第 10 巻と第 13 巻に貢献し，エウドクソス（Eudoxos，前 390 頃〜前 337）は第 5 巻と第 12 巻に貢献した．また，学園の学徒アリストテレス（Aristoteles, 前 384〜前 322）は論理学の発展に寄与し，論証に不可欠の技術である三段論法を確立した．三段論法は「p から q が導かれ，q から r が導かれるならば，p から r が導かれる」という論証法である．先に議論した『原論』の「公理」と「要請」のあいだに明瞭な区別を設けたのはアリストテレスだといわれている．

次に，ギリシャ数学のもう一つの特徴である‘数と量の分離’について，その起源・原因を探ってみよう．

### 1.1.4　ギリシャの数

始めに数（数詞）について予備の議論をしておこう．日本古来の数は，よく知られているように，ひとつ，ふたつ，みっつ，··· であり，漢字が渡来して後は，それらは 一つ，二つ，三つ，··· のようにも書かれるようになった．その接尾語【つ】は多くの場合【個】を意味し，それらは 1 個，2 個，3 個，··· などと個数を表す．一般に個数を表す数を**基数**といい，1 個，2 人，3 本，4 頭，··· は基数の例である．英語で基数に当たるものは one, two, three, ··· である．英語では，順序を表す数 first, second, third, ··· (=1st, 2nd, 3rd, ···) があり，それらを**序数**という．基数と序数を区別するのはインド・ヨーロッパ語族に特徴的であり，古代ギリシャ語もその族に含まれる．日本を含む漢字文化圏では元来基数と序数を区別する概念はない．

接尾語【つ】を取り去った一，二，三，···，および対応する $1, 2, 3, \cdots$ は，もはや個数や順序を表さない **無名数**（＝単位の名称や助数詞の付かないただの数）であり，それらは現在我々がいうところの「自然数」である．その自然数こそが，近代数学において，「実数」に拡張されていく数なのであるが，古代ギリシャの数学に現れる数は，個数の意味が付帯された，基数の方であることに注意しよう．基数の概念は 2 千年にわたってヨーロッパの数学に縛りをかけ，それから抜け出すきっかけが得られたのは 17 世紀になってルネ・デカルトが『幾何学』を著してからである．

「量」についても予備の議論をしておこう．量とは，1m, 2.3kg, 4 時間，5 個，600 円 など，一般に，大小の比較の可能なものや測定の対象となるものについ

て，その長さ・重さ・時間・個数などをいう．したがって，量は，無名数である実数に尺度の単位を付けたもの，または基数すなわち自然数に個数を表す単位を付けたものである．量は基数を含む概念であることに注意.

さて，古代ギリシャに戻ろう．古代ギリシャで数に関する定義を最初に行ったのはターレスとされている．彼は数を‘いくつかの「単位」の集まり’と定義した[9]．これはユークリッド『原論』第 7 巻の定義によるものとほとんど同じである：

> 定義 1　単位とは，存在するそれぞれのものが，それによって「**一**」と呼ばれるものである.
>
> 定義 2　数とは，いくつかの単位からなる多である.

「単位」の意味がわかりにくいが，調べてみると，19 世紀の数理論理学者 G. フレーゲによって議論されている[10]：

> ユークリッドが『原論』第 7 巻の冒頭部で与える諸定義において，彼は *μονάς*（モナス）という語で，あるときは**数えられるべき対象**を，あるときは**そのような対象の性質**を，あるときは**数一**を表示しているように思われる．我々はいつでも「単位」という訳語で間に合わせているが，しかしそれが可能なのは，この訳語自体がこれらの異なった意味の間で揺れ動くからにすぎない．（太字部分は著者の注）.

彼の議論から，（リンゴ）5 個を考えているときは単位は【（リンゴ）1 個】と考えられ，その数をギリシャ特有の数と見なして 数$_{\text{ギ}}$ と書くと，数$_{\text{ギ}}$ = 5【個】となるので，数$_{\text{ギ}}$ は基数と見なすことができる．市民 6 人では 数$_{\text{ギ}}$ = 6【人】, 馬 7 頭では 数$_{\text{ギ}}$ = 7【頭】のように考えていくと,「単位」は量における m, kg などの単位と違いはない．古代ギリシャ人は数を考えるのに際し，数を与える対象の性質を重視し，その性質を持つ最小単位のものの集まりをもって数としたのであろう．基数の起源はこのようなものであったのだろう.

古代ギリシャ時代を通じてそしてそれ以後も,「単位」=「**一**」は分割不能な対象と見なされたことに注意を払おう．確かに単位が例えば【1 人】ならそれ

---

9) T.L. ヒース 著『復刻版 ギリシャ数学史』（平田寛 他訳，共立出版）I 巻 3.

10) フレーゲ著作集 2『算術の基礎』（野本和幸・土屋俊 編，勁草書房）第 29 節.

を半分にしたら人でなく死体になるから，人という意味を失わないためには分割してはいけないことになるだろう．ただし，ギリシャ人は，定義によって，「単位」を分割不能としたようである．このことに関する最も明確な記述をプラトンの『国家』から引用しよう[11]：

> ⋯ 君もおそらく知っているとは思うが，この学問の専門家は，純粋な「**一**」を議論の上で分割しようとする人があっても，これを一笑に付して相手にしないものである．むしろ，もし君が **一** を細分割したら，彼らは（その分だけ）多化するだろう．もっとも，その間において，**一** が **一** でなくて多者（＝多くの部分の集まり）だと思われないように用心しながらね．⋯

この分割不能は，数$_{\text{ギ}}$ を割り算して分数にすることを不可能にし，その結果，実用数学の発展を遅らせた．ギリシャの商人や大工，技師などは計算に分数を使っていたが，数学者はそれを全く無視し，それはアルキメデス（Archimedes，前 287〜前 212）が $\pi$ や面積の近似計算をするまで続いた．数学者は分数が必要なときは，数$_{\text{ギ}}$ の比，つまり「数$_{\text{ギ}}$：数$_{\text{ギ}}$」を用いたのである．

### 1.1.5　無理量の発見

ミレトスのターレスに遅れること約 50 年，同じイオニア地方にあるサモス島にピタゴラス（Pythagoras，前 572 頃〜前 494 頃）が生まれた．ピタゴラスはターレスの勧めでエジプトに留学したが，その最中にたまたまペルシャ軍がエジプトに侵攻した．それを機に，彼はバビロニアにまで足を伸ばしたらしい．エジプトよりはるかに進んでいたバビロニアの数学を持ち帰ったことが後にピタゴラス学派の形成をもたらしたことは間違いない．イオニアでは，前 540 年頃から，ペルシャ軍が多くの都市を圧迫したため，人々は南イタリアに逃れてポリスを建設するようになった．ピタゴラスも 40 才の頃クロトンに移住することになったが，エレアもそんな避難民の都市であり，そこではパルメニデスが生まれている．かくしてギリシャ文化の中心はイオニアから南イタリ

[11] 例えば，A.K. サボー 著『数学のあけぼの』（伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全 訳，東京図書，1976）第 I 部 3

アに移動したのである．

クロトンでピタゴラスは一種の哲学的秘密宗教団体を創設し，そこでは数学・音楽・哲学の研究が重んじられた．ピタゴラスは，今では，数学者であったとする根拠がかなり乏しくなっているが，バビロニアの数学を弟子に教育し，そこからピタゴラス学派と呼ばれる数学者達が育っていったことは間違いない．例えば，ピタゴラスの定理[12]を満たす 3 辺の整数解（例えば，辺の比が 3 : 4 : 5 とか 5 : 12 : 13 となる整数）は，既にバビロニアで，

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \quad y = m, \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \qquad (m\text{ は奇数})$$

と実質的に同一なものが知られていたのだが[13]，定理そのものの一般的証明はピタゴラス派の手になる．整数解の存在はピタゴラス派にとって重要である．

ピタゴラス教団は魂の不死と輪廻への信仰が中核にあり，魂の浄化の重要な手段として用いられたのが音楽であった．その目的のために音楽の理論的な研究が熱心に行われ，その過程において現在の音楽理論の基礎となる大発見が弦楽器においてなされた．弦の長さが 2 : 1，3 : 2，4 : 3 の整数比の場合に 2 つの音が美しい「協和音」になるということである．

弦の振動理論も援用して説明しよう．単位長さ当たりの質量（＝線密度）$\overset{\text{ロー}}{\rho}$，長さ $\ell$ の弦を張力 $T$ で引っ張り，両端を固定しておいて振動させるとしよう．このとき，弦の基本振動数 $f$ は

$$f = \frac{\sqrt{T/\rho}}{2\ell}$$

で与えられることが知られている[14]（弦の倍振動は今の議論には無関係）．上の式は，線密度 $\rho$（$\propto$ 弦の太さ）と張力 $T$ を固定するとき，弦の振動数 $f$ は弦の長さ $\ell$ に反比例することを示している．例えば，弦の長さが半分になると振動数は 2 倍になる，つまり元の音がドのときは 1 オクターブ上のドの音になり，それら 2 音を完全 8 度音程の協和音という．また，弦の長さが $\frac{2}{3}$ になると，振動数は $\frac{3}{2} = 1.5$ 倍になる，つまり元の音がドならソになり，それらは完

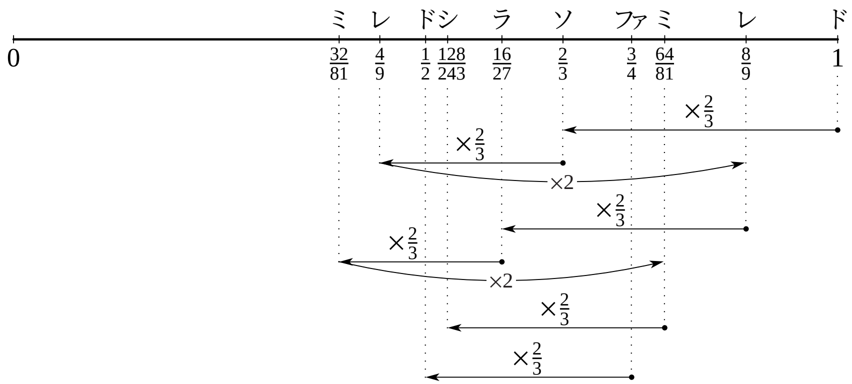
---

12) 「3 辺 $x$，$y$，$z$ の三角形（斜辺 $z$）が直角三角形である条件は $x^2 + y^2 = z^2$ である」

13) ☞ p.6 の脚注，『ギリシャの数学』第 1 章 第 2 節．

14) 例えば，拙著『高校数学 $+\alpha$ なっとくの線形代数』（共立出版）§5.3.

全 5 度音程の協和音と呼ばれる．ピタゴラス派は協和音に秘められた自然の摂理を探し求め，下に図解するように，完全 5 度音程（弦の長さの比 3 : 2）を用いてドレミファソラシド長音階の基礎を歴史上初めて確立した[15)]．




直角三角形の辺の長さの整数解，また協和音と弦の長さの整数比の関係はピタゴラス派が ‘ 万物は数である ’ という結論を神の啓示として受け入れるのに十分であったろう．彼らは数つまり 数$_{\text{ギ}}$（＝基数）を全ての自然現象・哲学・数秘術に適用した．さらに，長さを比較した際に現れる整数比から，彼らは，「点」と呼ぶ ‘ 分割できない最小の長さ ’ が存在し，一般の長さはそれの整数倍で表される，と結論した．すなわち，ピタゴラス派は，算数における（分割不能な）「単位」と幾何学における「点」を比較し，

　　単位とは ‘ 位置のない点 ’ であり，点とは ‘ 位置を持つ単位 ’ である

と定義したのだった[16)]．したがって，数$_{\text{ギ}}$ に比較されるピタゴラス派のいう長さを 長さ$_{\text{ピ}}$ と書くとき，「点」の大きさを例えば原子の大きさ 1Å (= $10^{-8}$cm)

15) 長さ 1 の弦がドの音を出すとして，$\frac{2}{3}$ ずつ短くし，$\frac{1}{2}$ より短くなったら（1 オクターブ以内に収まるように）2 倍する．ただし，ファは $\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{2}$ 倍した弦長 $\frac{3}{4}$ の音（上のドから 5 度下げた音）．
参考サイト：http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/monocode/monocode_index.htm

16) ☞p.12 の脚注『復刻版 ギリシャ数学史』I 巻 3．同『ギリシャ数学史』第 1 章 第 2 節 (a)．

とすると，長さは‘単位’【点】=【Å】の集まりによる長さということになるから，

$$\text{長さ}_{\text{ピ}} = (\text{自然数})【\text{Å}】$$

の形で書かれることになる．ともあれ，‘単位’【点】=【Å】は分割不能であるから，長さ$_{\text{ピ}}$を限りなく分割することはできないのである．

前 5 世紀半ばに近づく頃であろうか，ゼノンは，師パルメニデスの主張した「唯一不動の存在」，したがって，運動は存在しないという主張を弁護すべく，「二分割」・「アキレス」・その他のパラドックスを提出した：

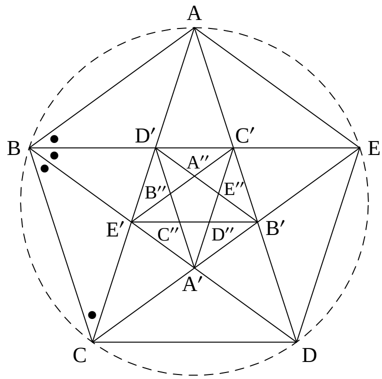
> 二分割：運動は存在しない．なぜなら始点から終点までの移動は，終点に達する前に両者の中間，すなわち中点に達しなければならない．この中点に達するためには，この中点と始点との中点に達しなければならない．以下同様である．ところが，有限の時間内に無数の地点に触れることは不可能である．ゆえに運動は存在しない．
>
> アキレス：アキレスは亀を追い越せない．ただし，アキレスは亀より後の位置から出発するとする．すると，アキレスが亀を追い越すには，まず亀の出発点に達しなければならない．そのときには亀はその先の地点にいる．以下同様である．こうしてアキレスは亀を追い越すためには，無数の地点に触れなければならない．これは不可能である．したがって，彼は亀を追い越せない．

二分割のパラドックスは始点から終点までの距離を無限に分割したとき，それらの断片を全て加えることは無限級数を求めることになるが，そんな和は当時は収束しないと思われていた．したがって，始点から終点までの距離は無限になる，という主張である（‘無数の地点に触れる’とは長さの断片の無限級数を求めることと同じ）．アキレス についても，同様に，時間の断片の無限級数は収束しないから，追いつけないという主張である[17)]．

ピタゴラス派から見れば，ゼノンのパラドックスは，長さは無限に分割可能であり，したがって，‘単位’【点】も分割可能という主張に映る．これは由々しき一大事であり，その真偽を確かめずにはいられなくなった．その試みを実際

[17)] その解決については，例えば，☞ 拙著『高校数学 + $\alpha$：基礎と論理の物語』§11.6.

に行ったのはヒッパソス（Hippasus，前 5 世紀中頃に活躍）であるという伝承はよく知られている．彼は 12 個の正五角形の面で囲ってできる正十二面体[18] の研究に関わり，またピタゴラス教団の紋章が五芒星図形☆であったことから，彼は無理量を正五角形の 1 辺と対角線の関係から発見した[19] という学説がある．伝承によると，彼はピタゴラス派の中で秘密にすべき無理量の発見を外部に漏らしたため，神の怒りに触れて海で命を落としたとあるが，最近の数学史家達の研究によると，それを信ずべき根拠は乏しいようである．ともあれ，前 430 年頃，無理量をピタゴラス派の誰かが発見し，（秘密を漏らしたか，発見を公表したかは別として）そのことがギリシャ数学に与えた影響は計り知れないものがあったのは事実である．




なお，アリストテレスの著作には背理法を用いた無理量の証明方法が載っていて，その方法が証明の決定版であり，その方法で無理量が発見されたとする

---

18) ☞ ウェブサイト:「正十二面体 - Wikipedia」で回転している立体図が見られる．

19) 　以下の議論において，上の正五角形図の辺 AB と対角線 AC が両者に共通な単位【点】の整数倍の長さ（以下，倍数長 と記す）であるとすると矛盾することを示す．

　AB = $n$【点】，AC = $m$【点】（$m$, $n$ は自然数）とするとき，AC−AB = $(m-n)$【点】は【点】の倍数長である．これは「自然数 $m$, $n$ の公約数は差 $m-n$ の約数である」と同質の定理．

　※ AB = CD′，CE′ = A′C′ などの証明は各自に任せる．

　さて，AC−AB = AC−AE′ = CE′ = A′C′ は【点】の倍数長．

したがって，AB−A′C′ = AE′−D′A = D′E′ = A′B′ も【点】の倍数長．

以上の議論から，正五角形 ABCDE の辺 AB と対角線 AC が共に【点】の倍数長のとき，それに含まれる正五角形 A′B′C′D′E′ の辺 A′B′ と対角線 A′C′ も共に【点】の倍数長．同様にして，それに含まれる正五角形 A″B″C″D″E″ の辺 A″B″ と対角線 A″C″ も共に【点】の倍数長である．これらの操作は【点】の倍数長から【点】の倍数長を引く操作であり，それを続けていったとき，もし【点】が共通の尺度 ($> 0$) ならば，操作は有限の回数で終わるはずである．しかしながら，図からわかるように，この操作は限りなく続き，いくらでも小さい正五角形が描け，かつその辺と対角線は共に【点】の倍数長である．こんな場合には，正五角形はいくらでも小さくなり，したがって【点】は限りなく小さい量でなければならない（このことは分割不能な【点】なるものは存在しないことを意味する）．したがって，元の辺や対角線を（共通の尺度としての）【点】の倍数長として表すことは無意味である．この事実は，長さは 無理量（＝ある尺度の無理数倍の量）であることを示している．

説も有力である．以下，その現代的な証明の一部を載せるので，続きは各自で補おう．1 辺が $a$ の正方形の対角線を $b$ とすると，$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$．長さの尺度を【1cm】にとるが，以下略記して，線分は数として扱う．$a, b$ が分数であるとき，$b^2 = 2a^2$ の分母を払いまた約分して，$a, b$ は公約数がない自然数としても一般性を失わない．このとき，$b^2 = 2a^2$ から，$a, b$ が共に偶数であることを示して，矛盾を導く．以下，省略する[20]．

数の概念を長さなどの量にまで拡張しようとしたピタゴラス派の目論見はもろくも潰(つい)えたが，その名残は，ピタゴラス派のテアイテトスの業績を記述したといわれる，ユークリッド『原論』第 X 巻の定義 1 に残されている：

> 同じ尺度により割り切られる量は「通約量」といわれ，いかなる共通の尺度も持ち得ない量は「非通約量」といわれる（通約＝約分）．

通約量は

量 ＝（自然数）【尺度】

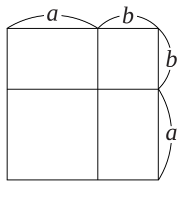
と表したときのみ可能であり，本当は【尺度】を【点】と書きたかった悔しさが滲(にじ)んでいるようにも読み取れる．現在におけるその正しい表現は

量 ＝（実数）【尺度】

である．

無理量が発見された後，ギリシャの数学者は量を扱うときに数を用いることをあきらめ，むしろ，実数が関係する代数的関係を幾何学的に示した．例えば，ユークリッド『原論』第 II 巻の命題 4 には 定理：$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$　を

> 線分が任意に 2 分されるとき，線分全体の上の正方形は，二つの線分部分の上の正方形と，二つの線分部分によって囲まれた長方形の 2 倍との和に等しい．（※ かなり意訳した）．




のように，幾何的考察を用いて表した．また，バビロニアの連立方程式なども作図によって解き，その解は線分によって表した．このような代数の欠如は『原論』以後も，ヨーロッパではずっと 2 千年間に渡って続くのである．

---

[20] いき詰まった人は，例えば，p.16 の脚注『高校数学＋α』§1.8.2 参照．
参考ウェブサイト：`http://www.h6.dion.ne.jp/~hsbook_a/KakuShouPDF.html`

また，ギリシャの数学者が，分数を認めないなど，実学を軽視して理論に特化したことは，『原論』第 I 巻の命題 41：「平行四辺形と三角形が底辺を共有し，同じ平行線に挟まれているならば，平行四辺形の面積は三角形の面積の 2 倍である.」という定理はあるが，「三角形の面積は底辺と高さの積の半分に等しい」という定理がないことにも現れている.

最後に，ずっと後に議論の対象になる，アルキメデスにも匹敵する天才とうたわれたエウドクソス（Eudoxos，前 409〜前 355）の業績である『原論』第 V 巻（比例論）の定義 3, 5 を載せておこう：

定義 3　比とは，同種の 2 つの量の大きさに関する一種の関係である.

定義 5　4 つの量 $a$，$b$，$c$，$d$ の比 $a:b$ と $c:d$ が等しいとは，任意の自然数 $m$，$n$ に対して次が成り立つことをいう.

$$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd,$$

$$\text{または}\quad ma = nb \Leftrightarrow mc = nd,$$

$$\text{または}\quad ma < nb \Leftrightarrow mc < nd.$$

比は同種の量の間にある関係とすることは，次元の異なる面積と長さの比「面積：長さ」や比の値「面積 / 長さ」などに意味が付けられないということであり，これは一見理に叶っている．しかしながら，これによると，例えば，速度つまり「移動距離 / 要した時間」などを考えることはできない．この狭量な比の概念は，少なくともデカルトの時代まで，おそらくはニュートンの時代まで続くのである[21].

定義 5 は, 2 つの連続量が等しいことを整数の比つまり有理数によって定義するものである．（※ 例えば，任意の自然数 $m$, $n$ に対して，$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd$ は「全ての自然数 $m$, $n$ を考えたとして，ある $m$, $n$ に対して $ma > nb$ が成り立つとき，その $m$, $n$ に対して $mc > nd$ も必ず成り立つ．またその逆も成り立つ」と読む）．これは，19 世紀にもなってから，‘ 有理数を用いて実数を厳密に定義した ’ いわゆる「デデキントの切断」に相当する，褒め称えられるべき，業績である.

21）☞ p.9 脚注『数学史散策』第 9 章 4.