，解説すると，“ 第 1 の道は ‘ ある ’（＝存在する）という道である．そのとき，あらぬ（＝存在しない）ことはあり得ない．一方，第 2 の道は ‘ あらぬ ’ という道である．そのとき，あらぬことが必然であり，あることは不可能である．あるかあらぬかは二者択一である．このとき，あらぬものを認知し，識別し，それを指し示すことはできない．したがって，あらぬ道を考えても意味がないので，その道は捨てられ，結果としてある道の方が選ばれなければならない ” ということのようである．

確かに，（現在では笑止千万な ‘ 証明 ’ ではあるが）背理法になっている[8)]．また，ゼノンの ‘ アキレスは亀に追いつけない ’ という逆理は，‘ アキレスは亀に追いつける ’ と仮定すると矛盾するという背理法になっている．背理法は実際に『原論』の多くの定理の証明に用いられた．ゼノンの逆理に関しては後で詳しく取り上げよう．

エレア派の現実からかけ離れた「不動・不滅の存在」は，意外に思われるだろうが，理性を重んじるプラトン（Platon，前 427〜前 347）に好感を持たれたようである[9)]．プラトンは精神の育成という観点から数学を重視し，商用などの目的のために数学を学ぶべきではないと説いた（この彼の姿勢は，ギリシャ数学の理論的側面の発展を促す一方，実学的側面の停滞をもたらした）．彼の学園には当時の名だたる数学者が集まり，一致協力して研究・教育に従事した．彼の学園の一員テアイテトス（Theaitetos，前 415〜前 369）は『原論』

8) 不動・不変や不生・不滅の ‘ 証明 ’ についても，ある と あらぬ を関係させる，背理法が可能である．例えば，不動については，‘ 運動があるとする．すると，ある場所で，ある状態からあらぬ状態になるのは あらぬ を巻き込む．それは不可能 ’ という ‘ 証明 ’ ができる．パルメニデスはこの後 “「あるもの」は完全なる「唯一者」（＝唯一の不動不変・不生不滅の存在）である ” と断定するが，‘ 唯一 ’ についての根拠は理解不能．後の議論で（‘ 唯一 ’ を取り去った）「一者」を自然数の 1 と関連して取り上げる．

9) プラトンは，生成変化する物質界の背後には，永遠不変のイデアという理想的な雛形があり，イデアこそが真の実在であるとした．不完全である人間の感覚ではイデアをとらえることができず，理性で認識することによってのみイデアに至るとした．

第 10 巻と第 13 巻に貢献し，エウドクソス（Eudoxos，前 390 頃〜前 337）は第 5 巻と第 12 巻に貢献した．また，学園の学徒アリストテレス（Aristoteles，前 384〜前 322）は論理学の発展に寄与し，論証に不可欠の技術である三段論法を確立した．三段論法は「p から q が導かれ，q から r が導かれるならば，p から r が導かれる」という論証法である．先に議論した『原論』の「公理」と「要請」のあいだに明瞭な区別を設けたのはアリストテレスだといわれている．

次に，ギリシャ数学のもう一つの特徴である‘数と量の分離’について，その起源・原因を探ってみよう．

1.1.4　ギリシャの数

始めに数（数詞）について予備の議論をしておこう．日本古来の数は，よく知られているように，ひとつ，ふたつ，みっつ，$\cdots$ であり，漢字が渡来して後は，それらは 一つ，二つ，三つ，$\cdots$ のようにも書かれるようになった．その接尾語【つ】は多くの場合【個】を意味し，それらは 1 個，2 個，3 個，$\cdots$ などと個数を表す．一般に個数を表す数を**基数**といい，1 個，2 人，3 本，4 頭，$\cdots$ は基数の例である．英語で基数に当たるものは one, two, three, $\cdots$ である．英語では，順序を表す数 first, second, third, $\cdots$ (=1st, 2nd, 3rd, $\cdots$) があり，それらを**序数**という．基数と序数を区別するのはインド・ヨーロッパ語族に特徴的であり，古代ギリシャ語もその族に含まれる．日本を含む漢字文化圏では元来基数と序数を区別する概念はない．

接尾語【つ】を取り去った一，二，三，$\cdots$，および対応する $1, 2, 3, \cdots$ は，もはや個数や順序を表さない **無名数**（＝単位の名称や助数詞の付かないただの数）であり，それらは現在我々がいうところの「自然数」である．その自然数こそが，近代数学において，「実数」に拡張されていく数なのであるが，古代ギリシャの数学に現れる数は，個数の意味が付帯された，基数の方であることに注意しよう．基数の概念は 2 千年にわたってヨーロッパの数学に縛りをかけ，それから抜け出すきっかけが得られたのは 17 世紀になってルネ・デカルトが『幾何学』を著してからである．

「量」についても予備の議論をしておこう．量とは，1m, 2.3kg, 4 時間，5 個，600 円 など，一般に，大小の比較の可能なものや測定の対象となるものについ

て，その長さ・重さ・時間・個数などをいう．したがって，量は，無名数である実数に尺度の単位を付けたもの，または基数すなわち自然数に個数を表す単位を付けたものである．量は基数を含む概念であることに注意.

さて，古代ギリシャに戻ろう．古代ギリシャで数に関する定義を最初に行ったのはターレスとされている．彼は数を‘いくつかの「単位」の集まり’と定義した[10]．これはユークリッド『原論』第 7 巻の定義によるものとほとんど同じである：

> 定義 1　単位とは，存在するそれぞれのものが，それによって「**一**」と呼ばれるものである.
>
> 定義 2　数とは，いくつかの単位からなる多である.

「単位」の意味がわかりにくいが，調べてみると，19 世紀の数理論理学者 G. フレーゲによって議論されている[11]：

> ユークリッドが『原論』第 7 巻の冒頭部で与える諸定義において，彼は *μονάς*（モナス）という語で，あるときは**数えられるべき対象**を，あるときは**そのような対象の性質**を，あるときは**数一**を表示しているように思われる．我々はいつでも「単位」という訳語で間に合わせているが，しかしそれが可能なのは，この訳語自体がこれらの異なった意味の間で揺れ動くからにすぎない．（太字部分は著者の注）.

彼の議論から，（リンゴ）5 個を考えているときは単位は【（リンゴ）1 個】と考えられ，その数をギリシャ特有の数と見なして $\text{数}_{\text{ギ}}$ と書くと，$\text{数}_{\text{ギ}} = 5$【個】となるので，$\text{数}_{\text{ギ}}$ は基数と見なすことができる．市民 6 人では $\text{数}_{\text{ギ}} = 6$【人】，馬 7 頭では $\text{数}_{\text{ギ}} = 7$【頭】のように考えていくと，「単位」は量における m, kg などの単位と違いはない．古代ギリシャ人は数を考えるのに際し，数を与える対象の性質を重視し，その性質を持つ最小単位のものの集まりをもって数としたのであろう．基数の起源はこのようなものであったのだろう.

古代ギリシャ時代を通じてそしてそれ以後も，「単位」＝「**一**」は分割不能な対象と見なされたことに注意を払おう．確かに単位が例えば【1 人】ならそれ

---

[10] T.L. ヒース 著『復刻版 ギリシャ数学史』（平田寛 他訳，共立出版）I 巻 3.

[11] フレーゲ著作集 2『算術の基礎』（野本和幸・土屋俊 編，勁草書房）第 29 節.

を半分にしたら人でなく死体になるから，人という意味を失わないためには分割してはいけないことになるだろう．ただし，ギリシャ人は，定義によって，「単位」を分割不能としたようである．このことに関する最も明確な記述をプラトンの『国家』から引用しよう[12)]：

> ⋯ 君もおそらく知っているとは思うが，この学問の専門家は，純粋な「**一**」を議論の上で分割しようとする人があっても，これを一笑に付して相手にしないものである．むしろ，もし君が **一** を細分割したら，彼らは（その分だけ）多化するだろう．もっとも，その間において，**一** が **一** でなくて多者（＝多くの部分の集まり）だと思われないように用心しながらね．⋯

この分割不能は，数$_{\text{ギ}}$ を割り算して分数にすることを不可能にし，その結果，実用数学の発展を遅らせた．ギリシャの商人や大工，技師などは計算に分数を使っていたが，数学者はそれを全く無視し，それはアルキメデス（Archimedes，前 287〜前 212）が π や面積の近似計算をするまで続いた．数学者は分数が必要なときは，数$_{\text{ギ}}$ の比，つまり「数$_{\text{ギ}}$：数$_{\text{ギ}}$」を用いたのである．

1.1.5　無理量の発見

ミレトスのターレスに遅れること約 50 年，同じイオニア地方にあるサモス島にピタゴラス（Pythagoras，前 572 頃〜前 494 頃）が生まれた．ピタゴラスはターレスの勧めでエジプトに留学したが，その最中にたまたまペルシャ軍がエジプトに侵攻した．それを機に，彼はバビロニアにまで足を伸ばしたらしい．エジプトよりはるかに進んでいたバビロニアの数学を持ち帰ったことが後にピタゴラス学派の創設に導いたのは間違いない．イオニアでは，前 540 年頃から，ペルシャ軍が多くの都市を圧迫したため，人々は南イタリアに逃れてポリスを建設するようになった．ピタゴラスも 40 才の頃クロトンに移住することになったが，エレアもそのような避難民の都市であり，パルメニデスが生まれている．かくしてギリシャ文化の中心はイオニアから南イタリアに移動した

[12)] 例えば，A.K. サボー 著『数学のあけぼの』（伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全 訳，東京図書，1976）第 I 部 3

のである．

クロトンでピタゴラスは一種の哲学的秘密宗教団体を創設し，そこでは数学・音楽・哲学の研究が重んじられた．ピタゴラスは，今では，数学者であったとする根拠がかなり乏しくなっているが，バビロニアの数学を弟子に教育し，そこからピタゴラス学派と呼ばれる数学者達が育っていったことは間違いない．例えば，ピタゴラスの定理[13]を満たす 3 辺の整数解（例えば，辺の比が 3 : 4 : 5 とか 5 : 12 : 13 となる整数）は，既にバビロニアで，

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \quad y = m, \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \qquad (m\ \text{は奇数})$$

と実質的に同一なものが知られていたのだが[14]，定理そのものの一般的証明はピタゴラス派の手になる．整数解の存在はピタゴラス派にとって重要である．

ピタゴラス教団は魂の不死と輪廻への信仰が中核にあり，魂の浄化の重要な手段として用いられたのが音楽であった．その目的のために音楽の理論的な研究が熱心に行われ，その過程において現在の音楽理論の基礎となる大発見が弦楽器においてなされた．弦の長さが 2 : 1，3 : 2，4 : 3 の整数比の場合に 2 つの音が美しい「協和音」になるということである．

弦の振動理論も援用して説明しよう．単位長さ当たりの質量（＝線密度）$\overset{\text{ロー}}{\rho}$，長さ ℓ の弦を張力 T で引っ張り，両端を固定しておいて振動させるとしよう．このとき，弦の基本振動数 f は

$$f = \frac{\sqrt{T/\rho}}{2\ell}$$

で与えられることが知られている[15]（弦の倍振動は今の議論には無関係）．上の式は，線密度 ρ（$\propto$ 弦の太さ）と張力 T を固定するとき，弦の振動数 f は弦の長さ ℓ に反比例することを示している．例えば，弦の長さが半分になると振動数は 2 倍になる，つまり元の音がドのときは 1 オクターブ上のドの音になり，それら 2 音を完全 8 度音程の協和音という．また，弦の長さが $\frac{2}{3}$ になると，振動数は $\frac{3}{2} = 1.5$ 倍になる，つまり元の音がドならソになり，それらは完

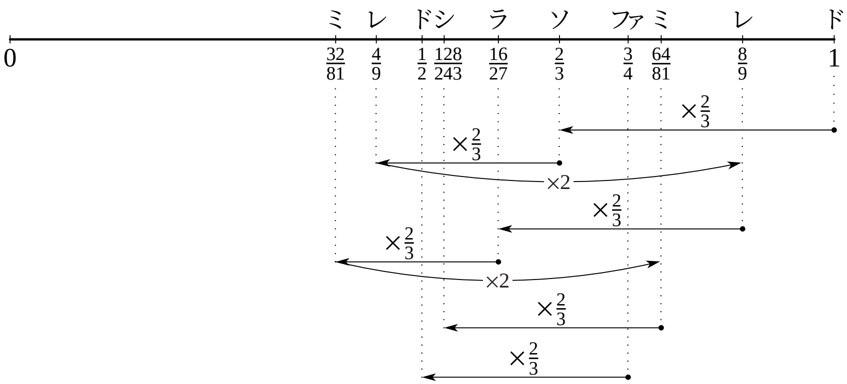
---

13) 「3 辺 x，y，z の三角形（斜辺 z）が直角三角形である条件は $x^2 + y^2 = z^2$ である」

14) ☞ p.6 の脚注，『ギリシャの数学』第 1 章 第 2 節.

15) 例えば，拙著『高校数学 $+\alpha$ なっとくの線形代数』（共立出版）§5.3.

全 5 度音程の協和音と呼ばれる．ピタゴラス派は協和音に秘められた自然の摂理を探し求め，下に図解するように，完全 5 度音程（弦の長さの比 3 : 2）を用いてドレミファソラシド長音階の基礎を歴史上初めて確立した[16)]．



直角三角形の辺の長さの整数解，また協和音と弦の長さの整数比の関係はピタゴラス派が‘万物は数である’という結論を神の啓示として受け入れるのに十分であったろう．彼らは数つまり 数$_{\text{ギ}}$（＝基数）を全ての自然現象・哲学・数秘術に適用した．さらに，長さを比較した際に現れる整数比から，彼らは，「点」と呼ぶ‘分割できない最小の長さ’が存在し，一般の長さはそれの整数倍で表される，と結論した．すなわち，ピタゴラス派は，算数における（分割不能な）「単位」と幾何学における「点」を比較し，

　単位とは‘位置のない点’であり，点とは‘位置を持つ単位’である

と定義したのだった[17)]．したがって，数$_{\text{ギ}}$ に比較されるピタゴラス派のいう長さを 長さ$_{\text{ピ}}$ と書くとき，「点」の大きさを例えば原子の大きさ 1Å (= 10^{-8}cm)

---

16) 長さ 1 の弦がドの音を出すとして，$\frac{2}{3}$ ずつ短くし，$\frac{1}{2}$ より短くなったら（1 オクターブ以内に収まるように）2 倍する．ただし，ファは $\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{2}$ 倍した弦長 $\frac{3}{4}$ の音（上のドから 5 度下げた音）．
参考サイト：`http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/monocode/monocode_index.htm`

17) ☞p.12 の脚注『復刻版 ギリシャ数学史』I 巻 3．同『ギリシャ数学史』第 1 章 第 2 節 (a)．

とすると，長さは‘単位’【点】＝【Å】の集まりによる長さということになるから，

$$長さ_{ピ} = （自然数）【Å】$$

の形で書かれることになる．ともあれ，‘単位’【点】＝【Å】は分割不能であるから，長さ$_{ピ}$を限りなく分割することはできないのである．

前 5 世紀半ばに近づく頃であろうか，ゼノンは，師パルメニデスの主張した「唯一不動の存在」，したがって，運動は存在しないという主張を弁護すべく，「二分割」・「アキレス」・その他のパラドックスを提出した：

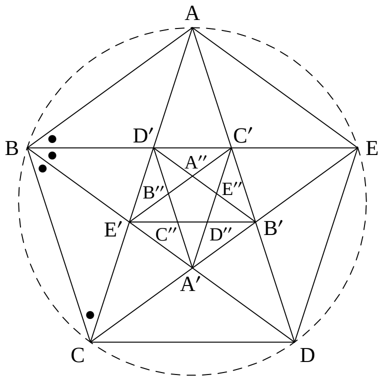
> 二分割 : 運動は存在しない．なぜなら始点から終点までの移動は，終点に達する前に両者の中間，すなわち中点に達しなければならない．この中点に達するためには，この中点と始点との中点に達しなければならない．以下同様である．ところが，有限の時間内に無数の地点に触れることは不可能である．ゆえに運動は存在しない．
>
> アキレス： アキレスは亀を追い越せない．ただし，アキレスは亀より後の位置から出発するとする．すると，アキレスが亀を追い越すには，まず亀の出発点に達しなければならない．そのときには亀はその先の地点にいる．以下同様である．こうしてアキレスは亀を追い越すためには，無数の地点に触れなければならない．これは不可能である．したがって，彼は亀を追い越せない．

二分割のパラドックスは始点から終点までの距離を無限に分割したとき，それらの断片を全て加えることは無限級数を求めることになるが，そんな和は当時は収束しないと思われていた．したがって，始点から終点までの距離は無限になる，という主張である（‘無数の地点に触れる’とは長さの断片の無限級数を求めることと同じ）．アキレス についても，同様に，時間の断片の無限級数は収束しないから，追いつけないという主張である[18]．

ピタゴラス派から見れば，ゼノンのパラドックスは，長さは無限に分割可能であり，したがって，‘単位’【点】も分割可能という主張に映る．これは由々しき一大事であり，その真偽を確かめずにはいられなくなった．その試みを実際

[18] その解決については，例えば，☞ 拙著『高校数学 $+\alpha$：基礎と論理の物語』§11.6.

に行ったのはヒッパソス（Hippasus，前 5 世紀中頃に活躍）であるという伝承はよく知られている．彼は 12 個の正五角形の面で囲ってできる正十二面体[19] の研究に関わり，またピタゴラス教団の紋章が五芒星(ごぼうせい)図形☆であったことから，彼は無理量を正五角形の 1 辺と対角線の関係から発見した[20] という学説がある．伝承によると，彼はピタゴラス派の中で秘密にすべき無理量の発見を外部に漏らしたため，神の怒りに触れて海で命を落としたとあるが，最近の数学史家達の研究によると，それを信ずべき根拠は乏しいようである．ともあれ，前 430 年頃，無理量をピタゴラス派の誰かが発見し，（秘密を漏らしたか，発見を公表したかは別として）そのことがギリシャ数学に与えた影響は計り知れないものがあったのは事実である．



なお，アリストテレスの著作には背理法を用いた無理量の証明方法が載っており，その方法が証明の決定版であり，その方法で無理量が発見されたとする

---

19) ☞ ウェブサイト:「正十二面体 - Wikipedia」で回転している立体図が見られる．

20)　以下の議論において，上の正五角形図の辺 AB と対角線 AC が両者に共通な単位【点】の整数倍の長さ（以下，倍数長 と記す）であるとすると矛盾することを示す．

AB = n【点】，AC = m【点】（m, n は自然数）とするとき，AC−AB = ($m-n$)【点】は【点】の倍数長である．これは「自然数 m, n の公約数は差 $m-n$ の約数である」と同質の定理．

※ AB = CD′，CE′ = A′C′ などの証明は各自に任せる．

さて，AC−AB = AC−AE′ = CE′ = A′C′ は【点】の倍数長．

したがって，AB−A′C′ = AE′−D′A = D′E′ = A′B′ も【点】の倍数長．

以上の議論から，正五角形 ABCDE の辺 AB と対角線 AC が共に【点】の倍数長のとき，それに含まれる正五角形 A′B′C′D′E′ の辺 A′B′ と対角線 A′C′ も共に【点】の倍数長．同様にして，それに含まれる正五角形 A″B″C″D″E″ の辺 A″B″ と対角線 A″C″ も共に【点】の倍数長である．これらの操作は【点】の倍数長から【点】の倍数長を引く操作であり，それを続けていったとき，もし【点】が共通の尺度 (> 0) ならば，操作は有限の回数で終わるはずである．しかしながら，図からわかるように，この操作は限りなく続き，いくらでも小さい正五角形が描け，かつその辺と対角線は共に【点】の倍数長である．こんな場合には，正五角形はいくらでも小さくなり，したがって【点】は限りなく小さい量でなければならない（このことは分割不能な【点】なるものは存在しないことを意味する）．したがって，元の辺や対角線を（共通の尺度としての）【点】の倍数長として表すことは無意味である．この事実は，長さは 無理量（＝ある尺度の無理数倍の量）であることを示している．

説も有力である．以下，その現代的な証明の一部を載せるので，続きは各自で補ってみよう．1 辺が a の正方形の対角線を b とすると，$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$．長さの尺度を【1cm】にとるが，以下略記して，線分は数として扱う．a, b が分数であるとき，$b^2 = 2a^2$ の分母を払いまた約分して，a, b は公約数がない自然数としても一般性を失わない．このとき，$b^2 = 2a^2$ から，a, b が共に偶数であることを示して，矛盾を導く．以下，省略する[21]．

数の概念を長さなどの量にまで拡張しようとしたピタゴラス派の目論見はもろくも潰えたが，その名残は，ピタゴラス派のテアイテトスの業績を記述したといわれる，ユークリッド『原論』第 X 巻の定義 1 に残されている：

> 同じ尺度により割り切られる量は「通約量」といわれ，いかなる共通の尺度も持ち得ない量は「非通約量」といわれる（通約＝約分）．

通約量は

量 ＝（自然数）【尺度】

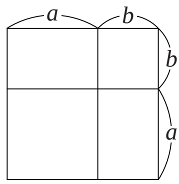
と表したときのみ可能であり，本当は【尺度】を【点】と書きたかった悔しさが滲んでいるようにも読み取れる．現在におけるその正しい表現は

量 ＝（実数）【尺度】

である．

無理量が発見された後，ギリシャの数学者は量を扱うときに数を用いることをあきらめ，むしろ，実数が関係する代数的関係を幾何学的に示した．例えば，ユークリッド『原論』第 II 巻の命題 4 には 定理：$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$　を

> 線分が任意に 2 分されるとき，線分全体の上の正方形は，二つの線分部分の上の正方形と，二つの線分部分によって囲まれた長方形の 2 倍との和に等しい．
> （※ かなり意訳した）．



のように，幾何的考察を用いて表した．また，バビロニアの連立方程式なども作図によって解き，その解は線分によって表した．このような代数の欠如は『原論』以後も，ヨーロッパではずっと 2 千年間に渡って続くのである．

---

[21] いき詰まった人は，例えば，p.16 の脚注『高校数学＋α』§1.8.2 参照．
参考ウェブサイト：`http://www.h6.dion.ne.jp/~hsbook_a/KakuShouPDF.html`

また，ギリシャの数学者が，分数を認めないなど，実学を軽視して理論に特化したことは，『原論』第 I 巻の命題 41：「平行四辺形と三角形が底辺を共有し，同じ平行線に挟まれているならば，平行四辺形の面積は三角形の面積の 2 倍である.」という定理はあるが,「三角形の面積は底辺と高さの積の半分に等しい」という定理がないことにも現れている.

最後に，ずっと後に議論の対象になる，アルキメデスにも匹敵する天才とうたわれたエウドクソス（Eudoxos，前 409〜前 355）の業績である『原論』第 V 巻（比例論）の定義 3, 5 を載せておこう：

定義 3　比とは，同種の 2 つの量の大きさに関する一種の関係である.

定義 5　4 つの量 a，b，c，d の比 $a:b$ と $c:d$ が等しいとは，任意の自然数 m，n に対して次が成り立つことをいう.

$$
\begin{aligned}
& ma > nb \Leftrightarrow mc > nd, \\
\text{または}\quad & ma = nb \Leftrightarrow mc = nd, \\
\text{または}\quad & ma < nb \Leftrightarrow mc < nd.
\end{aligned}
$$

比は同種の量の間にある関係とすることは，次元の異なる面積と長さの比「面積：長さ」や比の値「面積 / 長さ」などに意味が付けられないということであり，これは一見理に適っている．しかしながら，これによると，例えば，速度つまり「移動距離 / 要した時間」などを考えることはできない．この狭量な比の概念は，少なくともデカルトの時代まで，おそらくはニュートンの時代まで続くのである[22]．

定義 5 は, 2 つの連続量が等しいことを整数の比つまり有理数によって定義するものである.（※ 例えば，任意の自然数 m, n に対して，$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd$ は「全ての自然数 m, n を考えたとして，ある m, n に対して $ma > nb$ が成り立つとき，その m, n に対して $mc > nd$ も必ず成り立つ．またその逆も成り立つ」と読む）．これは，19 世紀になってようやく，‘ 有理数を用いて実数を厳密に定義した ’ いわゆる「デデキントの切断」に相当する，褒め称えられるべき，業績である.

22）☞ p.9 脚注『数学史散策』第 9 章 4.