第1章　論証数学の誕生とその歴史

紀元前 3〜5 世紀といえば，日本では，弥生土器を使う人々が竪穴式住居で生活し水田で稲作をしていた時代である．その頃，古代のギリシャではすでに民主的な都市国家が成立していた．そこでは，ゼノンが“アキレスは亀に追いつけない”とか“飛んでいる矢は止まっている”などという‘証明’を試み，その後まもなく，ピタゴラス派が無理数を発見したようである．そして，その後 1 世紀を経ずして，ユークリッドが，「点とは部分をもたないものである」という定義に始まる『原論』において，それまでの数学の基礎や理論を体系的・演繹的に叙述した[1)]．ここに厳密な公理的論証数学が誕生したといえる．

そのギリシャ数学は首尾一貫した理論ではあった．それは，しかしながら，偏屈な部分を内包するという弱点があった．数は自然数（正しくは，基数）に限定され，0 や負数を数とは認めないことはもちろん，エジプトやバビロニアでは使われていた分数も数とは認めなかった．長さ・容積・重さなどの連続的に変化するものは，数ではなく，「量」と見なされた．ギリシャ時代の後も，ヨーロッパの数学者たちはユークリッド『原論』の呪縛に縛られ，東方から 0 や負数がもたらされても何世紀にもわたって頑強に拒否し続けた．

しかしながら，ヨーロッパの学者達は，単に偏狭な思想に凝り固まっていたわけではなく，説得力ある厳密な論理に基づいた数の概念が新たに提示されるならばそれを受け入れ，さらに発展させる

---

1) 数学史全般については，『グレイゼルの数学史 I·II·III』（保阪秀正・山崎昇 訳，大竹出版），『カッツ 数学の歴史』（ヴィクター J. カッツ 著，上野健爾・三浦伸夫 監訳，共立出版）を参照しました．詳細に関する部分は個別に参照します．

ことができた．17 世紀には，デカルトが数や量を線分の長さに対応させる理論を広め，その後ニュートンが同種の量の比という形で実数を定義するに至った．その後は，よく知られているように，ヨーロッパの数学は他の世界のものを圧倒した．現在，数（＝実数）は数直線上の点と同一視され，その‘基本的振る舞い’を完全に規定する公理によって定義される．

この章では，ギリシャ数学の成立のみならず，ギリシャの数概念に特別の注意を払い，実数の公理的定義に至るまでの数概念の変遷を辿(たど)ってみよう．数概念の発展は数学全般の発展にほぼ一致している．

§1.1　古代ギリシャの数学と数

1.1.1　ギリシャ以前の数学

数は人類が集団生活を始めたときに発生したことは間違いない．言葉を話し，狩猟の獲物を分配し，農地を耕し，収穫物を分配するうちに数は人々の生活にしっかりと根付いたことだろう．農耕は人々の生活を豊かにし，多くの人々が集団で定住生活を行えるようになると文明が起こり，それが大きく発展するなかで文字の一部として数を表す記号（数字）が発明された．

数の和・差・積・商などの四則演算は集団生活の早い段階から現れ，測量・建築・軍事・天文などの技術の進歩と共に量の四則演算も発達した．実際，エジプトのピラミッドを見れば，現代のものにも匹敵する測量技術があり，数学が発達していたことの証拠になっている．

古代エジプトでは文字を書くのにパピルスから作られた巻紙を利用した．紀元前 1650 年頃に書記のアーメスによって筆写された巻紙『リンド・パピルス』は数学問題集であり，分数を用いた問題と答えが載っていた．例えば，3 番目の問題は「パン 6 斤(きん)を 10 人で分けるにはどうすればよいか」を問うている．そこに載っている答えは，$\frac{3}{5}$ つまり 1 斤の 3/5 ずつ取るのではなく，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\left(=\frac{6}{10}\right)$$

のように「単位分数」で表した．つまり，各自が半斤と 1/10 斤だけ受け取るとする方がわかりやすい．この単位分数による方法は 2000 年以上にわたって東地中海沿岸で使われた.

一方，メソポタミア南部に栄えたバビロニアの数学は，計算に便利な「位取り記数法」を用いたために，エジプトの数学に比べてはるかに進歩していた．当時の数学の内容は楔形(くさびがた)文字で書かれた粘土板に保存されており，乗法や除法の表に加えて，逆数・冪(べき)・根(こん)・指数計算の表があり，また数学の問題と解答を記した粘土板がハンムラビ王の時代を含む古バビロニア期（前 19 世紀〜前 17 世紀）に集中して見出されている.

バビロニアでは 60 進法がとられ，数を表すのに 2 つの楔形記号 𒁹（＝ 1）と 𒌋（＝ 10）を組み合わせて用いた．例えば，25 は 𒎙𒐊，73 は位の違いを示す隙間を付けて 𒁹 𒌋𒐈 である．ただし，位の違いを表すのに便利な「0」や小数点「.」に当たる記号がなかったので，例えば 𒌋𒁹 は 11 だけでなく，11×60 とか 11/60 その他なども表し，それらの違いは文脈から読みとられた．この位取り記数法によりバビロニアの数学は単位分数に苦労していたエジプト数学を圧倒し，ギリシャ数学がそれに追いついたのはようやくユークリッドの時代に入ってからである.

数値計算にそれほど苦労せずに済んだバビロニアでは，エジプトでは扱われなかった，2 次の代数問題にも取り組んだ.

> 長さと幅がある．長さと幅をかけて面をつくった．長さが幅より多い分だけ面に加えると 𒐈 𒐈（＝ $3 \times 60 + 3$）である．長さと幅を加えると 𒎙𒐌（＝ 27）である．長さと幅，面はそれぞれいくらか.

長さを x，幅を y とすると

$$xy + (x - y) = 183, \qquad x + y = 27$$

である．解答は，$y' = y + 2$ とおいて，対称形 $xy' = 210$，$x + y' = 29$ に導き，

その解法のパターン[2)]にしたがって解 $x = 15,\ y = 12$ を得ている．この例では，長さを面積に加えるという，次元の区別を無視した計算をしているが，むしろ次元を考慮しない無名数としての数は同じ計算法則に従うことを了解していたと見ることができる．

1.1.2　ギリシャ数学の夜明け

ギリシャ人は紀元前 20 世紀〜前 12 世紀の間に 3 派が北方からギリシャ地方に南下した．ギリシャの国土は山がちで起伏がはげしく，海岸線は入り組んでいて岬や入江が多い．そのため，居住に適した土地は散在する平野に限定され，土地も痩せていて収穫が足りず，ギリシャ人は貿易を主とする都市国家（ポリス）を形成した．紀元前 8 世紀半ば以降には植民やオリエントとの交流によって国力が増し，ギリシャ人市民数万人とその数割にも達する奴隷からなる人口を抱えるポリスも現れた．

ポリス間には戦争が絶えなかった．山岳地帯が多いため貴族層からなる騎兵部隊の機動力は落ち，重装備の歩兵が密集陣形で突撃する戦術が発達した．歩兵部隊は自前の武器を持参した自由農民である．また，海戦においては，武器を持たない自由貧民も軍船の漕ぎ手となって活躍した．そのためポリス自由市民はその政治的地位を大いに高めていき，ギリシャの「民主政」を築く原動力になった．その民主的社会とは，地位を高めた特権市民が奴隷を支配・搾取し，それによってえた余暇時間を使って政治や戦争に参加する，社会体制としては真正の奴隷制社会であった．

奴隷を労働させることによって暇を得た市民は，初期の頃，戦争に備えて体を鍛え，政治談義に日々を送ったことだろう．私立の学校では読み書き・音楽・体練術を青少年に必須の一般教養とした．文字として，学習に苦労するエジプトの象形文字やメソポタミアの楔形文字でなく，表音文字を使用したことも市民の読み書きを可能にし，高度な知識を普及するのに役立った．人々は，

---

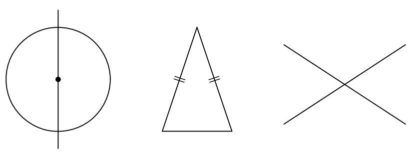
2) 連立方程式 $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ $(x > y > 0)$ において $\sqrt{p^2/4 - q} = \sqrt{(x+y)^2/4 - xy} = (x-y)/2$. よって，$x+y = p,\ x-y = 2\sqrt{p^2/4 - q}$ より，公式 $x = p/2 + \sqrt{p^2/4 - q},\ y = p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}$ が得られる．参考：伊東俊太郎 著『ギリシャ人の数学』（講談社学術文庫，1990）．

議論と討論の技術を学ぶ素地ができ，筋道を立てて考えを進めることにも徐々に慣れていった．学問好きな者達は，全く実用的ではない事柄についても，自由に思索し，喧喧諤諤の議論を行うようになっていったことであろう．その結果，人々は古代から伝えられてきたことをそのままでは受け取らなくなっていき，やがて創造的な精神活動を行う才知に満ちた人物が次々と現れることになる．

ギリシャ人が東地中海全体に及ぶ地域に植民して生活水準が上昇するにつれ，オリエントの国々との交易も栄え，有能な人材が行き来するようになった．多くの分野にわたる未知の知識や技術もギリシャに流入した．その中には，もちろん，エジプトやバビロニアの数学や自然科学なども含まれる．ギリシャの発展期にオリエント貿易に有利なのはギリシャ東部のイオニア地方で，そこはエーゲ海に面した現在のトルコ南西部にあるギリシャの植民地であった．

そのイオニアのミレトスにある名門の家系から，後にギリシャ哲学および科学の創始者といわれるターレス（Thales，前 624 年〜前 546 年頃）が生まれた．若い頃彼は恵まれた境遇とギリシャ的雰囲気の中で知性を磨き，合理的思考を強めていったと思われる．青年時代，ターレスは商業活動に手を染め，エジプトに長らく滞在したことがある．そのとき神官から測量術を学び，ミレトスに帰ってからは研究に心血を注ぎ，弟子達を教育した．

ターレスの合理的思考の精神は，エジプトから持ち帰った知識を鵜呑みにせず，論理的に徹底的に反芻吟味して結論を導いた．そのことがギリシャ数学の伝統を生みだす源泉になったのである．エジプトの学者は「円の直径はその円を二等分する」，「二等辺三角形の底角は等しい」，「対頂角は互いに等しい」ことなどを経験的に知っていたが，それで満足していた．それらを‘証明した’[3] 最初の人がターレスであるという古い記録がある．その証明の詳細は残されていないが，‘自明と見なされ，広い適用が可能な基本原理’として



3) ユークリッドより古い時代のギリシャ人は，数学的証明に対して，具体的な「具象化」（＝目に見えるようにすること）と理解していた．例えば，A.K. サボー 著『数学のあけぼの』（伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全 訳，東京図書，1976）第 1 部 1．

「互いに重なり合うものは互いに等しい」という明白な事実を考えてみよう．すると，円の二等分問題は円を直径で折って重ねて見せる簡単な証明が可能であり，二等辺三角形の問題では，三角形を裏返した三角形をつくり，それを元の三角形に重ね合わせるという証明ができる[4]．重要なことは，**すでに知られている事実を単に受け入れるのではなく，より基本的な一般原理まで還元し，そこから証明するという態度である**．この点において，ターレスはギリシャの論証数学の第一歩を踏み出したといえる．

基本原理を追求するターレスの精神は，また，自然現象を観察する際にも現れ，自然現象全体にわたる統一的な第一原理を探し求めた．この世界の起源については，それまでは神話的説明のみであったが，ターレスは「万物の根源」（アルケー）なるものを創案し，それによって世界を構築しようとした．具体的には，水から全ての存在が誕生し，最終的に再び水に帰ると主張した．

さらに，ターレスは，後に詳しく議論するが，ギリシャ数学における「数」を定義した最初の人でもあった．その定義は，しかしながら，その後 2 千年以上にわたってヨーロッパ数学を呪縛する元凶ともなった．

1.1.3　公理的論証数学の誕生

現在の厳密な論証数学の起源は，紀元前 300 年頃にアレクサンドリアで活躍したといわれる，ユークリッド（Euclid，前 365 年頃〜前 275 年頃）の手に成る『原論（ストイケイア）』にある．この名著において，彼は，過去の業績を編纂し，また新たな証明を付け加えて，論証的学問としての数学を確立した．

厳密な論証数学を打ち立てるためには，論証の前提となる定義（＝用語の明確な意味）や公理（＝理論の出発点として，証明なしに採用される主張）の概念が明らかになり，論証を実行するために必要な「三段論法」や「背理法」などの技術が確立されることが不可欠である．以下，論証数学の生い立ちという観点から『原論』の成立を調べてみよう．

『原論』の第 1 巻はいきなり次のように始まる：

[4] 例えば，数学の歴史 I『ギリシャの数学』（彌永昌吉・伊東俊太郎・佐藤徹 著，共立出版，1979）第 1 章 第 1 節タレス 参照．対頂角の問題でも，重ね合わせを用いた証明であったと推測されている．

定義（ヒュポテシス）

1　点とは部分をもたないものである.

2　線とは幅のない長さである.

3　線の端は点である.

⋮

23　平行線とは，同じ平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である.

公準（アイテマ）（次のことが要請されているとせよ）

1　任意の点から任意の点へ直線をひくこと.

2　有限直線を連続して一直線に延長すること.

3　任意の点と距離（＝半径）をもって円を描くこと.

4　すべての直角は互いに等しいこと.

5　一直線が二直線に交わり，同じ側の内角の和が二直角より小ならば，この二直線は，限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側において交わること.

公理（アキシオマ）

1　同じものに等しいものはまた互いに等しい.

2　等しいものに等しいものを加えれば全体は等しい.

3　等しいものから等しいものを引けば残りは等しい.

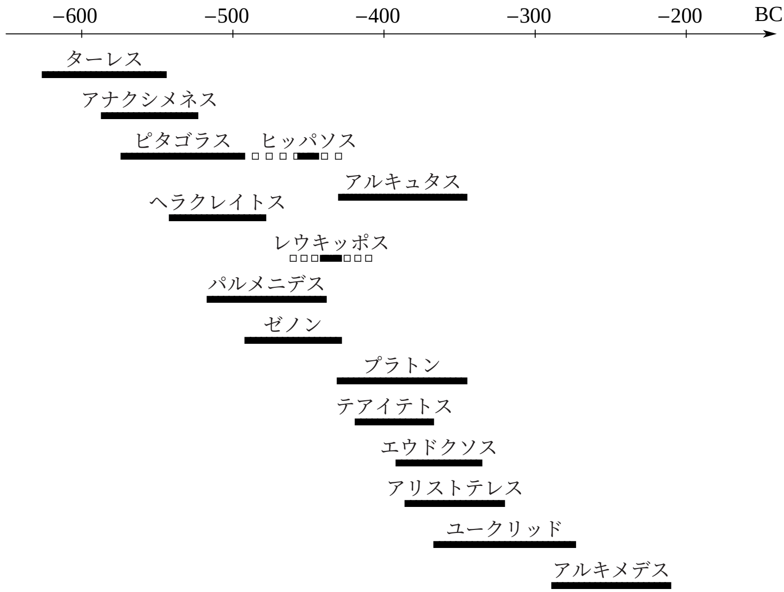
4　互いに重なり合うものは互いに等しい.

5　全体は部分より大きい.

この書き出しのように，議論の出発点を明々白々にし，その第一原理に基づいて厳密に論理的な演繹を行うことが，すでに紀元前 300 年頃には，なされていた．古代ギリシャでのみ発達したこの公理的論証数学，その起源はどこにあるのだろうか．それを探ってみよう．

紀元前 6〜5 世紀のギリシャは，ターレスの影響もあって，哲学が盛んになった．アルケーを空気とするミレトス学派のアナクシメネス（前 585〜前 525），ピタゴラス派とされる‘万物流転’を説くヘラクレイトス（前 540 頃〜前 480 頃），デモクリトス（前 460 頃〜前 370 頃）の「原子論」の基礎を築いたレウ

キッポス（活動期：前 440〜430 年頃），また（後で議論するが）‘ 不動不変 ’ の「唯一者」を説くエレア派のパルメニデス（前 515 頃〜前 440 頃？）とその弟子のゼノン（前 490 頃〜前 430 頃）などを代表格とする多くの哲学者達が覇を競い合った．



学者達は自分の派内・派外で多くの討論・論争を行って説得の技術を高め，また自己の理論を一段と昇華していったことであろう．いま，A と B が議論をしていて，A はある主張をし，B はそれを疑ったとしよう．B は A の主張の根拠を問い，A はそれに答えるが，B は納得せず，さらに根拠を求める．これを繰り返して，A の主張の根拠となる根本的な前提が明らかにされる．B がその根本前提を受け入れれば，その議論は成立するが，そうでなければ議論は物別れになる．実際の議論では，相手の根本前提そのものを論破しようとする苛烈な場合もあったことだろう．しかしながら，ある根本前提を誰もが認めるならば，それは万人の議論の出発点をなす第一原理となる．

ハンガリーの古典言語学者・数学史家 アルパッド・サボーは,「ヒュポテシス」（定義）・「アイテマ」（公準）・「アキシオマ」（公理）という古代ギリシャ語の意

味の時代変遷に注目し，1960 年に始まる一連の注目すべき研究を発表した[5)]．彼は詳細な分析の後，「ヒュポテシス」は本来「討論の相手によって同意された仮定」を意味し，「アイテマ」は「相手の同意が得られないとき，仮に議論を進めるために，論者の一方が要請するもの」，また「アキシオマ」は「討論の双方が是認するというよりは，誰もが自明と認める前提」であったとの結論に達した．古代ギリシャの前 5 世紀には，すでに，これらの仮定・前提に基づく厳密な議論・討論が行われていたのである．そのためには，自説の正しさを証明し，誤った説を論破する論証術がすでにあったとみるのが自然である．その論証術について，サボーは，南イタリアにあるギリシア植民都市エレアで活動していた，前ソクラテス期の哲学の 1 学派であるエレア派に照準を合わせた．

エレア派のパルメニデス（Parmenides，前 515 頃〜前 440 頃？）とその弟子ゼノン（Zenon，前 490 頃〜前 430 頃）—‘ アキレスは亀に追いつけない ’の逆理で有名— は万物の根源を「不動・不変で不生・不滅な唯一の完全なる存在」[6)] であると主張した．彼らがこの実に珍奇な説の主張に用いた方法が，サボーに注目された，間接証明法（＝帰謬(きびゅう)法＝背理法）である．間接証明法は「ある事柄 P を証明したいときに，‘ P が成り立たないとすると矛盾が起こる ’ことを導き，‘ よって，P は成り立つしかない ’ことを示す方法」である．パルメニデスの哲学詩 [6)] の中にその 1 例（らしきもの）がみてとれる．

> 女神が探求の道を説いている：
> 一つは，（それは）ある，そして（それが）あらぬことは不可能である，という道．
> これは説得の女神（ペイトー）の道である（なぜなら彼女は心理の女神にかしずくがゆえ）．
> もう一方は，（それは）あらぬ，そして（それが）あらぬことが必要である，という道．

5) アルパッド K. サボー 著『ギリシャ数学の始原』（中村幸四郎・中村清・村田全 訳，玉川大学出版部，1978）．これは専門書である．入門編：村田全 著『数学史散策』（ダイヤモンド社，1974；参考サイト：http://redshift.hp.infoseek.co.jp/scilib.html），同 著『数学史の世界』（玉川大学出版部，1977），伊東俊太郎 著『ギリシャ人の数学』（講談社学術文庫，1990）．

6) M. スコフィールド 他著『ソクラテス以前の哲学者たち』【第 2 版】（内山 勝利 他訳，京都大学学術出版会（英語版：1983））

> これは全く持って識別不能の道であると私（＝女神）はあなたに言明する．というのも，あなたはあらぬものを知ることはできないであろうし
> — それはなされえない —
> またそれを指し示すこともできないであろうから．

古代ギリシャ語からの翻訳は難解であるが，解説すると，“ 第 1 の道は ‘ ある ’（＝存在する）という道である．そのとき，あらぬ（＝存在しない）ことはあり得ない．一方，第 2 の道は ‘ あらぬ ’ という道である．そのとき，あらぬことが必然であり，あることは不可能である．あるかあらぬかは二者択一である．このとき，あらぬものを認知し，識別し，それを指し示すことはできない．したがって，あらぬ道を考えても意味がないので，その道は捨てられ，結果としてある道の方が選ばれなければならない ” ということのようである．

確かに，（現在では笑止千万な ‘ 証明 ’ ではあるが）背理法になっている[7)]．また，ゼノンの ‘ アキレスは亀に追いつけない ’ という逆理は，‘ アキレスは亀に追いつける ’ と仮定すると矛盾するという背理法になっている．背理法は実際に『原論』の多くの定理の証明に用いられた．ゼノンの逆理に関しては後で詳しく取り上げよう．

エレア派の現実からかけ離れた「不動・不滅の存在」は，意外に思われるだろうが，理性を重んじるプラトン（Platon，前 427〜前 347）に好感を持たれたようである[8)]．プラトンは精神の育成という観点から数学を重視し，商用などの目的のために数学を学ぶべきではないと説いた（この彼の姿勢は，ギリシャ数学の理論的側面の発展を促す一方，実学的側面の停滞をもたらした）．彼の学園には当時の名だたる数学者が集まり，一致協力して研究・教育に従事した．彼の学園の一員テアイテトス（Theaitetos，前 415〜前 369）は『原論』

---

7) 不動・不変や不生・不滅の ‘ 証明 ’ についても，ある と あらぬ を関係させる，背理法が可能である．例えば，不動については，‘ 運動があるとする．すると，ある場所で，ある状態からあらぬ状態になるのは あらぬ を巻き込む．それは不可能 ’ という ‘ 証明 ’ ができる．パルメニデスはこの後 “「あるもの」は完全なる「唯一者」（＝唯一の不動不変・不生不滅の存在）である ” と断定するが，‘ 唯一 ’ についての根拠は理解不能．後の議論で（‘ 唯一 ’ を取り去った）「一者」を自然数の 1 と関連して取り上げる．

8) プラトンは，生成変化する物質界の背後には，永遠不変のイデアという理想的な雛形があり，イデアこそが真の実在であるとした．不完全である人間の感覚ではイデアをとらえることができず，理性で認識することによってのみイデアに至るとした．

第 10 巻と第 13 巻に貢献し，エウドクソス（Eudoxos，前 390 頃～前 337）は第 5 巻と第 12 巻に貢献した．また，学園の学徒アリストテレス（Aristoteles，前 384～前 322）は論理学の発展に寄与し，論証に不可欠の技術である三段論法を確立した．三段論法は「p から q が導かれ，q から r が導かれるならば，p から r が導かれる」という論証法である．先に議論した『原論』の「公理」と「要請」のあいだに明瞭な区別を設けたのはアリストテレスだといわれている．

次に，ギリシャ数学のもう一つの特徴である‘数と量の分離’について，その起源・原因を探ってみよう．

1.1.4　ギリシャの数

始めに数（数詞）について予備の議論をしておこう．日本古来の数は，よく知られているように，ひとつ，ふたつ，みっつ，··· であり，漢字が渡来して後は，それらは 一つ，二つ，三つ，··· のようにも書かれるようになった．その接尾語【つ】は多くの場合【個】を意味し，それらは 1 個，2 個，3 個，··· などと個数を表す．一般に個数を表す数を**基数**といい，1 個，2 人，3 本，4 頭，··· は基数の例である．英語で基数に当たるものは one, two, three, ··· である．英語では，順序を表す数 first, second, third, ··· (=1st, 2nd, 3rd, ···) があり，それらを**序数**という．基数と序数を区別するのはインド・ヨーロッパ語族に特徴的であり，古代ギリシャ語もその族に含まれる．日本を含む漢字文化圏では元来基数と序数を区別する概念はない．

接尾語【つ】を取り去った一，二，三，···，および対応する $1, 2, 3, \cdots$ は，もはや個数や順序を表さない **無名数**（＝単位の名称や助数詞の付かないただの数）であり，それらは現在我々がいうところの「自然数」である．その自然数こそが，近代数学において，「実数」に拡張されていく数なのであるが，古代ギリシャの数学に現れる数は，個数の意味が付帯された，基数の方であることに注意しよう．基数の概念は 2 千年にわたってヨーロッパの数学に縛りをかけ，それから抜け出すきっかけが得られたのは 17 世紀になってルネ・デカルトが『幾何学』を著してからである．

「量」についても予備の議論をしておこう．量とは，1m, 2.3kg, 4 時間，5 個，600 円 など，一般に，大小の比較の可能なものや測定の対象となるものについ